Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* UMI, Bibliografia Matematica Italiana, vol. I, Perrella, Roma, 1951 (Beniamino Segre)
* J. C. Burkill, The Lebesgue Integral, Cambridge University Press, Cambridge (Giovanni Sansone)
* R. L. Jeffery, The theory of functions of a real variable, Toronto University Press, Toronto, 1951 (Giovanni Sansone)
* E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Clarendon Press, Oxford,1951 (Giovanni Sansone)
* Balth. Van Der Pol, E. Bremmer, Operational Calculus, Cambridge University Press, Cambridge, 1950 (Dario Graffi)
* D. Voelker, G. Doetsch, Die Zweidimensionale Laplace Transform, Birkhäuser, Basel, 1950 (Dario Graffi)
* N. W. Mc Lachlan, P. Humbert, Formulaire pour le calcul symbolique-Mémorial desSciences Mathématiques, fasc. C; N. W. Mc Lachlan, P. Humbert, L. Poli, Supplément au Formulaire pour le calcul symbolique-Mémorial desSciences Mathématiques, fasc. CIII (Dario Graffi)
* S. Bergman, The kernel function and conformal mapping, American Mathematical Society,1950 (Gaetano Fichera)
* H. Rutishauser, A. Speiser, E. Stiefel, Programmgesteuerte digitale Rechengeräte, Birkhäuser, Basel, 1951 (Manlio Mandò)
* B. Baule, Die Mathematik des Naturforshers und Ingenieurs, Verlag S. Hirzel, Leipzig e Zürich, 1950-51 (Maria Josepha de Schwarz)
* W. L. Ferrar, Finite Matrices, Oxford University Press, Oxford, 1951 (Roberto Conti)
* H. L. Hamburger, M. E. Grimshaw, Linear Transformations in n-dimensional Vector Space, An Introduction to the Theory of Hilbert Space, Cambridge University Press, Cambridge, 1951 (Roberto Conti)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 71–86.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_71_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Questioni proposte.

1. Soluzione generale del sistema

$$\begin{aligned}
A_1^2,\ A_2^2,\ A_3^2,\ A_4^2,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4 &\overset{6}{=} C_1^2,\ C_2^2,\ C_3^2,\ C_4^2,\ D_1,\ D_2,\ D_3\ D_4\\
A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4 &\overset{n}{=} C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \qquad (n = 2,\ 4,\ 6)\\
B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4 &\overset{3}{=} D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4.
\end{aligned}$$

Esempio $A_1 = 5$, $A_2 = 14$, $A_3 = 23$, $A_4 = 24$, $B_1 = 38$, $B_2 = 222$, $B_3 = 407$, $B_4 = 659$, $C_1 = 2$, $C_2 = 16$, $C_3 = 21$, $C_4 = 25$, $D_1 = 87$, $D_2 = 134$, $D_3 = 467$, $D_4 = 638$.

2. Dare le soluzioni in numeri del sistema

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2, \qquad A^4 + B^4 + C^4 = D^4 + E^4 + F^4.$$

ALFREDO MOESSNER

RECENSIONI

U. M. I.: *Bibliografia Matematica Italiana*, vol. I (Roma, Perrella, 1951), pp. XI+151, L. 1000.

Col presente volume, l'Unione Matematica Italiana inizia una pubblicazione periodica che riuscirà utilissima agli studiosi in Italia ed all'estero. Essa può venire ricollegata idealmente all'opera famosa del RICCARDI portante lo stesso titolo, arrestatasi ai primi anni dell'800, e si propone di elencare e classificare d'ora innanzi anno per anno le varie pubblicazioni di carattere matematico che vanno comunque apparendo in Italia.

Questo volume, curato con estrema diligenza e competenza dal Prof. ALFREDO PERNA, si riferisce ai lavori editi nell'anno solare 1950 o nell'anno accademico 1949-50, e mette in luce la vastità e l'importanza del contributo matematico italiano durante periodo sì breve.

Nelle prime tre delle cinque parti di cui esso si compone, trovansi rispettivamente menzionati note e memorie, libri ed opuscoli (eccettuati i testi per le scuole secondarie), e recensioni, suddivisi in sette sezioni: I) Storia, Filosofia, Didattica. Matematiche elementari; II) Aritmetica ed Algebra. Teoria dei numeri; III) Analisi e Calcolo delle probabilità; IV) Geometria; V) Meccanica, Fisica matematica; VI) Astronomia; VII) Matematica applicata. Qualche lavoro figura eccezionalmente in due o più sezioni, con opportuni rinvii. La quarta parte dà notizie sull'attività di Centri di studi e di Seminari, nonchè sui più importanti Congressi e Convegni tenuti in Italia od all'estero, di cui qualche cenno sia apparso in periodici italiani. La quinta parte concerne commemorazioni e necrologie.

Precede un elenco delle abbreviazioni, e seguono tre indici alfabetici. La presentazione tipografica è eccellente.

BENIAMINO SEGRE

J. C. BURKILL, *The Lebesgue Integral*, « Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics », N. 40. General Editor W. V. D. Hodge, (« Cambridge University Press », 12*s*, 6*d*), pp. VII+87.

L'A. nella sua chiara e rapida trattazione dell'integrale di Lebesgue ha preferito attenersi al classico schema di « Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire » (1916) di Ch. J. De La Vallée - Poussin, esponendo nei primi due capitoletti i fondamenti della teoria degli insiemi di punti e la loro misura euclidea. Con l'uso dell'assioma delle scelte di Zermelo, seguendo la scia del primo esempio di Vitali (1905), costruisce poi un insieme di punti non misurabile secondo Lebesgue.

Nel Cap. III l'integrale di Lebesgue $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x) \geq 0$, $f(x)$ limitata, è definito come la misura superficiale dell'insieme di punti (x, y), $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$; seguono la sommabilità, l'integrazione in intervalli infiniti e i teoremi sul passaggio al limite sotto il segno integrale.

Nel Cap. IV domina l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue e la derivabilità quasi dappertutto delle funzioni a variazione limitata e nel Cap. V, sempre per via geometrica, è data la definizione di integrale delle funzioni di due o più variabili e il teorema di riduzione di Fubini. Nel Cap. VI, ancora per via geometrica, sono definiti l'integrale di Lebesgue - Stieltjes rispetto ad una funzione monotona e successivamente i due integrali $\int f d\varphi$, $\int f\,|d\varphi|$ con φ a variazione limitata. I teoremi di integrazione per parti e per sostituzione chiudono questo capitolo.

L'A. alla fine di ogni capitolo propone alcune questioni che si riferiscono a risultati assai importanti già acquisiti nella teoria delle funzioni di variabile reale quali il teorema di Egoroff - Severini sulle successioni convergenti, la non integrabilità secondo Lebesgue della funzione $d\left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\right)/dx$, la condizione necessaria e sufficiente di integrabilità di una funzione limitata secondo Mengoli - Cauchy - Riemann, l'integrazione di ordine reale. Alcune delle questioni proposte sono poi chiarite nelle ultime otto pagine del volume.

L'A., ben noto per l'introduzione nell'Analisi del considetto integrale di Burkill, con assoluta padronanza della materia ferma l'attenzione del lettore sui punti essenziali della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue e dà un ottimo orientamento per lo studio dei Trattati.

GIOVANNI SANSONE

R. L. JEFFERY: *The theory of functions of a real variable*, (1951, Toronto University Press, Canada), pp. XIII + 232, Dollari 6.

Il volume è il sesto di una collezione pubblicata sotto gli auspici dell'Università di Toronto ed è diretto sia ai giovani che dopo aver seguito un corso istituzionale di Analisi vogliono orientarsi nella moderna teoria delle funzioni di variabile reale, sia a coloro che nei corsi di statistica, di fisica e di matematica applicata trovano frequenti riferimenti alla teoria delle funzioni di variabile reale.

Richiamate le nozioni sui numeri razionali e sui numeri reali come sezioni nel campo reale, i primi quattro capitoli sugli insiemi e le funzioni, sulla misura degli insiemi, sull'integrale di Lebesgue e sulle sue proprietà, procedono secondo le linee della trattazione classica che è da ritenersi anche la più idonea per una sicura conoscenza dei vari argomenti.

È da notarsi nel quarto capitolo la dimostrazione del famoso teorema ergodico di G. D. BIRKHOFF (1931) sulla media degli integrali $f_0(x)$, $f_0(Tx), \ldots$ $f_0(T^n x), \ldots$ dove $f_0(x)$ è una funzione sommabile in un insieme A e T è una trasformazione che conserva la misura e cangia A in sè stesso.

I capitoli da 5 a 7 sono dedicati alle funzioni a variazione limitata, alla derivazione degli integrali, alle funzioni derivate, al problema della ricerca della funzione primitiva; il capitolo 8 all'integrale di RIEMANN-STIELTJES, alla rappresentazione dei funzionali lineari continui con tali integrali ed alle nozioni di misura e di distribuzione secondo L. SCHWARTZ.

Ogni capitolo è preceduto da un adeguato sommario e il volume termina con l'indice bibliografico e con quelli della materia e degli autori.

Il testo è di facile lettura e l'A. ha pienamente raggiunto gli scopi didattici che si era prefisso nel redigerlo.

GIOVANNI SANSONE

E. C. TITCHMARSH: *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford, (at the Claredon Press, 1951; 40 s.) pp. 1-346.

E. C. Titchmarsh, trattatista di chiara fama, che in quest'ultimo periodo ha dato alla matematica i volumi « The Theory of Functions » (1ª ed. 1932, 2ª ed. 1939) « Eigenfunction expansions associated with second order differential equations » (1945), « Introduction to the theory of Fourier integrals » (1ª ed., 1937, 2ª ed. 1948), ricchi di contenuto, sempre aggiornati ed in molti punti originali, presenta ora agli studiosi « The Theory of the Riemann Zeta-function » che ha la sua premessa nel Cambridge Tract n. 26 « The zeta-function of Riemann » del 1930, esaurito in pochissimo tempo, di cui questo volume può considerarsi una naturale e poderosa integrazione.

Se sfogliando il libro un lettore frettoloso può a prima vista pensare che nelle questioni trattate prevalgano gli sviluppi formali, successivamente, quando egli avrà valutato l'importanza dei risultati raggiunti, la finezza dei ragionamenti e i sottili accorgimenti richiesti in tante questioni di valutazione asintotica, resterà ammirato della potenza del genio matematico che passo a passo, con costante tenacia, sa attaccare i problemi più ardui, sa lumeggiarli e riducendo le difficoltà sa indicare le vie da percorrere per avvicinarsi alle mete.

Il primo capitolo riguarda la funzione $\zeta(s)$, $(s = \sigma + it)$ di Riemann; le serie di Dirichlet associate di $1/\zeta(s)$, $\zeta'(s)/\zeta(s)$, $\zeta^k(s)$, $\zeta^k(s)/\zeta(2s)$, $\zeta(2s)/\zeta(s)$ ed alcuni collegamenti con le funzioni aritmetiche $d(n)$, $\sigma_\alpha(n)$, $\mu(n)$ e le somme $c_k(n)$ di Ramanujan.

Il cap. 2° sul carattere analitico di $\zeta(s)$ contiene sette dimostrazioni diverse dell'identità funzionale $2^s\pi^{s-1} \operatorname{sen} \frac{1}{2} s\pi \,\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = \zeta(s)$, il 3° capitolo sul teorema di Hadamard e de la Vallée Poussin dà la classica formula $\pi(x) \backsim x/\log x$ e le formule per la valutazione asintotica di $\sum\limits_{p<x} (\log p)/p$; il quarto sull'equazione funzionale approssimata di Hardy-Littlewood e di Siegel dà la formula

$$\zeta(s) = \sum_{n<x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n\leq y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(|t|^{1/2-\sigma} y^{\sigma-1})$$

$$\chi(s) = \left(2^{s-1}\pi^s \sec \frac{1}{2} s\pi\right) / \Gamma(s), \quad 2\pi xy = |t|.$$

Nel capitolo quinto sono esposti i metodi di H. Weyl, Hardy e Littlewood, Van der Corput e dello stesso Titchmarch per la valutazione di $\zeta(s)$ sulla retta critica $\sigma = 1/2$, con la formula $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{1/6} \log^{3/2} t)$ e richiamati altri risultati di Walfisz, Titchmarsh, Phillips, Min. Nel capitolo sesto, col metodo di Vinogradoff, viene stabilita la formula $\zeta(1 + it) = O\,\{(\log t \text{ loglog } t)^{3/4}\}$ sulla retta $\sigma = 1$. Nel capitolo settimo, sui teoremi di media, l'A. col metodo di Atkinson dà la formula $\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt = T \log T + (2\gamma - 1 - \log 2\pi)T + O(T^{1/2+\varepsilon})$; e l'altra di Hardy e Littlewood $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^4 dt = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}$ $(\sigma > 1/2)$. Segue col metodo di Titchmarsh la valutazione dell'integrale

$$J(\delta) = \int_\delta^\infty |\zeta(\sigma + it)|^{2k} e^{-\delta k} dt \quad \text{per} \quad \delta \to O.$$

Il cap. ottavo riguarda i cosiddetti teoremi Ω. Convenendo che il simbolo Ω nella relazione $F(t) = \Omega(\Phi(t))$ abbia il significato che qualunque sia la costante A esistono valori di t maggiori di qualsiasi valore prefissato per i quali $|F(t)| > A\Phi(t)$, sussistono i teoremi di Bohr e Landau

$$\zeta(1 + it) = \Omega\,(\text{loglog } T), \; 1 / \zeta(1 + it) = \Omega(\text{loglog } T).$$

Nel cap. nono, sulla distribuzione degli zeri di $\zeta(s)$, indicando con $N(T)$ gli zeri di $\zeta(s)$ appartenenti alla regione $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 < t \leq T$, si dimostra la formula di R. Backlund

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T).$$

Indicando poi con $N(\sigma, T)$ il numero degli zeri $\beta + i\gamma$ di $\zeta(s + it)$ nella regione $\beta > \sigma$, $0 < t \leq T$, per $\sigma > 1/2$ vale la formula $N(\sigma, T) = O(T)$; altre formule sono ottenute indipendentemente dalla congettura di Riemann.

Il capitolo decimo è dedicato alla celebre congettura di Riemann che gli zeri di $\zeta(s)$ hanno la loro parte reale uguale ad 1/2. Premessa una ricostruzione di natura euristica dei probabili ragionamenti di Riemann, l'A. dà due metodi differenti per dimostrare il famoso teorema di Hardy (1914) che la $\zeta(s)$ di Riemann possiede infiniti zeri sulla retta critica $\sigma = 1/2$; segue il teorema di Hardy e Littlewood (1921), $N_0(T) > AT$, dove $N_0(T)$ è il numero degli zeri di $\zeta(s)$ della forma $s = 1/2 + il$, $0 < t \leq T$ e il teorema di Selberg (1942) $N(T) > AT \log T$.

Il cap. undicesimo riguarda le ricerche di Bohr, Courant, Jessen, Landau, van Kampen, Wintner sulla distribuzione dei valori di $\zeta(s)$. Qui ricordiamo uno dei più significativi risultati: la $\zeta(s)$ prende qualsiasi valore, zero eccettuato, infinite volte nella striscia di piano $1 < \sigma < 1 + \delta$.

Nel cap. dodicesimo è trattata la valutazione asintotica della funzione $D_k(x) = \sum_{n \leq x} d_k(n)$, dove $d_k(n)$ indica il numero delle scomposizioni distinte dell'intero positivo n nel prodotto di k fattori positivi. Dalla formula

$$D_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta^k(w) \frac{x^w}{w} dw, \; (c > 1),$$

si deduce $D_k(x) = xP_k(\log x) + \Delta_k(x)$ dove P_k è un polinomio di grado $k-1$ in $\log x$, e il problema è quello di determinare il minimo valore positivo α_k per il quale $\Delta_k(x) = O(x^{\alpha_k+\varepsilon})$ qualunque sia il numero positivo ε. Vale la limitazione $\alpha_k \leq (k-1)/k$, $(k = 2,3, \ldots)$; per $k = 2$ sussiste la limitazione di Van der Corput $\alpha_2 \leq 27/82$, e per $k = 3$ l'A. ricorda la limitazione di Atkinson $\alpha_3 \leq 37/75$.

I capp. 13 e 14 sono dedicati ad alcune conseguenze che possono ricavarsi dall'ipotesi di Riemann e da quella meno restrittiva di Lindelöf $\zeta(\sigma + it) = O(t^\varepsilon)$ per qualsiasi numero positivo ε e per ogni $\sigma \geq 1/2$.

Nel cap. quindicesimo, ed ultimo del volume, è descritto un metodo per il calcolo numerico degli zeri di $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$. I calcoli di Gram e successivamente di Comrie sono stati spinti fino al 1041° zero, ottenendo per le ordinate degli zeri la limitazione $0 < t < 1468$ ma l'A. osserva che « ... l'ipotesi di Riemann non può esser provata dai calcoli, però, se essa fosse falsa, ciò potrebbe esser provato dalla scoperta di un caso eccezionale ».

Questa la trama del volume che, in forma piana ed elegante, in 332 pagine di testo, mostra al lettore tante scoperte dovute ai più famosi matematici di tutte le nazioni; tali scoperte, che onorano la memoria immortale di Riemann, formano ora una delle più belle costruzioni della moderna matematica.

GIOVANNI SANSONE

BALTH. VAN DER POL E H. BREMMER: *Operational Calculus*. Cambridge University Press (1950).

Questo trattato appare veramente soddisfacente, sia nello sviluppo dei fondamenti teorici del calcolo operazionale, sia nell'esposizione delle sue applicazioni. Del resto gli Autori sono ben qualificati per scrivere un libro sul predetto argomento; essi infatti hanno esplicato ed esplicano attività tecnica, come hanno saputo compiere ricerche in cui occorrono elevate nozioni di matematica. Si ricordi, ad esempio, che Van der Pol è il fondatore della meccanica non-lineare.

Nel presente volume il calcolo operazionale viene giustificato mediante la trasformazione di Laplace bilatera ossia la trasformata $f(p)$ della funzione $h(t)$ è data dalla formula ($h(t)$ e $f(p)$ sono chiamate, rispettivamente, originale e immagine):

$$f(p) = p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} h(t) dt \; ; \tag{1}$$

il fattore p è aggiunto per ragioni di comodità. La trasformata bilatera, che è l'inversa della trasformata di Fourier, offre il vantaggio di poter esporre i teoremi del calcolo operatorio in forma molto semplice. La trasformata bilatera si trova, in sostanza, applicata al calcolo operazionale anche nelle classiche ricerche compiute fin dal 1903 e 1905 dal Giorgi (ricerche purtroppo non citate nel presente volume), ma non però con l'ampiezza del trattato in esame, che perciò si differenzia da quelli del Doetsch, Ghizzetti ed altri che si fondano principalmente sulla trasformata unilatera in cui, come è notissimo, si pone 0 in luogo di $-\infty$ nell'integrale di (1). Del resto basta porre $h(t) = h(t)U(t)$ ($U(t) = 0$ per $t < 0$, $U(t) = 1$ per $t > 0$) affinchè la trasformazione unilatera rientri come caso particolare nella bilatera.

Perciò, nei primi tre capitoli, dopo una breve introduzione, si espongono le proprietà fondamentali della trasformazione bilatera (rimandando ad altri trattati come quello del Doetsch le dimostrazioni più complesse) e si calcolano le trasformate delle funzioni più comuni. Nel quarto capitolo sono esposte le più elementari relazioni fra le immagini, come quella del prodotto di composizione del differenziale (cioè l'immagine di $\frac{dh(t)}{dt}$ uguale a $pf(p)$) etc., relazioni su cui è fondata la pratica del calcolo operatorio. Un buon numero di esempi, opportunamente scelti, chiariscono gli sviluppi teorici.

Nel quinto capitolo vi è una trattazione molto larga (anche se, forse, non definitiva dal punto di vista matematico) della teoria delle funzioni impulsive. Queste funzioni, la cui importanza nelle applicazioni appare sempre più crescente, e che sono assai comode nel calcolo operatorio, vengono introdotte, molto opportunamente, come limiti di funzioni ordinarie. La considerazione delle funzioni impulsive di ordine superiore (derivate, in senso ampio, della funzione impulsiva ordinaria) i richiami storici, gli esempi, rendono la lettura di questo capitolo assai attraente.

Il capitolo successivo è dedicato a diverse questioni sulla convergenza dell'integrale della (1) e sulla biunivocità della corrispondenza fra una funzione e la sua immagine, mentre nel capitolo VII si passa ai teoremi detti Abeliani e Tauberiani, che, nel caso della trasformata unilatera, permettono di conoscere i valori dell'originale per $t = 0$ e $t = \infty$ da quelli dell'immagine per $p = \infty$ e per $p = 0$. Dopo aver precisato questi teoremi, vengono stabilite le utili relazioni fra gli sviluppi in serie, effettivi e assintotici, della originale e della sua immagine; si considera, in particolare, il teorema di espansione di Heaviside e si indicano altri metodi per invertire la (1).

A questo punto si iniziano le applicazioni del calcolo operatorio; nel capitolo VIII e IX vengono trattate le equazioni e i sistemi di equazioni differenziali, lineari, a coefficienti costanti, in vista specialmente della teoria, esposta in modo completo, dei transienti nei circuiti elettrici. Segue (capitolo X) lo studio delle equazioni differenziali lineari con coefficienti potenze della variabile che possono risolversi mediante il calcolo operatorio (tenendo presente che la derivata rispetto a p di $f(p)$ è l'immagine di $th(t)$); varie proprietà delle funzioni interessanti la fisica-matematica (come ad es. le funzioni di Bessel) vengono esposte opportunamente coordinate. Nel capitolo IX si ritorna alla teoria perchè si deducono regole per conoscere, in base ad $h(t)$, l'immagine della funzione ottenuta da $f(p)$ ponendo in luogo di p una funzione di p o l'immagine, in base a $f(p)$, di una funzione ottenuta da $h(t)$ ponendo in luogo di t una funzione di t. Interessante la relazione fra l'immagine $f\left(\frac{1}{p}\right)$ ed $h(t)$, relazione dovuta al Van der Pol, che ne ha fatto una bella applicazione alla teoria dei filtri d'onda. Nel capitolo successivo si studiano le trasformate di particolari funzioni, che conducono, anche, ad importanti risultati nella teoria dei numeri.

Segue l'applicazione del calcolo operatorio alla soluzione di equazioni alle differenze finite e di equazioni integrali. Nel capitolo XV si studiano, col calcolo operatorio in una variabile, le equazioni derivate parziali; il lettore, però, desidererebbe un maggior numero di questioni trattate. Infine si considera la trasformazione multipla bilatera di Laplace (in particolare bidimensionale) di cui si indicano varie applicazioni, specie la ricerca di soluzioni di equazioni a derivate parziali. In questo caso però, a differenza del recente libro del Doetsch, si calcolano le soluzioni delle equazioni derivate parziali che rappresentano le loro funzioni di Green, senza preoccuparsi delle condizioni al contorno. Chiudono il libro una raccolta di regole per usare il calcolo operatorio ed una raccolta di relazioni fra originali ed immagini cioè, conforme al linguaggio degli Autori, una grammatica ed un vocabolario sul calcolo operatorio.

Il trattato è scritto con molta chiarezza: esso sarà perciò utilissimo ai cultori di matematica applicata che desiderano conoscere il calcolo operatorio non soltanto nel suo uso, ma anche nei suoi fondamenti.

Termino notando che concordo perfettamente con gli Autori circa la rivendicazione dei meriti di Heasivide (io vorrei aggiungere anche quelli del Giorgi) nel calcolo operatorio e in tante altre questioni della fisica matematica. Se Heaviside e Giorgi, qualche volta non si preoccupano del rigore matematico, è indubbia la loro genialità.

DARIO GRAFFI

D. VOELKER E G. DOETSCH: *Die Zweidimensionale Laplace Transformation*, Verlag Birkhauser, Basel (1950).

In questo libro gli Autori continuano l'opera fondamentale del Doetsch sulla trasformazione di Laplace unidimensionale, raccogliendo e coordinando, con la chiarezza e il rigore caratteristici dell'opera ora ricordata, le ricerche sulla trasformazione bidimensionale di Laplace, ricerche in gran parte disperse in memorie originali (fra cui doverosamente citate quelle di PICONE e AMERIO) o ancora inedite.

Nel primo capitolo viene definita la trasformazione di Laplace bidimensionale $f(u,v)$ di una funzione $F(x,y)$ mediante la formula:

$$f(u, v) = L^2[F(x, y)] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy} F(x, y)\,dx\,dy \tag{1}$$

e di questa trasformazione si espongono le principali proprietà. In particolare, sotto opportune ipotesi che nelle applicazioni possono ritenersi largamente soddisfatte, si dimostra l'esistenza di due semipiani, rispettivamente nel piano della variabile complessa u e nel piano della variabile complessa v, in cui l'integrale (1) converge, e in cui $f(u, v)$ è, fissato u, analitica rispetto a v, e, viceversa, analitica rispetto a u, fissato v. Inoltre viene provata la relazione fondamentale, che generalizza quella ben nota per la trasformazione unidimensionale:

$$L^2\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right) = uL^2[F(x, y)] - L_v[F(O, y)], \tag{2}$$

dove con L_v si indica la trasformata di Laplace unidimensionale di $F(0, y)$ fatta mediante la variabile v. La (2), e le analoghe per le altre derivate, dimostrano come l'operazione di derivazione si riporta, sulla trasformata, a semplici operazioni algebriche.

Naturalmente per le applicazioni occorre calcolare esplicitamente sia la trasformata $f(u, v)$ di una assegnata $F(x, y)$, sia la antitrasformata (che è unica) di una assegnata $f(u, v)$. Per quest'ultimo problema gli Autori non danno regole generali, che forse sarebbero di scarsa utilità pratica; però, come nel caso delle trasformazioni unidimensionali, nella seconda parte del libro, dovuta al Voelker, si raccolgono in tabelle le funzioni di cui si conosce la trasformata e, naturalmente, la trasformata stessa. Queste tabelle, ordinate secondo la $f(u. v)$, permettono di conoscere le antitrasformate delle funzioni più comuni che si presentano nelle applicazioni. Le tabelle sono precedute da altre in cui si raccolgono formule molto utili per risalire da proprietà di $f(u, v)$ a proprietà della $F(x, y)$.

Il rimanente del volume, salvo un breve capitolo su alcune relazioni funzionali, è dedicato all'integrazione delle equazioni a derivate parziali, specialmente ad equazioni del primo e del secondo ordine, lineari e a coefficienti costanti, nelle variabili x e y; le equazioni sono definite nel primo quadrante e i valori ai limiti devono perciò essere assegnati solo sui semiassi positivi. La trasformata bidimensionale riconduce quelle equazioni a derivate parziali ad equazioni ordinarie di primo grado e fa conoscere, con mezzi molto semplici (cioè sfruttando l'analiticità della trasformata, conforme ad un'idea esposta per la prima volta da Picone), le condizioni ai limiti che occorre assegnare affinchè l'equazione alle derivate parziali considerata sia risolubile in modo unico. Questo risultato mette in luce, a mio avviso, l'utilità della trasformazione considerata, perchè, nel calcolo delle soluzioni, la trasformazione bidimensionale nei problemi in due variabili non mi sembra offra maggior vantaggio della unidimensionale. La stessa cosa non può ripetersi per le equazioni in tre variabili, perchè quest'ultime, solo con la trasformazione bidimensionale possono ridursi a equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di trattazione relativamente semplice. Gli Autori provano ciò studiando a fondo un esempio tratto dalla teoria della propagazione del calore. E' però da augurarsi che in un successivo volume gli Autori espongano una trattazione più ampia delle equazioni in tre variabili. Così pure è da augurarsi che, con l'uso di trasformate bidimensionali, ma con limiti diversi da zero o infinito, possano togliere la condizione, qualche volta retrittiva, per cui solo il primo quadrante è il campo in cui sono definite le equazioni a derivate parziali da risolvere.

Naturalmente, con quanto precede esprimo un desiderio e non una critica all'opera in esame che, per gli argomenti trattati e per le tabelle contenute, costituisce un ottimo strumento di lavoro per i cultori di Matematica applicata.

DARIO GRAFFI

N. W. Mc LACHLAN E P. HUMBERT: *Formulaire pour le calcul symbolique-Mémorial des Sciences Mathématiques,* fasc. C.

N. W. Mc LACHLAN, P. HUMBERT E L. POLI: *Supplément au Formulaire pour le calcul symbolique,* idem, fasc. CIII.

Come è noto, nella pratica, ormai usuale, del calcolo operatorio, si determina dapprima la trasformata di Laplace $f(p)$ della funzione incognita $F(t)$; poi dalla $f(p)$ si risale alla sua antitrasformata $F(t)$. E' perciò di somma importanza, nelle applicazioni del predetto calcolo, conoscere, per il maggior numero delle funzioni $F(t)$, la corrispondente $f(p)$ e viceversa.

Nei due fascicoli in esame, dopo qualche richiamo sulle regole generali del calcolo operatorio, sono esposti. in opportune tabelle, le trasformate $f(p)$ (a rigore la $f(p)$ non è la trasformata di $F(t)$ nel senso usuale, ma questa trasformata moltiplicata per p, cioè $f(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}F(t)dt$) di circa 1100 funzioni $F(t)$, riunendo così risultati che, finora, erano, almeno in parte, dispersi in memorie originali. Il primo fascicolo è una ristampa di un altro uscito per la prima volta nel 1940; alcuni errori (inevitabili in queste compilazioni) sono corretti nel secondo fascicolo, in cui sono aggiunte nuove formule non contenute nel primo. Le tabelle sono ordinate in base alla natura algebrica o trascendente della $F(t)$; riesce perciò molto più maneggevole, determinare, con queste tabelle, la trasformata della $F(t)$ piuttosto che l'antitrasformata di $f(p)$. Poichè quest'ultimo problema è assai più difficile del primo, sono forse più comode le tabelle del Doetsch (Springer, 1947) ordinate secondo la $f(p)$.

Comunque, rimane indiscutibile l'utilità dei fascicoli in esame ed è da augurarsi che, in successive edizioni, vengano aggiornati con i risultati che, nel frattempo, si otterranno sulla trasformazione di Laplace.

DARIO GRAFFI

S. BERGMAN: *The kernel function and conformal mapping.* Mathematical Survey N. 5, Published by the American Math. Society 1950.

Gli scopi a cui il libro è dedicato vengono dichiarati dall'A. nella prefazione, dove egli afferma che: « The purpose of this survey is to present a number of methods which are of wide applicability in such branches of analysis as function theory, partial differential equations, differential geometry etc.. With the help of a complete system of orthonormal functions $\{\varphi_\nu(P)\}$ belonging to a particular class, the kernel function $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(P)\overline{\varphi_\nu(Q)}$ of this class is defined... The method of complex orthogonal functions can equally well be applied to various fields of analysis such as the theory of functions of several complex variables, the theory of functions satisfying partial differential equations of elliptic type, and differential geometry. Our special emphasis, however, will be on the applications to the *theory of conformal mapping... The fact that the kernel function can be expressed* in terms of a complete orthonormal system makes it possible to solve numeically these boundary value and mapping problem for arbitrarily given domains... » (1).

Il primo capitolo è dedicato a richiamare i risultati fondamentali relativi agli sviluppi in serie, secondo un sistema completo di funzioni olomorfe $\{\varphi_\nu(z)\}$ ortogonali in un dato campo B, di una funzione $f(z)$ olomorfa in B e ivi di norma integrabile. Si dimostra la convergenza della serie $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(t)}$ che definisce la kernel function $K(z,t)$ per la classe delle anzidette funzioni olomorfe.

---

(1) Circa la possibilità di ricostruire in modo assai rapido e generale la teoria della *kernel function* e circa la sua effettiva utilità riguardo alle applicazioni ad altre branche dell'Analisi, vedasi la Nota del recensore inserita in questo stesso numero del Bollettino (pp. 4-15).

Le proprietà di K (z, t) vengono studiate nel successivo capitolo, dove, mediante una proprietà di minimo a cui essa verifica, si dimostra l'indipendenza di essa dal sistema completo $\{\varphi_\nu(z)\}$.

Si dimostra anche che: $f(z) = \iint\limits_B K(z, t) f(t) dx dy.$

Il capitolo successivo è dedicato ad applicazioni geometriche relative alla kernel function. Fra l'altro si dimostra che

$$ds^2 = K(z, \bar{z}) \,|\, dz \,|^2$$

è invariante per trasformazioni conformi del dominio B e che se $B' \subset B$ allora $ds' \geq ds$.

Il cap. IV contiene una estensione del concetto di kernel function ad uno spazio hilbertiano qualsiasi nel quale però il valore di una funzione in un punto possa riguardarsi come un funzionale lineare definito nello spazio.

Il cap. V è dedicato all'introduzione della kernel function nello spazio delle funzioni armoniche aventi gradiente di norma sommabile in un campo B, e a mettere in luce le relazioni esistenti fra di essa e le classiche funzioni di Green e di Neumann. Si dimostra fra l'altro che la kernel function è la differenza tra queste due ultime. Successivamente (cap. VI) si fa vedere come le funzioni che dànno la rappresentazione conforme di un dominio p volte connesso in un piano privato di p segmenti paralleli, o in una corona circolare o in un cerchio privati di archi circolari concentrici etc. possono rappresentarsi mediante la kernel function ultimamente introdotta. Tali funzioni vengono supposte esistenti.

Il cap. VII ha per argomento l'introduzione della kernel function $k(z, t)$ di un sistema di funzioni olomorfe ortonormalizzate sulla frontiera b di B. Dopo la dimostrazione della convergenza della solita serie si dimostra che se $f(z)$ è olomorfa in B e continua in $B + b$ allora si ha in B: $f(z) = \int f(t) k(z, t) ds.$

Si studiano fra l'altro i rapporti che intercorrono fra la kermel function del cap. V e quella ora introdotta.

Il cap. VIII studia la dipendenza della kernel function dal campo B. Vengono poste in luce proprietà di monotonia delle dette funzioni al variare di B.

Nel cap. IX trovasi dimostrata l'esistenza della funzione che rappresenta conformemente un campo p volte connesso nel piano privato di p segmenti paralleli.

Mentre, al cap. X, vengono estese all'equazione $\Delta_2 u - Pu = 0$ le considerazioni fatte per l'equazione di Laplace al cap. V, viene anche, per la classe delle soluzioni di questa equazione, introdotta una kernel function. Nello stesso capitolo è anche considerata l'equazione $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$.

Infine al cap. XI viene estesa la teoria alla classe delle funzioni olomorfe di due variabili complesse in un dato campo.

GAETANO FICHERA

H. RUTISHAUSER, A. SPEISER, E. STIEFEL, *Programmgesteuerte digitale Rechengeräte*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1951, 102 Seiten.

Questa rassegna, che riunisce in volume una serie di articoli apparsi sulla Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, ha lo scopo di far conoscere le possibilità e le caratteristiche salienti delle calcolatrici in questione ad una cerchia più vasta di studiosi che potrebbero avere occasione di servirsene, pur senza essere affatto specialisti in questo ramo. A tale scopo credo essa risponda perfettamente per la chiarezza e semplicità dell'esposizione, resa più perspicua da numerosi esempi e da ben 28 nitidi diagrammi, anche se la trattazione, per amor di completezza e per la natura stessa della materia che, sia pur per un unico fine, raccoglie risultati di rami diversi della scienza, risulta talvolta un po' frammentaria. Utilissima riuscirà pure la presente rassegna a chi voglia iniziarsi allo studio di tal genere di problemi, anche in virtù della ricca bibliografia, riferentesi spesso anche a pubblicazioni non facilmente accessibili; degne di nota, anche per lo specialista, alcune notizie inedite, come quella sugli studi di Aiken circa la miglior rappresentazione delle cifre decimali mediante tetradi in base due.

Troppo lungo sarebbe esaminare partitamente i singoli capitoli, ma non si può fare a meno di rilevare la completezza del volume; si può dire non vi sia argomento o problema interessante le calcolatrici che non trovi, in un luogo o nell'altro, secondo l'importanza della questione, o uno svolgimento esauriente o un cenno di trattazione o, almeno, un rinvio bibliografico.

Molto prudenti ed equilibrati i giudizi sulle varie possibilità di soluzione dei diversi problemi; si tratta spesso di problemi la cui soluzione sarà in definitiva dettata più da ragioni pratiche che di principio; tuttavia ci pare che gli svantaggi del sistema binario rispetto a quello decimale siano sopravalutati, mentre l'affermata superiorità del sistema a virgola fissa su quello a virgola mobile non appare sufficientemente documentata dalla successiva esposizione. Infine circa la sicurezza di funzionamento gli Autori ci sembrano più scettici di quanto è necessario se si guarda, oltre che alle realizzazioni passate, anche a quelle future od in corso. Ottima la veste tipografica.

In conclusione ci auguriamo che gli Autori, perseverando nel loro scopo, vogliano continuare in futuro a passare periodicamente in rassegna gli ulteriori progressi di questi potenti e sempre più promettenti strumenti di ricerca e dei problemi ad essi connessi.

MANLIO MANDÒ

B. BAULE, *Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs*. Verlag S. Hirzel, Leipzig e Zürich, 1950-51, voll. 1-7.

L'opera di B. Baule, che ha conosciuto un gran successo nei Paesi di lingua tedesca, ed ha avuto anche una traduzione spagnola nel 1950, espone in sette volumetti press'a poco tutto ciò che serve come strumento matematico al fisico, all'ingegnere e ad altri studiosi di scienze sperimentali. Il pregio dell'opera però consiste non soltanto nell'abbondanza delle materie e nella loro scelta abile, che rivela una conoscenza profonda dei bisogni pratici, ma anzi tutto nella loro presentazione piacevole e disinvolta Ovviamente non si poteva trattare di una esposizione assolutamente rigorosa, e tale non è stata l'intenzione dell'autore, come si vede dalla prefazione al primo volume. Tutto il peso riposa sugli esempi, numerosissimi e trattati con tutti i dettagli, e che mettono il lettore in grado di completare da sè le dimostrazioni accennate. Non bisogna cercare in quest'opera le teorie più profonde che non si presentano immediatamente all'applicazione, ma spesso l'autore riesce a darne con poche parole un'idea abbastanza completa. Qualche leggerezza nella redazione poteva forse essere evitata senza danno per il carattere dell'opera (si trovano per es. molti errori di stampa ecc.), ma ciò non compromette l'utilità dell'opera, che è anche corredata di dettagliati indici alfabetici alla fine di ogni volumetto. Ciò premesso passiamo alla discussione dei singoli volumi.

I. *Differential- und Integralrechnung.* (7ª ediz. 155 pagine).

Il primo volume presenta la materia di un normale trattato di calcolo differenziale e integrale con moltissimi esempi, consigli per il calcolo effettivo, avvertenze contro possibili errori. Particolarmente utili i paragrafi sulle coordinate e trasformazioni di coordinate — con cenni alla nomografia —, sulle forme indeterminate (regola de l'Hospital), sull'integrazione per decomposizione in somme e quello sul calcolo approssimato degli integrali definiti. Si desidererebbe forse una spiegazione un pò più dettagliata del concetto di limite e almeno un cenno alla convergenza uniforme.

II. *Ausgleichs- und Näherungsrechnung.* (6ª ediz. 58 pagine).

Questo volume contiene un'esposizione dei principii del calcolo statistico, illustrata anche essa da molti esempi pratici: discussione delle differenti definizioni di media, errore quadratico medio, perequazione delle osservazioni, leggi di Gauss e di Poisson ecc. La conseguente applicazione del principio dei minimi quadrati conduce alla trattazione delle serie di Fourier e dell'integrale di Fourier. Come esempio di sistema di funzioni ortogonali vengono trattate anche le funzioni di Legendre. Si chiude con un paragrafo sull'interpolazione.

III. *Analytische Geometrie.* (3ª ediz. 84 pagine).

L'esposizione della geometria analitica prende il suo punto di partenza dal calcolo vettoriale, più familiare ai fisici, dal quale si passa al calcolo con le coordinate. In questo luogo si trova una breve trattazione del calcolo delle matrici e dei sistemi di equazioni lineari — troppo breve, data la grande importanza di questa materia. Segue la discussione delle varie relazioni fra punti, rette e piani nello spazio e l'introduzione delle coordinate omogenee, la trattazione delle curve e superficie di 2° ordine, tutto ciò fatto in modo molto abile e chiaro. L'ultimo paragrafo dà una visione dei concetti e teoremi più importanti della geometria proietiva.

IV. *Gewöhliche Differentialgleichungen.* (3ª ediz., 120 pagine).

Questo volume sulle equazioni differenziali ordinarie porta in un primo capitolo delle considerazioni generali per es. sulle soluzioni singolari, sul numero dei parametri figuranti nella soluzione dei sistemi (senza teoremi di esistenza o di unicità). In un secondo capitolo seguono i metodi speciali per la risoluzione di equazioni differenziali di 1° e 2° ordine, i sistemi di equazioni lineari, a coefficienti costanti. Notevole l'esposizione della trasformazione di Laplace. Una grande parte del volume è dedicata alla Meccanica razionale dando i concetti più comuni e trattando vari moti particolari, anzi tutto vibratori. Si deducono anche le formule di Stokes, di Gauss, di Green, trattate più in esteso nel volume VI.

V. *Variationsrechung.* (3ª ed., 48 pagine).

Nel volumetto sul calcolo delle variazioni l'autore deduce le equazioni Euleriane, anche per problemi isoperimetrici, problemi di Lagrange, di Mayer, le condizioni di trasversalità. La trattazione è piuttosto formale — per es. non si trova cenno alla condizione di Legendre nè al concetto di punti coniugati nè, malgrado la sua grande importanza pratica, al metodo di Ritz —, ma certi dei numerosi esempi, presi anzi tutto dalla fisica, fanno intravedere le vere difficoltà. Seguono applicazioni alla geometria differenziale: cerchi e sfere geodetici — alla fisica: principio di Hamilton, equazioni canoniche, equazione differenziale di Hamilton-Jacobi.

VI. *Partielle Differentialgleichungen.* (3ª ediz. 160 pagine).

Questo volume sulle equazioni a derivate parziali ci pare particolarmente riuscito. Comincia con un'esposizione assai chiara delle equazioni di 1° ordine. Seguono alcuni cenni generali per la trattazione delle equazioni di 2° ordine, specialmente delle equazioni lineari, anche un esempio per l'applicazione della trasformazione di Laplace. Nel terzo capitolo vengono trattate alcune equazioni di 2° ordine particolarmente importanti, cioè l'equazione per la conduzione di calore, per la membrana, per la propagazione delle onde, ciò che offre anche l'occasione di trattare le funzioni di Bessel. Il resto del volume è dedicato alla teoria delle funzioni di variabili complessi, trattata in un modo molto riuscito insieme alla teoria del potenziale. Vengono alternati così i paragrafi sulla rappresentazione conforme e il concetto di superficie di Riemann con quelli sul teorema di Green, la funzione di Green, il problema di Green, il problema di Dirichlet, il quale conduce anche alla trattazione delle funzioni sferiche di Legendre e di Laplace.

VII. *Differentialgeometrie.* (3ª ediz. 135 pagine).

Il volume sulla geometria differenziale contiene l'usuale teoria delle curve. Nella seconda parte seguono i concetti principali della teoria della superficie: Linee geodetiche, curvatura media e di Gauss, geometria non euclidea iperbolica, teorema di Gauss sull'invarianza della curvatura totale, rappresentazione di una superficie su un'altra con applicazione alla teoria delle carte geografiche. I due ultimi capitoli del volume sono dedicati alla teoria dei tensori e delle tensioni e alla sua applicanione alle volte (sotto condizione che la tensione flessionale delle volte può essere trascurata: cosìdetta « teoria della membrana »).

L'abbondanza della materia trattata nell'opera di Baule è così grande che poche sono le discipline matematiche, praticamente interessanti, che non vi hanno trovato posto, fra le quali le frazioni continue, gli sviluppi asintotici, anzi tutto le equazioni integrali. Sarebbe gradita anche una esposizione dei metodi pratici per la soluzione delle equazioni lineari (eliminazioni successive, metodo di Banachiewicz, metodi iterativi). Lo stesso vale per il calcolo delle matrici, la cui importanza pratica va sempre aumentando.

MARIA JOSEPHA DE SCHWARZ

W. L. FERRAR, *Finite Matrices*, [« Oxford University Press », 1951, *17s, 6d*], VI+182 pp.

Si tratta di un volumetto dichiaratamente scritto con l'intento di mettere alla portata dei non specialisti (in particolare gli studenti di Università) i concetti e le proprietà essenziali della teoria delle matrici finite nel campo degli ordinari numeri complessi.

L'A. raggiunge abilmente il suo scopo, pur senza mai sacrificare il rigore nè la concisione, ricorrendo con larghezza all'esemplificazione ed illustrando con opportune note i punti meno evidenti.

La parte centrale del lavoro riguarda le matrici equivalenti (particolarmente per contragredienza); il Cap. V, dedicato alle funzioni di matrici, rappresenta un primo e ben riuscito tentativo di esposizione unitaria di questo importante argomento.

ROBERTO CONTI

H. L. HAMBURGER - M. E. GRIMSHAW: *Linear Transformations in* n*-dimensional Vector Space, An Introduction to the Theory of Hilbert Spnce*, « Cambridge University Press », 1951, pp. IX+195, 25 s.

La caratteristica di questa trattazione sta essenzialmente nel fatto che gli AA, nell'intento di fornire una introduzione alla teoria dello spazio hilbertiano, hanno esposto i fondamenti della teoria delle matrici complesse finite, anzichè sotto l'aspetto puramente formale, sotto quello geometrico di teoria delle trasformazioni lineari sui vettori complessi ad n dimensioni, avendo cura di evitare al massimo quei procedimenti dimostrativi e quei concetti (come quello di determinante) che non sarebbero suscettibili di estensione in uno spazio definito dalle sole proprietà astratte, quale è lo spazio hilbertiano.

L'opera, di notevole interesse anche per chi non possieda gli elementi del calcolo delle matrici, tende in complesso ad una interpretazione geometrica di taluni problemi algebrici; basterà citare, tra i più noti, la risoluzione dei sisistemi di equazioni lineari omogenee e la riduzione di una forma hermitiana a forma canonica.

La trattazione, esemplarmente chiara e bene articolata, dai primi due capitoli di carattere introduttivo, sale di tono dal cap. III, dedicato alla rappresentazione spettrale delle trasformazioni hermitiane e normali, alle proprietà di estremo degli autovalori di una trasformazione hermitiana ed ai fondamenti del calcolo funzionale per le trasformazioni hermitiane. I medesimi argomenti, svolti sul piano più ampio delle trasformazioni lineari generali, occupano la prima parte del cap. IV, il quale si conclude con la riduzione delle trasformazioni lineari alla forma canonica di *Jordan* e con le condizioni di permutabilità tra le trasformazioni lineari; il cap. IV include anche contributi originali di uno degli AA.

L'argomento del V ed ultimo cap. è suggerito dall'opportunità, riscontrata in alcuni problemi di fisica matematica, di generalizzare l'equazione caratteristica associata ad una trasformazione hermitiana; l'estensione viene giustificata mediante un'applicazione alla teoria dinamica delle piccole oscillazioni.

Il volume, corredato da numerose note di carattere storico e da una bene scelta bibliografia, si presenta nell'ottima veste tipografica abituale di queste edizioni.

ROBERTO CONTI

LIBRI RICEVUTI

HOHEISEL G. - *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Sammlung Goschen 290, pagg. 129, W. De Gruyter e Co. Berlin, 1951.

DUSCHEK A. - *Höhere Mathematik* II Band, pagg. 388, Springer-Verlag, Wien, 1950.

SANDEN V. - *Praktische Mathematik*, pagg. 120, B. G. Teubner, Leipzig, 1951.

BALSER L. - *Einführung in die Kartenlehre* (Kartennetze), pagg. 64, B. G. Teubner, Leipzig, 1951.