Recensioni.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 188–202.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_188_0>

RECENSIONI

F. Casorati, *Opere a cura dell' Unione matematica italiana*. Vol II, Ed. Cremonese, Roma 1952, pp. II+294.

A brevissima distanza dal primo volume degli scritti di Felice Casorati (1) fa seguito questo secondo volume che, tenuta presente l'eccezione per la « Teorica delle funzioni di variabili complesse » e per due commemorazioni dovute a matematici stranieri che il Casorati ha tradotto in lingua italiana per gli Annali di matematica, completa la pubblicazione delle Opere dell'eminente Analista. Anche il contenuto di questo secondo volume, che è diviso in tre parti (equazioni differenziali; geometria; argomenti diversi), era stato preordinato dal compianto prof. Berzolari con la collaborazione di alcuni matematici; L. Brusotti ne ha curato la stampa con affettuosa devozione verso la Memoria del Casorati, al quale era legato da vincoli familiari.

I lavori sulle equazioni differenziali (nn. 20-34), con cui ha inizio il volume in esame, costituiscono, dopo le funzioni analitiche, il capitolo in cui maggiormente si è affermata la figura scientifica del Casorati: essi hanno assorbito quasi tutta la sua attività dal 1874 al 1882, e non è fuori luogo ricordare che nel 1875 il nostro illustre Predecessore, lasciati gli studi e gli insegnamenti di matematica applicata (prima a Pavia, poi nell'attuale Politecnico di Milano), assumeva l'incarico dell'Analisi superiore per dedicare tutta la sua attività all'ateneo pavese e alla scienza pura. A una prima Nota contenente alcune formule preliminari fanno seguito alcuni lavori sulle soluzioni singolari delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. A tale riguardo è merito del Casorati sia aver rilevato a proposito delle anteriori ricerche che « celebri matematici non vi hanno portato quel rigore che si ammira in molti altri loro lavori, dando così occasione a dissensi perfino intorno alle proposizioni più fondamentali della medesima » (lavoro n. 21; Rend. del R. Istituto Lombardo, 1875), sia aver precisato che si dovevano prendere in considerazione le equazioni di tipo algebrico differenziale, vale a dire quelle in cui compaiono espressioni ottenute mediante un numero finito di operazioni algebriche sopra u, v, du, dv: grado dell'equazione è il massimo esponente del rapporto $du : dv$. Nel citato lavoro n. 21 l'A. stabilisce che se un'equazione (irriducibile) di grado m ammette un integrale generale algebrico, questo si può esprimere mediante un'equazione algebrica in u, v, c, la quale, nella costante arbitraria c, è di grado m. Nei successivi lavori viene approfondito il caso $m = 2$. I lavori sulle

(1) Vedi la recensione di L. Brusotti in questo « Bollettino », A. VI (1951), pp. 163-166. Il primo volume contiene: Discorsi. Geodesia. Teoria delle funzioni di variabili complesse.

equazioni differenziali lineari (nn. 31-34) sono rivolti alla teoria di Fuchs, nella quale il nostro Casorati ha ritrovato, con sorprendente semplicità, un risultato di Hamburger, e alla generalizzazione di alcuni teoremi di Hermite, Brioschi, Mittag Leffler, alla quale l'Analista pavese è pervenuto mediante l'idea originale di costruire un'equazione algebrica avente come radici le derivate logaritmiche di integrali particolari dell'equazione differenziale. Un'unica Nota (n. 23) è dedicata alle equazioni a derivate parziali con riferimento alle loro soluzioni singolari; in essa mediante la considerazione di primitive complete algebriche, il Casorati si fa iniziatore di un metodo di ricerca analogo a quello sviluppato per le equazioni differenziali ordinarie. A questo primo gruppo di pubblicazioni, più delle nostre parole, ben si addicono quelle pronunciate, con significativa modestia, da G. Vivanti nel primo centenario della nascita del grande Casorati: « il seme che esce dalla mano del buon seminatore ben di rado rimane sterile » (2).

Seguono le pubblicazioni di Geometria (nn. 35-40), una delle quali è rivolta alla sostituzione delle coordinate plückeriane con altro sistema di coordinate di retta (di piano) che meglio traduca per dualità il sistema cartesiano. Ma ben più significativi sono i lavori di geometria differenziale: ad una Memoria (n. 35; 1860) del giovane Casorati, dedicata alla ricerca delle proprietà assolute di una superficie curva flessibile ma inestendibile (vale a dire di quelle proprietà che non subiscono alterazione per qualsiasi cambiamento di forma della superficie), fa seguito, alla distanza di circa trenta anni, l'ultima ricerca di Felice Casorati (pubblicata in due successive diverse redazioni), contenente tra l'altro quella formula per la curvatura di una superficie che figura nei nostri corsi di Analisi infinitesimale assieme alla curvatura media e a quella di Gauss.

Nell'ultima parte del volume, nella quale sono riunite le pubblicazioni di argomenti diversi (nn. 41-46), troviamo i due lavori iniziali del Casorati (3): nel primo (1856) il nostro Autore, non ancora maggiorenne, raffinando l'analisi di Tchebychef, ha esteso la validità di un risultato raggiunto dal matematico russo nell'integrazione delle funzioni irrazionali; il secondo (1857) è un'ampia Memoria, nella quale il giovanissimo Casorati applica alla trasformazione delle funzioni ellittiche di ordine qualunque un metodo di Hermite, di cui il suo maestro Brioschi aveva fatto uso in un caso particolare. Gli ulteriori lavori sono dedicati ad algoritmi infiniti e a diversi tipi di determinanti di funzioni.

Se il complesso della produzione scientifica di Felice Casorati risente della grande versatilità della sua mente che signoreggiava nell'analisi, nella geometria e nella scienza applicata, la pubblicazione dei suoi scritti, « dai quali la materia balza fuori come cosa viva, che penetra nella mente del lettore e si impone alla sua attenzione » (4), ha per noi analisti un significato anche maggiore, perchè mette in luce quale contributo abbiano dato la sua finissima critica e le doti del suo ingegno a porre su basi rigorose una parte della nostra scienza.

(2) G. Vivanti, *Felice Casorati nel centenario della nascita.* (Rend. del Seminario matematico e fisico di Milano, vol. IX (1935), pp. 127-138).

(3) Nei lavori originali si trovano notazioni del tipo $\sqrt{\ }(uv)$ $\sqrt{\ }(1-x^2)$, che nella riproduzione tipografica hanno assunto la forma $\sqrt{(uv)}$, $\sqrt{(1-x^2)}$: e evidente che le parentesi sono attualmente superflue, mentre erano indispensabili nella composizione tipografica di circa un secolo fa.

(4) Vedi G. Vivanti, luogo cit. in (2).

Pertanto, assieme alla nostra soddisfazione per la sollecitudine con cui l'Unione Matematica Italiana (affiancata da enti pavesi) ha concluso questa pubblicazione, è spontaneo esprimere il desiderio che al più presto appaiano le opere degli altri grandi matematici italiani e innanzi tutto quelle di U. DINI (*).

SILVIO CINQUINI

B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. I, Calcolo algebrico esterno e proprietà differenziali locali. (Edizioni Universitarie Docet, Roma, 1951. Litografie, pagg. 520).

Questa importante opera di B. SEGRE viene ad aggiungersi alla collana di pubblicazioni con la quale l'Istituto Nazionale di Alta Matematica ha già raccolto vari dei corsi svolti presso di esso in un decennio circa di attività (1).

L'opera mira ad una esposizione sistematica ed unitaria della teoria degli integrali di forme differenziali con particolare riguardo agli integrali armonici e alle loro applicazioni alla geometria algebrica. Questo campo di ricerche, che ha dato splendidi frutti nell'ultimo ventennio sopratutto ad opera di G. DE RHAM e di W. V. D. HODGE, presenta così svariati e profondi legami con molteplici altri campi della matematica (topologia, analisi funzionale, equazioni alle derivate parziali, gruppi di trasformazioni, funzioni analitiche, geometria algebrica, geometria riemanniana, ecc.), che indubbiamente l'opera del SEGRE susciterà il più largo interesse tra i matematici.

Il primo volume finora pubblicato, può riguardarsi come introduzione alle teorie cui sopra si è accennato. Tuttavia convien subito dire che, appunto in relazione all'accennato indirizzo sistematico ed unitario dell'opera, si tratta di una introduzione estremamente ricca e non limitata soltanto al fine principale. Ogni teoria ed anche ogni ordine d'idee particolare, son sempre presentati e inquadrati nel loro aspetto concettuale più generale e collegati ad un tempo con risultati classici e con sviluppi ed estensioni più recenti. Questo è anzi, a nostro avviso, il carattere saliente del libro, che ne fa un trattato di largo respiro, ricco di suggestioni svariatissime e di collegamenti profondi non di rado originali dell'Autore, ben degno della poderosa cultura e della forza tecnica mirabile di B. SEGRE.

Il volume si divide in quattro capitoli, ciascun dei quali si chiude con un'ampia nota bibliografica contenente, insieme all'elenco delle memorie ed opere attinenti all'argomento trattato, anche un succoso cenno dello sviluppo storico delle idee.

Il primo capitolo tratta la teoria generale delle forme algebriche esterne (vale a dire a moltiplicazione esterna), il cui fondamento risale a GRASSMANN. Le forme esterne sono introdotte dal punto di vista più generale, e cioè a par-

(*) *N. d. D.* Il primo volume delle memorie di U. DINI, a cura dell'U.M.I., è da tempo presso l'Editore CREMONESE e ne sarà ultimata la stampa nel primo semestre del 1953.

È pure presso l'Editore Cremonese il secondo volume, e un terzo sarà presto consegnato allo stesso Editore.

(1) Altri volumi pubblicati sono i seguenti: F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*; ENEA BORTOLOTTI, *Spazi a connessione proiettiva*; F. CONFORTO, *Funzioni abeliane*; U. AMALDI, *Introduzione alla teoria dei gruppi continui infiniti di trasformazioni*, I, II; M. PICONE, *Fondamenti di analisi funzionale lineare*; F. CONFORTO, *Funzioni abeliane modulari*.

tire da un anello commutativo, ma peraltro qualunque, A, ampliando questo mediante composizione con n indeterminate ξ^i suscettibili di moltiplicazione alternante (o esterna): $\xi^i\xi^j = -\xi^j\xi^i$, $\xi^i\xi^i = 0$. L'analogo ampliamento cui si giunge considerando invece indeterminate a moltiplicazione commutativa, dà, com'è ben noto, gli ordinari polinomi con coefficienti in A. Le forme esterne corrispondono, nell'analogia tra i due ampliamenti, ai polinomi omogenei.

Il calcolo delle forme esterne e i concetti fondamentali con esso connessi, sono ampiamente sviluppati con riguardo al gruppo delle trasformazioni affini sulle indeterminate e al sottogruppo delle trasformazioni ortogonali: prodotti esterni di forme, forma plurilineare associata ad una forma esterna, rango di una forma esterna, forme aggiunte (o duali), ecc.. E' in particolar modo da segnalare lo sviluppo dato dall'A. alla nozione di prodotto « regressivo », in certo senso complementare dell'ordinaria nozione di prodotto esterno di forme (prodotto « progressivo »). Il prodotto regressivo permette di operare su due forme di gradi r, s con $r+s>n$, conducendo ad una forma di grado $r+s-n$, e, benchè riesca covariante soltanto di fronte al gruppo equiaffine (a differenza del prodotto progressivo che è covariante rispetto al gruppo affine), viene assai vantaggiosamente sfruttato in tutto il volume. In particolare, col suo uso, vengon date in forma molto semplice condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma esterna abbia dato rango o, in particolare, sia monomia (cioè riducibile con trasformazioni affini ad un sol termine).

Attraverso la nozione di forma plurilineare associata, la teoria delle forme esterne riceve interpretazione e applicazione geometrica nella stella dello spazio euclideo ad n dimensioni (ovvero nello spazio proiettivo $(n-1)$-dimensionale). Ad una forma ω_r di grado r (o, più esattamente, all'equazione $\omega_r = 0$) può invero associarsi un complesso lineare di spazi S_r della stella. I rapporti e le proprietà geometriche conseguenti da questa associazione, sono dall'A. studiati e approfonditi alquanto più che d'ordinario (forme monomie e complessi lineari nucleati, forme fra loro aggiunte e complessi di S_r e di S_{n-r} trasformati per polarità ortogonale nella stella, sistemi di equazioni esterne e sistemi di spazi corrispondenti, ecc.), ed è altresì considerata la rappresentazione iperspaziale delle forme esterne di dato grado (ottenuta assumendo come coordinate proiettive omogenee i coefficienti di una forma) e sono studiate le varietà immagini di forme monomie e di ranghi via via crescenti, con le loro varie relazioni geometriche.

Il capitolo si chiude con una rapida esposizione dei principi del calcolo geometrico di GRASSMANN nello spazio euclideo ordinario.

Il secondo capitolo è dedicato al calcolo delle forme esterne differenziali, essenzialmente dovuto all'opera di E. CARTAN. Le forme differenziali esterne altro non sono che forme esterne nelle quali fungono da indeterminate ξ^i i differenziali dx^i delle variabili $x^1, \ldots, x^n$; tali forme differenziali son quelle che appaiono sotto il segno d'integrazione negli integrali k-pli ($1 \leq k \leq n$) ordinari su varietà k-dimensionali entro lo spazio euclideo, o più in generale entro la varietà numerica $(x^1, \ldots, x^n)$. In questo capitolo vien considerata la fondamentale operazione di « differenziazione esterna » che fa passare da una forma differenziale ω_r di grado r ad una forma di grado $r+1$: $d\omega_r$ (secondo il simbolismo e la terminologia felicemente introdotti da E. KÄHLER, in contrapposto all'originaria denominazione di « derivazione esterna » secondo CARTAN); ed è stabilita la formula di GREEN-STOKES generale, trasformante l'integrale di ω_r sopra un r-ciclo nell'integrale di $d\omega_r$ sopra una varietà $(r+1)$-dimensionale contornata dall'r-ciclo, formula comprendente, com'è noto, varie formule classiche scalari e vettoriali. Son dati altresì il cosidetto teorema di POINCARÉ (sinteticamente espresso dalla uguaglianza: $dd\,\omega_r = 0$) e il teorema inverso, di validità locale. Di quest'ultimo teorema sono anzi fornite due dimostrazioni, la seconda delle quali poco nota, ma per più aspetti notevolissima, essenzialmente dovuta ad A. SZÜCS. È da notare che il teorema di POINCARÉ insieme a vari altri concetti attinenti agli integrali di forme differenziali di cui è cenno più oltre, sono dall'A. opportunamente rivendicati nel loro contenuto sostanziale a V. VOLTERRA, il cui nome è stato invece spesso dimenticato in trattazioni recenti.

Insieme all'operazione di differenziazione esterna, che l'A. chiama anche « differenziazione progressiva », è considerata (in relazione con l'operazione di aggiunzione di cui sopra si è detto) un'altra operazione denominata di « differenziazione regressiva », che fa passare da una forma ω_r di grado r ad una forma $\delta\omega_r$ di grado $r-1$; e sono stabiliti corrispondentemente risultati analoghi al teorema di VOLTERRA-POINCARÉ e al suo inverso. L'operatore δ, insieme all'operatore di LAPLACE su una forma, che può definirsi come combinazione lineare degli operatori simboleggiati da $d\delta$ e δd, sono stati notevolmente sfruttati in recenti lavori di G. DE RHAM, P. BIDAL, W. V. D. HODGE, ma appaiono precedentemente in L. E. J. BROUWER, R. WEITZENBOCK, e ancor prima in V. VOLTERRA.

In relazione alle operazioni sulle forme differenziali di cui si è fatto cenno, sono date varie proprietà locali e la classificazione delle forme secondo la terminologia di DE RHAM (forme chiuse, nulle od omologhe a zero, cochiuse, conulle, armoniche, ecc.).

Un ampio paragrafo è infine dedicato alla considerazione di forme differenziali di classe zero (vale a dire con coefficienti continui ma non necessariamente derivabili), e all'estensione a questo caso più generale dell'operazione di differenziazione esterna (progressiva), e di alcune regole fondamentali di calcolo, secondo un'idea affacciata da E. CARTAN e di recente sviluppata da P. GILLIS. I risultati del GILLIS sono riottenuti dall'A. più rapidamente mediante la considerazione di opportune funzioni razionali, che sostituiscono nella trattazione del GILLIS i polinomi approssimanti di STIELTJES-TONELLI.

Il terzo capitolo tratta due argomenti in certo senso complementari ma di grande interesse: la teoria dei sistemi di equazioni pfaffiane o, più in generale, alle forme differenziali, e la teoria degli invarianti integrali. Il concetto di varietà integrale, V, per un sistema di equazioni alle forme differenziali vien posto nella sua completa generalità e nel suo triplice aspetto: formale, per così dire; geometrico (cioè basato sulla nozione di faccetta integrale); e integrale (cioè basato sulla considerazione degli integrali multipli delle forme del sistema estesi alle varietà subordinate alla V). Son dati i concetti di sistemi algebricamente equivalenti, di anello differenziale determinato da un sistema, di sistemi chiusi rispetto all'operazione di differenziazione esterna, ecc., ed è stabilito il teorema di FROBENIUS che caratterizza i sistemi pfaffiani completamente integrabili come sistemi chiusi. Sono inoltre dati i teoremi di E. CARTAN sulla generazione delle varietà integrali mediante varietà caratteristiche ed è ulteriormente approfondito il caso delle equazioni pfaffiane. Non mancano i collegamenti con la teoria classica delle equazioni a derivati parziali e i sistemi completi, il metodo delle caratteristiche di CAUCHY, il metodo di LAGRANGE e CHARPIT, la teoria del moltiplicatore, ecc.

Il secondo argomento trattato nel capitolo, si apre con un rapido richiamo su alcuni concetti della teoria dei gruppi continui ∞^1, sulle trasformazioni infinitesime e sui loro rapporti con le forme differenziali e con il calcolo esterno. Se $U = \Sigma\, u_i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ è una trasformazione infinitesima, ed ω una forma differenziale di grado r nei differenziali dx^i, viene in particolare approfondito lo studio dell'operazione, già incidentalmente introdotta da E. CARTAN e dall'A. denominata di « elevazione a potenza simbolica U », che collega intrinsicamente alla ω la forma di grado $r-1$: $\omega^U = \Sigma\, u_i \dfrac{\partial\omega}{\partial(dx^i)}$. L'A. introduce inoltre il nuovo concetto di forma differenziale « principale » rispetto ad una trasformazione infinitesima, dicendo tale una forma ω che soddisfaccia all'equazione $U\omega = \left(\Sigma \dfrac{\partial u_i}{\partial x^i}\right) \omega$. Forme principali e forme invarianti rispetto ad U risultano legate dal fatto che, essendo μ un moltiplicatore dell'equazione $Uf = 0$, la forma $\mu\omega$ è invariante, e viceversa.

L'appropriato uso della suddetta operazione di elevazione a potenza simbolica, del concetto di forme principali e del prodotto regressivo, permette all'A. di svolgere in forma notevolmente originale la teoria degli invarianti integrali e di farne svariate applicazioni ai problemi di integrazione per sistemi di equazioni differenziali, in particolar modo per sistemi hamiltoniani.

Il quarto ed ultimo capitolo è dedicato alle applicazioni del calcolo differenziale esterno alla teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse e a varie generalizzazioni di questa. E' indubbiamente il capitolo più interessante del volume, perchè gli argomenti ivi trattati non avevano ancor ricevuto (se non che per una minima parte) esposizione trattatistica.

Il capitolo si apre con un ampio studio delle proprietà geometriche relative alla rappresentazione dello spazio euclideo complesso n-dimensionale sullo spazio euclideo reale S_{2n}, a $2n$ dimensioni. E' ben noto che questo studio, le cui origini risalgono a C. SEGRE e ad E. STUDY, è stato di recente notevolmente approfondito e posto alla base dello sviluppo della teoria delle funzioni di più variabili complesse, sopratutto per opera di F. SEVERI, di B. SEGRE e di W. WIRTINGER. Varietà caratteristiche e trasformazioni pseudo-conformi sono particolarmente considerate. Son date fra l'altro le caratterizzazioni geometrica (di B. SEGRE) e differenziale (di SEVERI) per le varietà caratteristiche, nonchè il teorema di STUDY-WIRTINGER che assegna le varietà caratteristiche nella categoria delle varietà di estensione minima di S_{2n}.

Il problema dell'integrazione multipla di vario grado sulle forme differenziali analitiche complesse è studiato nella sua generalità e son dati il teorema di CAUCHY-POINCARÉ col suo inverso di MORERA-SEVERI, e le loro estensioni. Sono altresì stabilite, per le funzioni analitiche di n variabili complesse, le formule integrali n-dimensionale e $(2n-1)$-dimensionale nella loro formulazione topologica più generale, e ne è dedotto il celebre teorema di HARTOGS sui campi di regolarità.

Un paragrafo è dedicato alle estensioni della teoria delle funzioni ad algebre ipercomplesse generali; sono ivi dati, fra l'altro, i recentissimi teoremi integrali di R. FUETER e di G. B. RIZZA per le funzioni cosidette monogene o regolari, nonchè il teorema integrale di RIZZA per le funzioni totalmente derivabili (secondo la terminologia di SPAMPINATO).

Gli ultimi due paragrafi sono infine dedicati alle geniali estensioni di natura funzionale, dovute a VOLTERRA, della teoria delle funzioni analitiche, e cioè i funzionali isogeni e i funzionali armonici coniugati, considerati in un ambiente euclideo. I concetti e i risultati esposti sono quelli classici di VOLTERRA (che costituiscono il nucleo concettuale donde han preso origine le più generali e approfondite ricerche di HODGE), ma son presentati dall'A. con il simbolismo e la tecnica moderni provenienti essenzialmente dal calcolo differenziale esterno e dal calcolo assoluto di RICCI e LEVI-CIVITA.

Il volume si chiude con i teoremi di minimo per i funzionali armonici e con l'impostazione dei relativi problemi di DIRICHLET. Siamo appunto alle soglie dei successivi sviluppi di HODGE, dei quali sarà trattato nel secondo volume dell'opera.

ENZO MARTINELLI

G. VITALI-G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, 3ª edizione. N. Zanichelli, Bologna 1952, pp. VIII+614.

Si tratta di un volume (appartenente alla collezione di Monografie di matematica applicata del Consiglio nazionale delle ricerche), delle cui precedenti edizioni abbiamo già avuto occasione di parlare (1), sul quale ritorniamo non tanto per segnarlo ai giovanissimi lettori di questo « Bollettino », ma perchè la nuova edizione, che risente dell'inesauribile fervore per la scienza dell'Autore, presenta parecchie interessanti novità.

Il piano dell'opera, che si inizia con le generalità sugli sviluppi in serie di funzioni ortogonali e sullo spazio hilbertiano, è quello stesso della seconda edizione, ma già il Cap. II, dedicato alle serie (trigonometriche) di *Fourier* è arricchito di tre nuovi paragrafi (10, 11, 12), che hanno come oggetto, rispettivamente, il fenomeno di GIBBS, una limitazione delle somme parziali della serie di FOURIER di una funzione a variazione limitata e due applicazioni: vale a dire il problema di FOURIER della temperatura stazionaria di una lastra piana indefinita e la nota proprietà isoperimetrica del cerchio, la cui dimostrazione, che si attiene all'ordine di idee di HURWITZ, è basata su alcuni notevoli teoremi della teoria delle funzioni di variabile reale e sulla formula di PARSEVAL.

Al Cap. III (sviluppi in serie di polinomi di LEGENDRE e di funzioni sferiche) che aveva formato oggetto di notevolissimi ampliamenti nella seconda edizione, segue il Cap. IV, dedicato ai polinomi di TCHEBYCHEF - LAGUERRE e di TCHEBYCHEF - HERMITE e al cui rinnovamento l'A. ha rivolto, in questa terza edizione, le maggiori cure. Mentre alla fine del § 2 è stato aggiunto un teorema di esistenza degli zeri dei polinomi ortogonali di TCHEBYCHEF, del tutto nuovo è il § 3 che contiene alcune notevoli limitazioni per gli zeri dei polinomi di TCH.-HERMITE e di TCH.-LAGUERRE.

Il contenuto dell'antico § 4 è distribuito nei nuovi §§ 5 e 6 che hanno come oggetto le formule di approssimazione asintotica rispettivamente per i polinomi di TCH.-HERMITE e per quelli di TCH.-LAGUERRE: nella rinnovata e ampliata trattazione della materia figurano i risultati originali che lo stesso SANSONE ha raggiunto in due recentissime Memorie della Mathematische Zeitschrift; è pure da rilevare, a proposito dei polinomi di TCH.-LAGUERRE, che la formula di KOGBELIANTZ viene indicata con la precisazione raggiunta da G. OTTAVIANI, e che viene richiamata l'attenzione del lettore sul complesso delle ricerche compiute da F. TRICOMI nell'ultimo decennio.

Alla fine del Cap. IV, senza accennare alle modificazioni arrecate alla trattazione dell'attuale § 10, è aggiunto il nuovo § 11 sulle serie di polinomi di

(1) Vedi questo « Bollettino »: Serie I, A. XV (1936), pp. 93-96; Serie III, A. II (1947), pp. 150-152.

LAGUERRE, che si chiude con un teorema di equicomportamento delle serie in questione con quelle (trigonometriche) di FOURIER, dovuto a ROTACH-SZEGÖ.

Riguardo al problema dell'approssimazione che, assieme a quello della interpolazione, forma oggetto del Cap. V, rileviamo che i teoremi di approssimazione di JACKSON (già noti per $\alpha = 1$) sono stabiliti nella nuova edizione per le funzioni $f(x)$ soddisfacenti a una condizione di LIPSCHITZ generalizzata: $| f(x_2) - f(x_1) | \leq L \, | x_2 - x_1 |^{\alpha}$, con $0 < \alpha \leq 1$.

Infine nel Cap. VI, dedicato all'integrale di STIELTJES, al termine del § 8 è indicata la costruzione di una successione di funzioni di ripartizione a scala, convergente uniformemente verso una funzione di ripartizione continua.

L'accuratissima bibliografia alla fine del volume è stata notevolmente ampliata in riferimento ai nuovi argomenti contenuti nella terza edizione, e pienamente aggiornata con l'indicazione delle pubblicazioni apparse in questi ultimissimi anni.

Le figure con cui, nella presente edizione, viene illustrato lo svolgimento della materia rendono anche più gradita la lettura dell'opera, di cui sono ben note le doti di brillante chiarezza e di efficace semplicità e gli altri pregi sui quali non ci ripetiamo (2); anche la veste tipografica è pienamente soddisfacente: a tal proposito vogliamo soggiungere, secondo il nostro modesto parere, che il lettore potrebbe desiderare che i titoli raggruppati al principio di ogni paragrafo fossero ripetuti all'inizio dei singoli capoversi.

SILVIO CINQUINI

LOTHAR HEFFTER, *Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie*, II. Aufl., Leipzig, B. G. Teubner, 1950, pp. 192, § 3.

La seconda edizione della presente opera differisce dalla prima, comparsa nel 1940, per numerosi piccoli miglioramenti e pochi mutamenti più sensibili; nulla però è mutato in confronto alla prima edizione per quanto riguarda la struttura del libro, il quale, ispirandosi alle ben note concezioni di Cayley e di Klein, si propone di mostrare come, dopo aver costruito la geometria proiettiva indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla questione delle parallele, si possono ad essa subordinare la geometria affine, la geometria euclidea e le geometrie non-euclidee. L'A., sviluppando a fondo questo programma di lavoro, vuol mettere in luce sopratutto la struttura logica dell'edifizio geometrico che così si viene a costruire; egli si diffonde perciò sulle premesse, sui loro mutui rapporti logici, sulle definizioni dei vari concetti che vengono via via introdotti, sui punti fondamentali della trattazione, sorvolando invece sui particolari e su tutto ciò che non è strettamente indispensabile per mostrare lo sviluppo logico della teoria. Il lettore è così assai spesso costretto a ricostruire da sè gli argomenti cui spesso l'A. soltanto accenna.

La prima parte contiene un'esposizione completa dei fondamenti logico-astratti della geometria proiettiva, assumendo come elementi primitivi il punto, la retta ed il piano; e distribuendo i relativi postulati nei tre gruppi usuali che si riferiscono rispettivamente alle nozioni di incidenza, d'ordine e di continuità. Il fatto che un tale sistema astratto di premesse trovi un'interpretazione nello spazio intuitivo dell'ordinaria geometria viene illustrato come com-

(2) Vedi luoghi cit. in (1).

plemento a sè, che non ha alcun peso sullo sviluppo logico ulteriore della teoria. A partire dalle premesse suesposte vengono introdotti in questa prima parte: le trasformazioni proiettive tra forme fondamentali di prima e di seconda specie mediante le operazioni di proiezione e di sezione; i vari principii di dualità; i gruppi armonici e le scale armoniche; i birapporti definiti mediante le scale armoniche; il teorema fondamentale della proiettività per forme di prima specie; le proprietà essenziali delle corrispondenze proiettive (omografie e reciprocità) tra forme di seconda e terza specie.

In una seconda parte, divisa in tre capitoli dedicati rispettivamente alle forme fondamentali di prima, di seconda e di terza specie, dopo aver introdotte le coordinate proiettive ordinarie od omogenee come birapporti, sia nel campo reale che nel campo complesso, si studiano le forme quadratiche (coppie di punti, coniche e quadriche) assegnandone una completa classificazione proiettiva insieme con le più notevoli proprietà.

In una terza parte, distinguendo nello spazio proiettivo un piano arbitrario come piano improprio, si pongono le basi di quella che l'A. chiama « Parallelgeometrie » e che coincide con l'usuale geometria affine. Concetti nuovi essenziali sono ora quelli di vettore e di rapporto semplice di tre elementi di una forma fondamentale di prima specie. Segue la classificazione delle forme quadratiche dal punto di vista affine.

Nella quarta parte, assegnando nel piano improprio una polarità assoluta con conica fondamentale priva di punti reali, si giunge alla « Orthogonalgeometrie », che è la geometria del gruppo delle similitudini; si può qui parlare di uguaglianza tra vettori e tra angoli qualsiasi, di coefficienti direttivi, di ortogonalità, di cerchi e di sfere, di funzioni goniometriche. La classificazione delle forme quadratiche viene rifatta in relazione con l'assoluto dello spazio.

La quinta ed ultima parte contiene la trattazione delle geometrie non-euclidee, le quali vengono subordinate alla geometria proiettiva, com'è ben noto, assegnando come « assoluto » una quadrica non specializzata rispettivamente a punti reali ellittici od a punti immaginari. Un primo capitolo contiene le nozioni fondamentali e la discussione dei vari tipi di movimenti non-euclidei; un secondo capitolo contiene un'estesa trattazione analitica delle due geometrie non-euclidee e dei loro vari tipi di grandezze geometriche; in un terzo capitolo si dànno le varie rappresentazioni dei piani e degli spazi non-euclidei sulla sfera, sulla pseudosfera, su una falda di iperboloide rotondo, su una regione finita (circolare o sferica) di spazio euclideo, ecc. Notevole, alla fine, la rappresentazione, dovuta all'A., dello spazio iperbolico che si ottiene sostituendo alla regione euclidea interna ad una sfera un intero spazio euclideo, e l'analoga rappresentazione dello spazio ellittico sulla regione euclidea interna ad una sfera.

E. G. TOGLIATTI

R. GANS, *Vektoranalxsis,* « B. H. Teubner Verlags Gesellschaft », Leipzig.

E' la 7ª edizione di un volumetto di poco più di cento pagine in cui si espongono, con molta chiarezza, le nozioni di calcolo vettoriale e di calcolo tensoriale necessarie per lo studio della meccanica e della fisica-matematica. Inoltre, specie nell'ultimo capitolo, vengono indicate le più importanti applicazioni del calcolo vettoriale alla fisica-matematica, sicchè il libro in esame costituisce una buona introduzione a questo ramo della scienza.

Ecco l'indice dei capitoli: 1°. Le operazioni elementari dell'analisi vettoriale; 2°. Le operazioni differenziali dell'analisi vettoriale; 3°. Coordinate curvilinee. Scomposizione dei campi vettoriali. Applicazioni alla Meccanica dei corpi rigidi; 4°. Tensori; 5°. Applicazioni all'idrodinamica e all'elettrodinamica.

DARIO GRAFFI

GEORGES REBOUL et JEAN-ANTOINE REBOUL: *Un axiome universel - Ses applications aux sciences expérimentales* (« Monographies des probabilités ». Fasc. VII). Paris, Gautier-Villars 1950, pp. XX+148. - Fr. 1300.

Nella introduzione (pag. XI) gli AA. enunciano il Principio che rappresenta il nucleo fondamentale che regge tutta la trattazione, Principio — dicono gli AA. — che nel dominio scientifico si ricollega a « *l'axiome éternel* » di TAINE: « *Tout changement fini de l'état d'un système est la somme intégrale de changements élémentaires uniquement régis par des lois de hasard* ».

Che questo principio-assioma sia veramente il nucleo fondamentale dell'opera gli AA. lo confermano rienunciandolo a pag. 15 — commentandolo quasi con identiche parole — e rienunciandolo ancora più avanti a pag. 37 con la variazione « *lois de probabilité* » in luogo di « *lois de hasard* ».

Sulla base di questo assioma gli AA. conducono lo studio su sistemi fisici, chimici e biologici, pensati come una collettività di individui (atomi, molecole, nuclei, ecc.), reali o ipotetici, fra i quali sono ripartiti « *les actifs quantifiés* » dei diversi fattori fisici (locuzione con cui gli AA. indicano sinteticamente le grandezze che intervengono attivamente nel fenomeno, espresse mediante una conveniente unità di misura: « *quantum* »).

Gli AA. stabiliscono le leggi fisiche, chimiche o biologiche che reggono l'equilibrio o l'evoluzione regolare di un sistema — cambiamenti di origine catastrofica esclusi, cioè esclusi i cambiamenti repentini e discontinui — seguendo sempre l'identico procedimento: assimilato il sistema ad una collettività di individui, modificano il loro stato di quantità infinitamente piccole scrivendo, in base a regole di probabilità — così dicono gli AA. — equazioni differenziali del tipo

$$\frac{dN}{N} = \sum_1^p \beta_i \frac{dU_i}{U_i} \qquad \text{o} \qquad \sum_1^p \beta_i \frac{dU_i}{U_i} = 0, \tag{1}$$

la cui integrazione fornisce la legge del fenomeno.

Il volume è diviso in undici capitoli; nei primi sei capitoli si ha la trattazione di carattere generale, negli altri applicazioni alla Fisica (Capp. VII, VIII, IX), alla Chimica (Cap. X) e alla Biologia (Cap. XI).

Gli AA. (Cap. III) fanno una distinzione, non molto chiara, fra *probabilità matematica* e *probabilità fisica*. Alla prima, rapporto fra il numero dN di individui colpiti ed il numero N di quelli che sono suscettibili di esserlo, è collegata — dicono — una idea di « *probabilité d'atteinte* », alla seconda, rapporto fra la variazione dU, corrispondente ad un cambiamento elementare, ed il valore primitivo U dell'« *actif* » al momento in cui si produce il cambiamento, è collegata un'idea di « *probabilité d'action* ». Quando si presentano sistemi in cui non è possibile ammettere equiripartizione degli « *actifs quantifiés* » dei diversi fattori fisici, gli AA. parlano di « *probabilités corrigées* » (Cap. IV). Le probabilità vengono corrette mediante coefficienti β_i definiti dalle relazioni

$$\frac{dN}{N} = \beta_i \frac{dU_i}{U_i}.$$

Il coefficiente di correzione β può essere costante, ma generalmente è funzione di N, U o di altre variabili; è lui che « *commande le mécanisme du phénomène et détermine la direction imprimée au hasard* ». Non è dunque più il caso che, con le sue leggi, governa il fenomeno, al caso, attraverso i coefficienti β_i, è possibile imprimere una particolare direzione.

Gli AA. fondamentalmente distinguono due tipi di caso (Cap. IV): « *hasard pur* » e « *hasard dirigé* », ma considerano anche (pagg. 34-35) gli « *hasards simples* », l'« *hasard normal* », l'« *hasard quelconque* ».

Nel Cap. V, dal titolo « *Relations de probabilité* », gli AA., per applicare i loro principi allo studio degli stati di equilibrio o all'evoluzione di un sistema formato da una fase con un solo costituente (i costituenti sono gli elementi che costituiscono i sistemi) sottomesso all'azione di parecchi fattori, supposti indipendenti, utilizzano l'enunciato seguente, che richiama quello del Principio dei lavori virtuali della Meccanica Razionale: « *Pour trouver les conditions d'équilibre ou d'évolution d'un système, on imprime aux facteurs physiques, supposés indépendants, des variations élémentaires virtuelles ou réelles et compatibles avec les liaisons. On écrit que la somme des probabilités correspondantes est nulle* ». L'espressione analitica di questo enunciato conduce, secondo i casi, ad una delle equazioni differenziali (1).

Gli AA. procedono poi a generalizzazioni, considerando più costituenti e poi più fasi e più costituenti.

Lo scoglio di tutta la costruzione consiste però nella determinazione dei coefficienti β_i di correzione della probabilità. Gli AA. stessi riconoscono che ciò rappresenta uno dei punti essenziali di ogni questione scientifica, poichè la conoscenza di questi coefficienti è indispensabile per stabilire la relazione di probabilità, la cui integrazione dà la soluzione del problema. Il lettore, a questo punto, si attende di vedere una questione così importante approfondita e trattata esaurientemente, gli AA. invece, fatto notare che questa determinazione « *théoriquement malaisée, est facilitée par l'utilisation des résultats d'expérience* », trattano il problema in sole due pagine. Parlano brevemente di una deteminazione sperimentale, con metodo algebrico e con metodo grafico, e di una determinazione teorica, relativamente alla quale si esprimono in questi termini: « *Cette détermination faite à partir des seules données du problème est, en général, difficile. Elle doit d'ailleurs être toujours contrôlée par les résultats de l'expérience* ».

Nel Cap. VI gli AA. considerano diverse maniere d'applicazione delle accennate relazioni di probabilità, vale a dire diverse maniere di applicazione del loro assioma universale.

Dalla lettura dell'opera si trae l'impressione che il ricorso alle nozioni di probabilità e di caso sia più formale che sostanziale e, essendo la determinazione dei coefficienti di correzione β_i appena sfiorata, resta il dubbio che le leggi fisiche e chimiche dedotte nei Capp. VII, VIII, IX, X siano state ottenute in quanto si conosceva *a priori* il risultato a cui si doveva pervenire.

GIUSEPPE VAROLI

V. THÉBAULT, *Les Récréations Mathématiques. (Parmi les nombres curieux)*, Paris Gauthiers-Villars, (1952), pp. VI+297.

I libri dedicati alle ricreazioni matematiche sono numerosi e per averne una quasi completa letteratura basta consultare « Inter. des Recher. Math. », Vol. 1, (1945), fasc. 4, p. 122; « Id. », Vol. 3, (1947), fasc. 9, p. 26; « Id. », Vol. 4., (1948), fasc. 14, p. 60.

Ora a tali libri si aggiunge quello di THÉBAULT con Note di BUQUET che, se si prescinde da questioni di aritmo-geometria e dall'equazione di PELL FERMAT, contiene quasi esclusivamente divertenti curiosità aritmetiche in buona parte oggetto di precedenti ricerche dello stesso THÉBAULT.

In questo libro destano vivo interesse i numerosi ed ingegnosi artifici e le perspicaci analisi e discussioni con cui si risolvono i problemi dei quali vi è una vera dovizia siano essi già risolti che da risolvere. In essi si ricercano quasi sempre numeri scritti in base 10, o in altre basi, godenti di particolari curiose proprietà, i quali mentre dilettano il giovane lettore lo addestrano per analoghe ricerche e per affrontare studi più impegnativi relativi alla teoria dei numeri.

Prendiamo a caso una di queste questioni: *Con le cifre* 1, 2, ..., 9, *prese ciascuna una volta, formare un numero intero che sia un quadrato.* Il THÉBAULT trova 30 soluzioni di cui per es. la minima e la massima sono:

$$11826^2 = 139854276 \quad , \quad 30384^2 = 923187456 .$$

Della analoga questione, quando ci si serve invece delle cifre 0, 1, ..., 9 il Sig. THÉBAULT dà 87 soluzioni quali ad es. la:

$$98802^2 = 9761835204 .$$

In apposite tabelle si danno poi le ultime 1, 2, 3 e 4 cifre dei quadrati degli interi N, le forme corrispondenti di N, e i quadrati degli interi da 1 a 1000 nei sistemi di numerazione di base 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 utili ad es. in ricerche analoghe a quelle del libro.

Si danno inoltre dei teoremi assai generali ed interessanti, ed alcuni anche sui numeri primi, e sono infine cercate classi particolari di numeri pitagorici cioè di numeri interi soluzioni della $X^2 = Y^2 + Z^2$.

Il Sig. BUQUET nella sua *Notes sur quelques cas simples d'aritmotriangulation* inserita nel libro, (ove anche il Sig. THÉBAULT dedica allo stesso argomento uno interessante capitolo), si serve di una idea assai feconda, del cosidetto *nocciolo dello aritmo-triangolo* che dà snellezza ed eleganza alla trattazione di alcune questioni di aritmo-geometria.

In un aritmo-triangolo, in un triangolo cioè con i lati razionali, $A_1A_2A_3$, sono tutti razionali i quadrati, i prodotti ed i quozienti rispettivamente di una o di due qualunque delle quantità: sen A_i, area, raggi dei cerchi exinscritti, inscritto o circoscritto e delle altezze. Il triangolo è *eroniano* quando una qualunque delle dette quantità è razionale. È affermato poi che nel caso generale di un qualsiasi aritmo-triangolo esiste un intero $J = p_1 p_2 \cdots p_n$, con p_i numeri primi distinti, tale che il prodotto di $\sqrt{J}$ con ciascuna delle dette quantità è razionale. Il numero *J è detto appunto il nocciolo dell'aritmo-triangolo.*

Utilizzando questa proprietà del nocciolo ed elementari formule trigonometriche si trovano in maniera semplicissima e rapida tutti i triangoli eroniani; gli aritmo-triangoli aventi un angolo di 60° o di 120°; i triangoli eroniani; i triangoli eroniani (detti bieroniani) aventi razionali anche le bisettrici e le distanze dei vertici dai centri dei cerchi inscritto ed exinscritti; e i quadrilateri eroniani.

In generale *aritmo-poligono* è un poligono i cui lati e diagonali sono razionali, se poi anche la sua area è razionale il poligono vien detto invece *eroniano.* La Nota del Sig. BUQUET contiene appunto la determinazione di poligoni eroniani inscrittibili.

Seguendo poi altra via si stabiliscono formule parametriche che dànno i lati e le diagonali di un aritmo-parallelogramma e di un quadrilatero eroniano avente tre vertici allineati. Con questi risultati ed a mezzo di una trasformazione per raggi vettori reciproci si tratta in un secondo modo la questione relativa ad un aritmo-quadrilatero inscrittibile. Questa stessa trasformazione geometrica ed un'altra sono infine sfruttate per dedurre da un aritmo-quadrilatero un secondo aritmo-quadrilatero.

Un'interessante osservazione è la seguente.

Se a, c, d, f, b, e sono i lati e le diagonali di un aritmo-quadrilatero inscrittibile, i numeri $X, Y, \ldots, X', Y', \ldots$ dati da

$$X,\ Z = a + b \pm c \mp d + e \mp f; \qquad Y,\ T = \pm a - b \mp c \mp d - e \pm f;$$
$$X',\ Z' = \pm a - b \pm c \pm d + e \pm f; \qquad Y',\ T' = \pm a + b \pm c \pm d - e \mp f;$$

soddisfano all'eguaglianza multigrada

$$X^n + \ldots + T^n = X'^n + \ldots + T'^n$$

per $n = 1, 2, 3, 5$, essendo inoltre $\Sigma X = \Sigma X' = 0$.

Si sarebbe potuto invertire quest'ultimo teorema ed avere una proposizione forse più interessante della diretta.

Dobbiamo rilevare che in questa Nota del Sig. BUQUET, che pure ha tanti pregi, come nell'altra sua relativa all'equazione di PELL-FERMAT, in cui il lettore è messo rapidamente in condizione di stabilire le formule che danno tutte le soluzioni intere della $X^2 - DY^2 = 1$ e della $X^2 - DY^2 = -1$, (quando quest'ultima è possibile), se in entrambi i casi D è positivo e non quadrato, non vi è nessuno riferimento bibliografico, mentre sarebbe stato opportuno ricordare LAGRANGE per quest'ultima equazione ed almeno EULERO, KUMMER, GAUSS e NEWTON per l'aritmo-geometria.

I risultati trovati da quest'ultimi con relative indicazioni bibliografiche ed altre numerose ed interessanti notizie riguardanti l'aritmo-geometria sono riportati in L. E. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, II, (New York, 1934), pp. 191-224.

Le lievi imperfezioni rilevate ed altre egualmente lievi potranno essere eliminate dagli Autori in una successiva edizione che siamo certi non mancherà, perchè l'opera nel suo complesso è assai interessante e di piacevole lettura.

GIUSEPPE PALAMÀ

LÉONARD DE PISE. *Le livre des nombres carrés*, tradotto da Pael Ver Eeeke-Desclée de Brouwer et C. Bruges 195·.

Il *Liber Quadratorum* di FIBONACCI fu scritto nel 1225 e ritrovato e pubblicato da B. BONCOMPAGNI nel 1856. Il libro è dedicato a Federigo II, che teneva la sua corte a Pisa, e nella dedica cita un problema proposto da Giovanni da Palermo: trovare un numero quadrato tale che aumentato o diminuito di cinque dia ancora un numero quadrato.

La traduzione del Ver Eecke è fatta letteralmente dal latino e fatta ottimamente. Vogliamo qui citare i problemi fondamentali trattati da Fibonacci.

La I proposizione si può tradurre, in termini moderni, nella relazione

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2;$$

Fibonacci dà la relazione $9+(1+3+5+7)=9+16=25=5^2$ e procede fino a ottenere 81, 121, 144 ecc. Altrettanto dimostra nella II proposizione mostrando che partendo dall'unità sommando i numeri dispari fino all'infinito si hanno sempre numeri quadrati.

Nella prop. III dimostra che la somma di due quadrati è uguale alla somma di altri due quadrati e trova i numeri

$$\left(10+\frac{2}{5}\right)^2+\left(7+\frac{4}{5}\right)^2=169=12^2+5^2.$$

Nella prop. IV dimostra che se

$$a^2+b^2=m^2 \quad , \quad g^2+d^2=n^2$$

si ha

$$(a^2+b^2)\times(g^2+d^2)=(mg)^2+(md)^2$$

Nella prop. V trova un quadrato uguale alla somma di due quadrati, mentre nella prop. VI trova due numeri quadrati la cui somma è uguale a due numeri quadrati.

Nella prop. VI dimostra che

$$6[1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2]=6 \text{ per la somma dei quadrati}$$

e in particolare espone che

$$6(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=6\times 55\,.$$

Nella prop. VIII dimostra, scrivendo in termini moderni,

$$(2n-1)(2n+1)[(2n-1)+(2n+1]=12(1^2+3^2+5^2+$$
$$+\dots+(2n-3)^2+(2n-1)^2)\,,$$

mentre nella IX mostra che se a e b sono primi tra loro e $a+b$ è un numero pari, si ha

$$ab(a+b)(a-b)=\text{multiplo di } 24\,.$$

Nella prop. X dimostra che

$$1+2+3+5+6+7=4\times 6=24,$$

$$1+3+5+9+11+13=7\times 6=42,$$

mentre nella XI prova che

$$y^2+n=z^2 \quad , \quad y^2-n=x^2 \quad , \quad y^2=x^2+n\,.$$

Nella XIV risolve il problema di Giovanni di Palermo

$$x^2+5=y^2 \quad , \quad x^2-5=z^2$$

e trova i numeri

$$\left(2+\frac{7}{12}\right)^2+5=\left(3+\frac{5}{12}\right)^2, \qquad \left(\frac{31}{12}\right)^2-5=19^2.$$

Nella XV espone che se la somma di due numeri è pari, il rapporto tra la somma è la differenza è dato da

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{a}{b}.$$

Nella prop. XVI tratta un problema indeterminato nella forma

$$x^2+x=y^2 \quad , \quad x^2-x=z^2$$

e trova i numeri

$$\frac{625}{576}+\left(1+\frac{1}{24}\right)=\left(1+\frac{11}{24}\right)^2 \qquad \frac{625}{576}-\left(1+\frac{1}{24}\right)=\left(\frac{5}{24}\right)^2.$$

Nella prop. XVII espone il problema, scritto in termini moderni,

$$(2n+5)^2-(2n+3)^2=8+(2n+3)^2-(2n-1)^2,$$

mentre nella XVIII trova che

$$\frac{x^2-y^2}{t^2-z^2}=\frac{m}{n},$$

e dà la soluzione

$$\frac{30^2-27^2}{33^2-30^2}=\frac{19}{21}.$$

Nella prop. XIX mostra che

$$x^2+y^2=z^2 \quad , \quad z^2+t^2=u^2,$$

e determina i numeri

$$13^2+84^2=85^2,$$

$$85^2+3612^2=7225+13046544=3615^2.$$

Nella prop. XX stabilisce un problema indeterminato

$$x+y+z+x^2=l^2 \quad , \quad l^2+y^2=m^2 \quad , \qquad m^2+z^2=n^2$$

e trova i numeri

$$1295+\left(4566+\frac{6}{7}\right)+\left(11417+\frac{1}{7}\right)+79920+1.95^2=1332^3,$$

$$1332^2+\left(4566+\frac{6}{7}\right)^2=\left(12368+\frac{1}{7}\right)^2,$$

$$\left(12368+\frac{1}{7}\right)^2+79920^2=\left(80875+\frac{3}{7}\right)^2.$$

Paul Ver Eecke dà molte note esposte molto bene e spiega con facilità le espressioni latine di Fibonacci; il traduttore merita quindi molta stima.

Il Liber quadratorum è un primo trattato sulla teoria dei numeri, però Fibonacci non conosceva l'opera di Diofanto, che rappresenta l'algebra dei Greci intorno al III secolo, quindi l'opera di Fibonacci è da ritenersi come originale.

AMEDEO AGOSTINI