
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RAFFAELE LEONARDI

Sulla formazione dei sistemi di numeri equitotali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.3, p. 345–350.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_345_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulla formazione dei sistemi di numeri equitotali.

Nota di RAFFAELE LEONARDI (a Roma).

Sunto. - *Per la formazione di due o più sistemi di m numeri equitotali fino al grado k , tali cioè che si abbiano le identità*

di H. T. COLEBROOKE, London, (1807)], che i cateti di due triangoli rettangoli moltiplicati per le ipotenuse danno i quattro lati di un trapezio BHĀSOARA, (nato nel 1114), Cfr. LÍLÁVTÍ, § 191-2; oppure la c. traduzione di COLEBROOKE, pp. 80-83), illustrò la detta costruzione partendo dai triangoli rettangoli (3, 4, 5), (5, 12, 13) nel seguente modo: moltiplicò i cateti del 1° per l'ipotenusa del 2° triangolo e viceversa i cateti del 2° per l'ipotenusa del 1° ed ebbe le due coppie di lati opposti del quadrilatero eroniano le cui diagonali sono $4.12 + 3.5 = 63$, $4.5 + 3.12 = 56$.

Il commentatore GANĒSA spiegò che il quadrilatero nasceva dalla opportuna disposizione, analoga a quella della fig. del testo, di quattro triangoli rettangoli ottenuti dai dati nel modo indicato nel testo.

CHASLES, (Cfr. ad es. *Aperçu historique*, Bruxelles, (1837). Note 12, p. 440), si servì anch' egli anzichè di triangoli rettangoli generatori particolari, quali ad. es. (3, 4, 5), (5, 12, 13), di due qualsiasi triangoli rettangoli eroniani.

Infine KUMMER, [Jour, für Math., 37, (1848), pp. 120], osservò che CHASLES spiegò l'oscurità di BRAHMEGUPTA senza però intenderne il metodo seguito ed espresse il teor. di BRAHMEGUPTA nella seguente forma: Se i 4 lati di un quadrilatero inscritto in un cerchio hanno i valori

$$(a^2 + b^2)(c^2 - d^2), \quad (a^2 - b^2)(c^2 + d^2), \quad 2cd(a^2 + b^2), \quad 2ab(c^2 + d^2),$$

ove a, b, c, d sono razionali, allora ambedue le diagonali, fra loro perpendicolari, i segmenti di esse, l'area del quadrilatero ed il diametro del cerchio circoscritto al quadrilatero sono razionali.

cui case si immaginano scritte le coordinate come in (2). Chiameremo poi *complementari* le coordinate appartenenti a due case simmetriche rispetto al centro, così che la somma delle ascisse e, rispettivamente, delle ordinate di tali case sarà uguale a $n + 1$. Parleremo poi di *successioni di numeri* per indicare le successioni di numeri ottenuti utilizzando la (3) e una qualunque successione di coppie di coordinate della matrice data. Fra tali successioni hanno particolare importanza quelle corrispondenti alle così dette *permutazioni figurate*, ossia alle disposizioni che possono darsi a n torri su una scacchiera quadrata di lato n (e quindi di n^2 case) in modo tale che due torri non si trovino mai nè su una stessa orizzontale nè su una stessa verticale. Come è noto, il numero totale di permutazioni figurate su una scacchiera di lato n è $n!$

Si hanno le seguenti proprietà, di immediata dimostrazione:

1) Tutte le successioni di numeri scelti in una scacchiera quadrata secondo una permutazione figurata hanno il medesimo valore al 1° grado, ossia danno una somma costante.

2) Due successioni di n numeri ciascuna, scelti in una matrice quadrata di lato $n > 2$ secondo due permutazioni figurate complementari senza elementi (case) in comune sono equitotali al 1° e al 2° grado.

3) Se il lato della scacchiera è pari, ogni quadrante della scacchiera è a sua volta una scacchiera quadrata: allora le successioni di numeri formate da una permutazione figurata comunque scelta in un quadrante e dalle simmetriche degli altri tre quadranti hanno proprietà al 1°, 2° e 3° grado.

Queste proposizioni acquistano una notevole importanza per la formazione dei sistemi di numeri equitotali fino a qualunque grado mediante il teorema seguente.

II. - Scacchiere rettangolari di lati m e $2m$.

Se nella scacchiera quadrata di lato m (l'esempio della fig. 1 serve per fissare le idee) si hanno due successioni S_λ ed S_μ aventi proprietà equitotali fino al grado k , la successione comprendente il gruppo di case S_λ nella prima scacchiera elementare (costituita dalla metà di quella rettangolare data) e il gruppo omologo S_μ della S_μ nella seconda scacchiera elementare, individua un sistema di $2m$ numeri che ha proprietà equitotali fino al grado $k + 1$ con la successione individuata in modo inverso, ossia costituita nella

prima scacchiera elementare dalle case di S_μ e nella seconda scacchiera elementare dalle case del gruppo $S_{\lambda'}$ omologo di S_λ .

	λ_2	μ_3		λ_2'	μ_3'
μ_1		λ_3	μ_1'		λ_3'
λ_1	μ_2		λ_1'	μ_2'	

Fig. 1.

La dimostrazione è assai semplice, qualora si osservi che dette $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ le ascisse di una successione S_λ scelta sulla prima scacchiera elementare in modo da soddisfare alle condizioni poste rispetto alla successione S_μ i cui elementi abbiano le ascisse $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, le corrispondenti successioni omologhe $S_{\lambda'}$ ed $S_{\mu'}$ nella seconda scacchiera elementare avranno elementi le cui ascisse saranno, rispettivamente:

$$(4) \quad \begin{aligned} &\text{per } S_{\lambda'}: m + \lambda_1, \quad m + \lambda_2, \dots, m + \lambda_m; \\ &\text{per } S_{\mu'}: m + \mu_1, \quad m + \mu_2, \dots, m + \mu_m. \end{aligned}$$

Se quindi per ipotesi si ha identicamente:

$$(5) \quad \begin{aligned} &(y_1 + \lambda_1)^k + (y_2 + \lambda_2)^k + \dots + (y_m + \lambda_m)^k = \\ &= (y_1 + \mu_1)^k + (y_2 + \mu_2)^k + \dots + (y_m + \mu_m)^k, \end{aligned}$$

sarà anche una identità la seguente relazione che traduce il teorema enunciato

$$(6) \quad \begin{aligned} &(y_1 + \lambda_1)^{k+1} + (y_2 + \lambda_2)^{k+1} + \dots + (y_m + \lambda_m)^{k+1} + \\ &+ (y_1 + m + \mu_1)^{k+1} + (y_2 + m + \mu_2)^{k+1} + \dots + (y_m + m + \mu_m)^{k+1} = \\ &= (y_1 + \mu_1)^{k+1} + (y_2 + \mu_2)^{k+1} + \dots + (y_m + \mu_m)^{k+1} + \\ &+ (y_1 + m + \lambda_1)^{k+1} + (y_2 + m + \lambda_2)^{k+1} + \dots + (y_m + m + \lambda_m)^{k+1}. \end{aligned}$$

Invero, basta osservare che, sviluppando, si trovano, al primo e al secondo membro, due polinomi che differiscono solo per avere, scambiate fra loro, rispettivamente, le espressioni:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m \quad \text{con} \quad \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m, \\ &\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_m^2 \quad \text{con} \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_m^2, \end{aligned}$$

e così di seguito, fino al grado $k+1$; espressioni che, per ogni

grado, hanno valori eguali, poichè le λ e le μ rappresentano, per ipotesi, delle permutazioni degli stessi numeri $1, 2, \dots, n$.

È interessante notare che la dimostrazione non muta se, nelle (4), si pone $m+r$ al posto di m , essendo r un intero positivo. Ciò equivale a sostituire, nel secondo quadrato, alle ascisse $m+1, m+2, \dots, 2m$, le ascisse $m+r+1; m+r+2, \dots, 2m+r$.

Esempio: nella fig. 2 le case designate con λ e μ individuano due successioni equitotali fino al 3° grado. Saranno allora equitotali fino al 4° grado le successioni $S_\lambda + S_{\mu'}$ e $S_{\lambda'} + S_\mu$.

λ	μ	μ	λ	λ'	μ'	μ'	λ'
μ	λ	λ	μ	μ'	λ'	λ'	μ'
μ	λ	λ	μ	μ'	λ'	λ'	μ'
λ	μ	μ	λ	λ'	μ'	μ'	λ'

Fig. 2.

In generale si potrà scrivere simbolicamente

$$S_\lambda + S_{\mu'} \stackrel{k+1}{=} S_{\lambda'} + S_\mu \quad \text{se } S_\lambda \stackrel{k}{=} S_\mu$$

indicando, come si è fatto, con $S_{\lambda'}$ e $S_{\mu'}$ le successioni omologhe rispettive di S_λ ed S_μ nella seconda scacchiera quadrata elementare.

Donde la possibilità di poter costruire, successivamente, per valori crescenti di k , dei sistemi equitotali fino al grado che si desidera.

Osservazione I. - Ponendo

$$y_1 + \lambda_1 = p_1, \quad y_2 + \lambda_2 = p_2, \dots, y_m + \lambda_m = p_m;$$

$$y_1 + \mu_1 = q_1, \quad y_2 + \mu_2 = q_2, \dots, y_m + \mu_m = q_m$$

la (5) e la (6) esprimono la regola di BARBETTE⁽¹⁾. Le relazioni diventano indipendenti dai singoli valori di λ, μ, y . È sufficiente allora partire da una identità qualunque del tipo

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = q_1 + q_2 + \dots + q_m$$

(1) Association française pour l'avancement des Sciences, Grenoble, 1925. La regola di BARBETTE è la seguente: si l'égalité

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = A_1 + A_2 + \dots + A_m$$

nella quale p_i e q_i sono numeri interi relativi, di cui alcuni possono essere anche nulli, purchè figurino sempre nella (5). rappresentati da zeri. Nelle relazioni precedenti m acquista allora il significato di un parametro qualunque, non nullo.

Osservazione II. — La scelta della successione iniziale secondo una permutazione figurata non è l'unica. La ricerca di tutti i casi possibili è interessante, ma ci porterebbe molto lontano.

Questioni proposte.

Determinare sei numeri interi a, b, c, d, e, f , tali che

$$a + b + c = d + e + f = s, \quad abc + def,$$

$s - 2a = 2u^2$, $s - 2b = 2v^2$, $s - 2c = 2w^2$, $s - 2d = 2x^2$, $s - 2e = 2y^2$, $s - 2f = 2z^2$, con u, v, w, x, y, z numeri interi.

Es. $a = 370$, $b = 493$, $c = 845$, $d = 325$, $e = 629$, $f = 754$; si ha $s = 1708$, $u = 22$, $v = 19$, $w = 3$, $x = 23$, $y = 15$, $z = 10$.

Si noti che $22^2 + 19^2 + 3^2 = 23^2 + 15^2 + 10^2$; $22^6 + 19^6 + 3^6 = 23^6 + 15^6 + 10^6$.

ALFREDO MOESSNER

entre m nombres $a_1, a_2, \dots, a_m$ et m nombres $A_1, A_2, \dots, A_m$ existe aux p premiers degrés sans exister aux $(p+1)$ ième l'égalité

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m} = \\ = A_1 + A_2 + \dots + A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + \dots + A_{2m} \end{aligned}$$

entre $2m$ nombres $a_1, a_2, \dots, a_{2m}$ et les $2m$ nombres $A_1, A_2, \dots, A_{2m}$ existe elle même aux $(p+1)$ premiers degrés, sans exister aux $(p+2)$ ième pourvu qu'on ait

$$\begin{aligned} a_{m+1} = A_1 + c, \quad a_{m+2} = A_2 + c, \quad \dots, \quad a_m = A_m + c, \\ A_{m+1} = a_1 + c, \quad A_{m+2} = a_2 + c, \quad \dots, \quad A_{2m} = a_m + c, \end{aligned}$$

le nombre c étant arbitraire mais non nul.