Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Antonio Rosati

# Risoluzione di un sistema diofanteo.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **7** (1952), n.1, p. 69–70.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_69_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

## Risoluzione di un sistema diofanteo.

Nota di Luigi Antonio Rosati (Firenze).

**Sunto.** - *Come le prime righe della nota.*

A. Moessner [1] ha proposto la risoluzione del sistema diofanteo

$$A_1^2+B_1^2+C_1^2=A_2^2+B_2^2+C_2^2, \quad A_1^4+B_1^4+C_1^4=A_2^4+B_2^4+C_2^4.$$

G. Palamà [2] ha già dato alcune soluzioni parametriche di questo sistema e successivamente alcune soluzioni del sistema

$$(1) \quad \begin{array}{l} A_1^2+B_1^2+C_1^2=A_2^2+B_2^2+C_2^2=\ldots=A_n^2+B_n^2+C_n^2 \\ A_1^4+B_1^4+C_1^4=A_2^4+B_2^4+C_2^4=\ldots=A_n^4+B_n^4+C_n^4. \end{array}$$

Noi diamo qui una soluzione parametrica del sistema (1) qualunque sia il numero $n$.

(²) Cfr. A. Capelli: *Istituzioni di Analisi Algebrica*, 4ª ed., Napoli, 1909, pagg. 748-749.

(¹) Cfr. A. Moessner, questo fascicolo pag. 71.

(²) Cfr. *a*) G. Palamà, *Metodi per avere soluzioni...* « Rend. Mat. e delle sue appl. » (5), 6(1947) pp. 48-64; *b*) G. Palamà, *Generalizzazione di due teoremi...* loc. cit. pp. 95-120.

È noto che il sistema

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2t^2, \qquad x^4 + y^4 + z^4 = 2t^4$$

ha la soluzione (3)

$$x = p^2 - q^2, \quad y = q^2 + 2pq, \quad z = p^2 + 2pq, \quad t = p^2 + pq + q^2,$$

e se

$$(3,\ p - q) = 1, \quad (p,\ q) = 1$$

risulta

$$(x,\ y,\ z,\ t) = 1.$$

Siano

$$x_i = p_i^2 - q_i^2, \quad y_i = q_i^2 + 2p_iq_i, \quad z_i = p_i^2 + 2p_iq_i,$$
$$t_i = p_i^2 + p_iq_i + q_i^2 \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n)$$

$n$ soluzioni positive del sistema (2) e se $x_h, y_h, z_h, t_h$; $x_k, y_k, z_k, t_k$ sono due di esse i numeri $x_k$, $y_k$, $z_k$ non siano una permutazione dei numeri $x_h$, $y_h$, $z_h$.

Sia inoltre

$$(3,\ p_i - q_i) = 1, \quad (p_i,\ q_i) = 1.$$

Posto $t_1t_2 \dots t_n = T$ si ha per $i = 1,\ 2, \dots,\ n$:

$$\left(x_i \frac{T}{t_i}\right)^2 + \left(y_i \frac{T}{t_i}\right)^2 + \left(z_i \frac{T}{t_i}\right)^2 = 2T^2,$$
$$\left(x_i \frac{T}{t_i}\right)^4 + \left(y_i \frac{T}{t_i}\right)^4 + \left(z_i \frac{T}{t_i}\right)^4 = 2T^4.$$

È subito visto che i numeri $\frac{x_h}{t_h}, \frac{y_h}{t_h}, \frac{z_h}{t_h}$ non sono una permutazione dei numeri $\frac{x_k}{t_k}, \frac{y_k}{t_k}, \frac{z_k}{t_k}$. Infatti per esempio da

$$\frac{x_h}{t_h} = \frac{y_k}{t_k}, \quad \frac{y_h}{t_h} = \frac{z_k}{t_k}, \quad \frac{z_h}{t_h} = \frac{x_k}{t_k}$$

segue

$$\frac{x_h}{y_k} = \frac{y_h}{z_k} = \frac{z_h}{x_k} = \frac{t_h}{t_k},$$

cioè, essendo $(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t_i) = 1$, i numeri $x_h$, $y_h$, $z_h$ sono una permutazione dei numeri $x_k$, $y_k$, $z_k$.

Il sistema (1) ha dunque la soluzione

$$A_i = x_i \frac{T}{t_i}, \quad B_i = y_i \frac{T}{t_i}, \quad C_i = z_i \frac{T}{t_i} \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n).$$

(3) Cfr. BIRCK, *Interm. des Math.*, 13, 1912, pag. 255. Cfr. anche G. PALAMÀ, loc. cit. in (2) *a)*, pag. 56.