
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE PALAMÀ

**Su di un limite inferiore della distanza di
due zeri consecutivi di $H_n(x)$ e su di una
limitazione di $H_n^2(x) - H_{n-1}(x)H_{n+1}(x)$.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.3, p. 311–315.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_311_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_311_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su di un limite inferiore della distanza di due zeri consecutivi di $H_n(x)$ e su di una limitazione di $H_n^2(x) - H_{n-1}(x)H_{n+1}(x)$.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Il sunto è contenuto nella breve introduzione che segue.*

È nota la formula

$$(1) \quad \Delta_n(x) = H_{n-1}^2(x) + (n-1)\Delta_{n-1}(x),$$

in cui

$$\Delta_n(x) = H_n^2(x) - H_{n-1}(x)H_{n+1}(x),$$

essendo $H_n(x)$ il polinomio di HERMITE per il quale vale la

$$H'_n(x) = nH_{n-1}(x), \quad (H'_1(x) = dH_n(x)/dx)$$

Ora noi ritrovata qui la (1) con l'ovvio procedimento con cui recentemente L. KOSCHMIEDER ⁽¹⁾ ha stabilito una analoga per i polinomi $G_n(x)$ studiati dal NIELSEN e definiti dalle ⁽²⁾

$$H_n(x)G_n(x) - H_{n+1}(x)G_{n-1}(x) = n!, \quad G_0(x) = 1,$$

stabiliremo la seguente limitazione per $\Delta_n(x)$

$$\boxed{\Delta_n(x) < hn! e^{x^2/2}}, \quad h = 1,18034101,$$

ed un'altra per il wronskiano di $H_n(x)$, $H_{n+1}(x)$.

⁽¹⁾ Cfr. LOTHAR KOSCHMIEDER, *Das Vorzeichen gewisser aus Hermite-schen Polynomen zweiter Art gebildeter Determinanten*, « Anz. Öster. Akad. Wiss. », Math.-Nat. Kl. 1951, pp. 165-167 (1951).

⁽²⁾ Cfr. P. APPELL · J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques · Polynomes d'HERMITE*, Paris, (1926), pp. 360-361.

Infine determineremo una valutazione inferiore della distanza di due zeri consecutivi di $H_n(x)$.

1. Con la formula ricorrente degli $H_n(x)$

$$(2) \quad H_n(x) - xH_{n-1}(x) + (n-1)H_{n-2}(x) = 0,$$

si determina subito la

$$(3) \quad H_{n+1}(x) - (x^2 - n)H_{n-1}(x) + (n-1)xH_{n-2}(x) = 0.$$

Ora l'eliminazione di $H_n(x)$ e $H_{n+1}(x)$ fra (1), (2) e (3) dà

$$\Delta_n(x) = H_{n-1}^2(x) + (n-1)[H_{n-1}^2(x) - xH_{n-1}(x)H_{n-2}(x) + (n-1)H_{n-2}^2(x)],$$

ossia per la (2) la (1).

Se si divide la (1) per $(n-1)!$ e si somma poi da $n=1$ ad $n=m+1$, si ha la relazione egualmente nota

$$(4) \quad \Delta_{m+1}(x) = m! \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} H_n^2(x).$$

La (1), (essendo $\Delta_1 = 1$), ed anche la (4) fanno vedere che è

$$(5) \quad \Delta_m(x) > 0$$

per qualunque x .

2. H. CRAMER ⁽³⁾ ha dato per gli $H_n(x)$ la seguente limitazione

$$(6) \quad |H_n(x)| < k\sqrt{n!} e^{x^2/4}, \quad x \text{ qualsiasi},$$

in cui è $k = 1,086435$, secondo la determinazione fatta da C. V. L. CHARLIER ⁽⁴⁾.

Pertanto la (4), a mezzo della (6), dà appunto

$$(7) \quad \boxed{\Delta_m(x) < hm! e^{x^2/2}}, \quad h = 1,18034101,$$

che vale per qualunque x .

⁽³⁾ Cfr. G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, parte II, (a cura di G. SANSONE), *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, II ed., Bologna, (1946), pp. 295-6, e le notizie bibliografiche ivi riportate.

Si noti il significato leggermente differente degli $H_n(x)$ usati nel testo e quelli del l. c.

⁽⁴⁾ Cfr. l. c. in ⁽³⁾.

3. Determiniamo il wronskiano $W(x)$ di $H_n(x)$ ed $H_{n+1}(x)$, si ha

$$W(x) = \begin{vmatrix} H_n(x) & H_{n+1}(x) \\ nH_{n-1}(x) & (n+1)H_n(x) \end{vmatrix} = (n+1)H_n^2(x) - nH_{n-1}(x)H_{n+1}(x),$$

ossia per le (1) e (4)

$$(8) \quad W(x) = n\triangle_n(x) + H_n^2(x) = n! \sum_{i=0}^n 1/i! H_i^2(x).$$

La (8), a mezzo delle (6), (7) dà la seguente limitazione per $W(x)$

$$\boxed{W(x) < h(n+1)! e^{x^2/2}}, \quad h = 1,18034101.$$

Pertanto per la (5) è $W(x) > 0$, per qualunque x , ed i due polinomi $H_n(x)$, $H_{n+1}(x)$, se ci uniformiamo alla nomenclatura di A. MAMBRIANI ⁽⁵⁾, sono perciò due funzioni wronskiane coniugate in qualsiasi intervallo e valgono quindi per gli $H_n(x)$ tutti i risultati stabiliti da MAMBRIANI ⁽⁶⁾ per le funzioni wronskiane coniugate, alcuni dei quali sono però già noti.

A noi qui interessa applicare la formula stabilita dal MAMBRIANI che dà una valutazione inferiore della distanza di due zeri consecutivi di una qualsiasi funzione wronskiana $f(x)$. Tale formula è la seguente

$$(9) \quad \alpha_1 - \alpha \geq \frac{2m_{|w|}}{M_{|f'|} M_{|\varphi'|}}$$

ove α, α_1 , ($\alpha < \alpha_1$), sono due zeri consecutivi di $f(x)$ della quale $\varphi(x)$ è una funzione coniugata in un intervallo (a, b) , comprendente α, α_1 ; $M_{|f'|}$, $M_{|\varphi'|}$ sono rispettivamente i massimi di $|f'|$ e $|\varphi'|$ in (a, b) ed $m_{|w|}$ è il minimo del valore assoluto del wronskiano di $f(x)$, $\varphi(x)$ in (a, b) .

Ora il ragionamento del MAMBRIANI sussiste se invece di $M_{|f'|}$, $M_{|\varphi'|}$ ci si serve rispettivamente di un limite superiore di $|f'|$ e $|\varphi'|$. Cosa analoga va detta per $m_{|w|}$.

Nel caso nostro essendo

$$f(x) = H_n(x), \quad \varphi(x) = H_{n+1}(x),$$

ed essendo quindi

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x), \quad H_{n+1}'(x) = (n+1)H_n(x),$$

⁽⁵⁾ Cfr. A. MAMBRIANI, *Su le funzioni wronskiane*, « Rivista di Mat. dell' Univ. di Parma », vol. I, pp. 475-486, (1950).

⁽⁶⁾ Cfr. l. c. in ⁽⁵⁾.

per la (6), si ha

$$(10) \quad |H_n'(x)| < Kn\sqrt{(n-1)!}e^{l/4}, \quad K = 1,086435$$

$$(11) \quad |H'_{n+1}(x)| < k(n+1)\sqrt{n!}e^{l/4}, \quad *$$

se 1 è il massimo dei due valori assoluti degli estremi a, b dell'intervallo (a, b) in cui cadono i due zeri α, α_1 di $H_n(x)$.

Pertanto la (9), se invece di $M_{|f'|}$, $M_{|\varphi'|}$ vi si pone il prodotto dei secondi membri delle (10) e (11), diventa

$$(12) \quad \alpha_1 - \alpha > \frac{\sigma m_{|w|} e^{-l/2}}{(n+1)! \sqrt{n}}, \quad \sigma = 1,694.$$

Quindi ogni valutazione di $m_{|w|}$, o di un limite inferiore del valore del wronskiano $W(x)$ di $H_n(x)$, $H_{n+1}(x)$ in (a, b) , dato dalla (8), dà un limite inferiore della distanza di due zeri consecutivi interni ad (a, b) di $H_n(x)$.

4. Facciamo un'applicazione della (12).

Ad es. L. TOSCANO ⁽⁷⁾ ha stabilito la

cioè $\Delta_n(x) > \Delta_n(0)$ per qualunque x reale $\neq$ da zero,

$$\Delta_n(x) \geq 2^{-n} \left[\frac{n!}{(n/2)!} \right]^2, \quad \text{per } n \text{ pari,}$$

$$\Delta_n(x) \geq \frac{2^{-n}(n-1)!(n+1)!}{[(n-1)/2]![(n+1)/2]!}, \quad \text{» dispari,}$$

e per qualsiasi x reale.

Pertanto dalla (8), si ha

$$(13) \quad W(x) > 2^{-n} n \left[\frac{n!}{(n/2)!} \right]^2, \quad \text{per } n \text{ pari,}$$

$$(14) \quad W(x) \geq \frac{2^{-n} n! (n+1)!}{[(n-1)/2]![(n+1)/2]!}, \quad \text{» dispari.}$$

Il segno uguale nella (14) si riferisce al caso $x = 0$.

Se ora assumiamo nella (12) $l = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$, perchè come si sa gli zeri $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ di $H_n(x)$ sono a due a due opposti e minori in valore assoluto di $\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$, la stessa (12), se invece di $m_{|w|}$ si pongono i secondi membri di (13) e (14), dà rispettiva-

⁽⁷⁾ Cfr. L. TOSCANO, *Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Hermite*, « Boll. Un. Mat. It. », (3), 7, (1952), pp. 171-173.

mente

$$(15) \quad \alpha_{r+1} - \alpha_r > \frac{\sigma \sqrt{n} n! e^{-n(n-1)/4}}{2^n (n+1) [(n/2)!]^2}, \quad \text{per } n \text{ pari,}$$

$$\alpha_{r+1} - \alpha_r > \frac{\sigma (n-1)! \sqrt{n} e^{-n(n-1)/4}}{2^n [(n-1)/2]! [(n+1)/2]!}, \quad \text{dispari,}$$

ove $\sigma = 1,694$.

Se n è dispari ed $\alpha_r = 0$, si ha da quest'ultima per il più piccolo zero positivo la limitazione seguente

$$\alpha_{\frac{n+1}{2}} > \frac{\sigma (n-1)! \sqrt{n} e^{-n(n-1)/4}}{2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!}, \quad n \text{ dispari}$$

Inoltre la successiva applicazione di (15) dà

$$\alpha_{r+s} - \alpha_r > \frac{\sigma s n! \sqrt{n} e^{-n(n-1)/4}}{2^n (n+1) \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2} \quad n \text{ pari, } s \leq n-1,$$

ed un'analogia si ha dalla (16).

Si noti infine il caso $r=1$, $s=n-1$.