BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO NADILE

Equazioni miste del moto dei sistemi anolonomi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 302–306.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_302_0>

Equazioni miste del moto dei sistemi anolonomi.

Nota di ANTONIO NÁDILE (a Messina).

Sunto. - *È identico alle prime sedici righe della Nota.*

1. Altrove abbiamo considerato per il moto di un sistema materiale anolonomo una forma di equazioni, diversa da quella di HAMEL che nel caso conservativo per l'introduzione della funzione lagrangiana $\mathfrak{L} = T + U$, si accosta molto a quella dei sistemi lagrangiani e che per tal motivo si può ancora chiamare lagrangiana.

Queste equazioni si possono ridurre ad una forma che, in quanto analoga a quella di HAMILTON, può definirsi canonica.

Nella presente Nota, eseguendo in modo opportuno la trasformazione hamiltoniana, si perviene, per il moto del considerato sistema anolonomo, ad una importante forma di equazioni, analoga a quella scoperta da ROUTH per i sistemi olonomi, rappresentata da un sistema le equazioni del quale hanno una parte forma canonica e una parte forma lagrangiana, ma dipendenti tutte da una medesima funzione $\mathfrak{R}$.

L'utilità, in ordine al problema dell'integrazione delle equazioni dei sistemi anolonomi, della forma per ultimo indicata, che potremo definire mista, si rende manifesta nel caso di coordinate ignorabili.

2. - Alle equazioni del moto di un sistema materiale soggetto a forze conservative derivanti da un potenziale U, e a vincoli di mobilità anolonomi del tipo:

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, b_{ir}\dot{q}_r = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

si può dare la forma espressiva seguente [1]

$$T_{m+\alpha} - U_{m+\alpha} - \sum_{1}^{m}{}_h\, B_{h,\,m+\alpha}(T_h - U_h) = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-m) \tag{I}$$

[1] Cfr. A. NADILE, *Influenza dei vincoli anolonomi nello spostamento di equilibrio di un sistema*, «Rivista di Matematica della Univ. di Parma», I (1950), pp. 393-399.

dove

$$T_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r}, \qquad U_r = \frac{\partial U}{\partial q_r},$$

e $B_{h,m+\alpha}$ denota la $\sum_{1}^{m}{}_j\, b^{jh} b_{j,m+\alpha}$ essendo b^{jh} l'elemento reciproco di b_{jh} nel determinante $B = |b_{ik}|$, $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$.

Nella risoluzione del problema dinamico bisognerà inoltre tener conto delle equazioni dei vincoli (1) che in conformità si scrivono:

$$\dot{q}_h = -\sum_{1}^{n-m}{}_\alpha\, B_{h,m+\alpha}\, \dot{q}_{m+\alpha}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Posto

$$T + U = \mathfrak{L}(q, \dot{q}, t)$$

le equazioni (I) si possono mettere sotto la forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+\alpha}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{m+\alpha}} - \sum_{1}^{m}{}_h\, B_{h,m+\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h}\right) = 0 \tag{II}$$

che ancora chiameremo lagrangiana.

3. Per dare alle equazioni (II) una forma analoga a quella di Routh per i sistemi olonomi conviene porre:

$$p_{m+i} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+i}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu, \text{ con } \nu < n - m) \tag{3}$$

dalle quali possiamo supporre di ricavare le $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_{m+\nu}$, in termini delle $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$; $p_{m+1}, \ldots, p_{m+\nu}$; $\dot{q}_{m+\nu+1}, \ldots, \dot{q}_n$; t.

Se alle q e alle $\dot{q}$ si attribuiscono degli incrementi arbitrari δq e $\delta\dot{q}$ il corrispondente incremento della funzione $\mathfrak{L}$ risulta

$$\delta\mathfrak{L} = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_r}\delta q_r + \sum_{1}^{m}{}_h \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\delta \dot{q}_h + \sum_{1}^{\nu}{}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+i}}\delta \dot{q}_{m+i} + \sum_{1}^{n-m-\nu}{}_j \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu+j}}\delta \dot{q}_{m+\nu+j}$$

e giacchè

$$\sum_{1}^{\nu}{}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+i}}\delta \dot{q}_{m+i} = \sum_{1}^{\nu}{}_i\, p_{m+i}\delta \dot{q}_{m+i} = \delta\left(\sum_{1}^{\nu}{}_i\, p_{m+i}\dot{q}_{m+i}\right) - \sum_{1}^{\nu}{}_i\, \dot{q}_{m+i}\delta p_{m+i},$$

sostituendo nella relazione precedente e ponendo

$$\mathfrak{R} = \sum_{1}^{\nu}{}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+i}}\delta \dot{q}_{m+i} - \mathfrak{L} \equiv \sum_{1}^{\nu}{}_i\, p_{m+i}\dot{q}_{m+i} - \mathfrak{L},$$

si deduce

$$(4)\qquad \delta\mathfrak{R} = \sum_1^{\nu}{}_i\, \delta p_{m+i}\dot{q}_{m+i} - \sum_1^{n}{}_r \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_r}\delta q_r - \sum_1^{m}{}_h \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\delta \dot{q}_h - \sum_1^{n-m-\nu}{}_j \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu+j}}\delta \dot{q}_{m+\nu+j}.$$

D'altra parte, siccome la funzione $\mathfrak{R}$, che noi chiameremo ancora funzione di ROUTH, può essere considerata funzione degli argomenti

$$q_1, q_2, \dots, q_n;\quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m;\quad p_{m+1}, \dots, p_{m+\nu};\quad \dot{q}_{m+\nu+1}, \dots, \dot{q}_n;\quad t,$$

si ha

$$\delta\mathfrak{R} = \sum_1^{n}{}_r \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q_r}\delta q_r + \sum_1^{m}{}_h \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_h}\delta \dot{q}_h + \sum_1^{\nu}{}_i \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p_{m+i}}\delta p_{m+i} + \sum_1^{m-n-\nu}{}_j \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_{m+\nu+j}}\delta \dot{q}_{m+\nu+j},$$

e dal confronto con la (4), per l'arbitrarietà degli incrementi

$$\delta q_r,\quad (r=1,2,\dots,n);\qquad \delta p_{m+i},\ (i=1,2,\dots,\nu);\qquad \delta \dot{q}_{m+\nu+j},\quad (j=1,2,\dots,n-m)$$

si ottiene:

$$\dot{q}_{m+i} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p_{m+i}},\qquad (i=1,2,\dots,\nu)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_r} = -\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q_r},\qquad (r=1,2,\dots,n)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} = -\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_h},\qquad (h=1,2,\dots,m)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+\nu+j}} = -\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_{m+\nu+j}},\qquad (j=1,2,\dots,n-m-\nu).$$

In virtù di queste ultime e della (3) il sistema di equazioni (II) assume l'aspetto

$$(5)\qquad \frac{dq_{m+i}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p_{m+i}}$$

$$(6)\qquad \frac{dp_{m+i}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q_{m+i}} + \sum_1^{m}{}_h B_{h,\,m+i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q_h}\right) = 0,$$

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_{m+\nu+j}} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q_{m+\nu+j}} - \sum_1^{m}{}_h B_{h,\,m+\nu+j}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q_h}\right) = 0$$

$$(j=1,2,\dots,n-m-\nu),$$

e le equazioni (2) dei vincoli anolonomi diventano

$$(8)\qquad \dot{q}_h = -\sum_1^{\nu}{}_i B_{h,\,m+i}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p_{m+i}} - \sum_1^{n-m-\nu}{}_j B_{h,\,m+\nu+j}\dot{q}_{m+\nu+j},$$

$$(h=1,2,\dots,m).$$

Il sistema di equazioni (5), (6), (7), (8) per il moto del nostro sistema materiale anolonomo può considerarsi come l'analogo a quello di ROUTH per i sistemi olonomi. In esso la funzione $\mathfrak{R}$ va intesa espressa in termini di

$$q_1, q_2, \dots, q_n; \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m; \quad p_{m+1}, \dots, p_{m+\nu}; \quad \dot{q}_{m+\nu+1}, \dots, \dot{q}_n; \quad t.$$

Dal punto di vista analitico esso risulta costituito da $n+\nu$ equazioni differenziali nelle $n+\nu$ funzioni incognite $q_1, q_2, \dots, q_n$; $p_{m+1}, \dots, p_{m+\nu}$.

La considerazione delle equazioni del moto dei sistemi anolonomi sotto la forma testè indicata è in particolar modo opportuna nel caso in cui vi siano coordinate ignorabili.

Così ad esempio se sono ignorabili le coordinate $q_{m+1}, \dots, q_{m+\nu}$ si ha

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q_{m+i}} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu).$$

Se inoltre il sistema materiale è tale che le somme

$$\sum_1^m{}_h B_{h,m+i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q_h}\right), \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, \nu,$$

sono identicamente nulle, allora le (6) si riducono alle

$$\frac{dp_{m+i}}{dt} = 0$$

che porgono gli integrali dei momenti

$$p_{m+i} = p^{(0)}{}_{m+i}, \quad \text{(costante)}, \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu) \tag{9}$$

Dopo ciò il problema si riduce all'integrazione del sistema formato dalle equazioni (7) del second'ordine e dalle equazioni (8) del prim'ordine, ove in luogo delle p_{m+i} si siano posti i corrispondenti valori costanti; si riduce cioè all'integrazione di un sistema di $(n-m-\nu)+m = n-\nu$ equazioni differenziali nelle funzioni incognite del tempo: $q_1, q_2, \dots, q_m, q_{m+\nu+1}, \dots, q_n$. Trovato l'integrale generale di questo sistema, che involgerà altre $2(n-m-\nu)+m = 2(n-\nu)-m$ nuove costanti arbitrarie, le ulteriori funzioni incognite $q_{m+1}, \dots, q_{m+\nu}$ si otterranno dalle (5) con quadrature. Queste ν quadrature introdurranno altre ν costanti arbitrarie.

La circostanza accennata si presenta ad esempio nel caso in cui, oltre ad essere ignorabili le coordinate $q_{m+1}, \dots, q_{m+\nu}$, mancano nelle equazioni dei vincoli anolonomi le velocità lagrangiane $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_{m+\nu}$, e cioè $B_{h,m+i}=0$ per $i=1, 2, \ldots, \nu$. Allora, in conformità di un noto teorema del prof. AGOSTINELLI [1], sussistono gli integrali (9) dei momenti.

4. È opportuno osservare ancora che per $\nu=n-m$, la funzione $\mathfrak{R}$ si identifica colla funzione hamiltoniana

$$H=\sum_{1}^{n-m}{}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_{m+i}} \dot{q}_{m+i}-\mathfrak{L}\equiv\sum_{1}^{n-m}{}_i p_{m+i}\dot{q}_{m+i}-\mathfrak{L},$$

le (5) e (6) si riducono al seguente sistema, che, per la forma delle sue equazioni, potremo definire canonico

$$\frac{dq_{m+i}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{m+i}} \tag{5'}$$

$$\frac{dp_{m+i}}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_{m+i}}+\sum_{1}^{m}{}_h B_{h,m+i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial H}{\partial q_h}\right)=0, \quad (i=1,\ 2, \ldots n-m) \tag{6'}$$

ove H va considerata funzione di $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, p_{m+1}, \ldots, p_n, t$, le equazioni (7) svaniscono, e le equazioni (8) dei vincoli anolonomi diventano

$$\dot{q}_h=-\sum_{1}^{n-m}{}_i B_{h,m+i}\frac{\partial H}{\partial p_{m+i}}, \qquad (h=1,\ 2, \ldots, m). \tag{8'}$$

Allora, immaginando di sostituire nei secondi membri delle (5′) e (6′) in luogo delle $\dot{q}_h$ i valori espressi dalle (8′), si ha in complesso un sistema $2(n-m)+m=2n-m$ equazioni differenziali del prim'ordine nelle funzioni incognite $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n$. Ne consegue che il sistema di equazioni (5), (6), (7), poichè dipende, come i sistemi canonici (5′), (6′) e i sistemi lagrangiani (II), da un'unica funzione $\mathfrak{R}$, può considerarsi di forma canonica rispetto alle coordinate $q_{m+1}, \ldots, q_{m+\nu}$ e ai corrispondenti momenti $p_{m+1}, \ldots, p_{m+\nu}$, e di forma lagrangiana rispetto alle coordinate $q_{m+\nu+1}, \ldots, q_n$.

[1] Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sull'esistenza di integrali di un sistema anolonomo con coordinate ignorabili*, « Atti della Accademia delle Scienze di Torino », vol. 80, (1944-45), pp. 231-239.