Bollettino Unione Matematica Italiana

Gaetano Fichera

Sulla “Kernel function”.

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 4–15.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_4_0>

Sulla « Kernel function ».

Nota di GAETANO FICHERA (a Trieste).

Sunto. - *Sfruttando semplici proprietà degli spazî hilbertiani, viene ricostruita in modo assai rapido e generale la teoria della funzione nucleare o, più in generale, della matrice nucleare. Si fa successivamente vedere come in tale teoria generale rientrino, come casi particolarissimi, tutti quelli considerati in una recente Opera sull'argomento.*

La lettura della recente Opera del BERGMAN: *The kernel function and conformal mapping* (1), che trovasi recensita in questo fascicolo, mi ha suggerito alcune considerazioni relative alla pos-

(1) Nel seguito indicheremo tale opera con la sigla B.K.F.. Una teoria generale dei *reproducing kernels* trovasi anche nella Memoria di N. ARONSZAJN, *Theory of reproducing kernels,* « Trans. of American Math. Society, 68 (1950) pp. 337-404.

sibilità di costruire, in modo tanto rapido quanto generale, una teoria della *kernel function* (funzione nucleo) nella quale sono inclusi, come casi particolari, tutti quelli che il B. considera nel sopracitato volume, relativi a *kernel functions* associate a determinate classi di funzioni.

Credo offra qualche interesse esporre tali considerazioni.

1. **Teoria generale.** - Sia B un campo (insieme aperto) di uno spazio euclideo S_r ad r dimensioni e sia b la frontiera di B. Con x indicherò il punto di S_r e con $x_1, x_2, \dots, x_r$ le sue coordinate. Indico con U una varietà lineare di funzioni, reali o complesse, $u(x)$ definite in B. Suppongo che $L_1, L_2, \dots, L_n$ siano n operatori omogenei distributivi definiti in U, i quali ad ogni funzione u di U facciano corrispondere le funzioni, reali o complesse, $L_1[u]$, $L_2[u], \dots, L_n[u]$ di cui le prime $p (0 \leq p \leq n)$ definite in B e le rimanenti su b. Supporrò che le equazioni $L_i[u] = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ abbiamo in U l'unica soluzione $u \equiv 0$ e che, supposto b convenientemente regolare, per ogni u in U sia

$$\int_B | L_h[u] |^2 dx < +\infty \qquad (h = 1, 2, \dots, p),$$

$$\int_b | L_k[u] |^2 d\sigma < +\infty \qquad (k = p+1, \dots, n)$$

($d\sigma =$ elem. mis. ipersup. su b).

Suppongo infine che assunto comunque l'insieme chiuso C in B si abbia per x in C, qualunque sia u in U:

$$(1) \qquad | u(x) |^2 \leq A_C \left\{ \sum_{h=1}^{p} \int_B | L_h[u] |^2 dx + \sum_{k=p+1}^{n} \int_b | L_k[u] |^2 d\sigma \right\}$$

essendo A_C una costante che dipende unicamente da C.

Nelle ipotesi ammesse possiamo considerare U come uno spazio lineare normale, definendo la norma di u al modo seguente:

$$(2) \qquad \| u \| = \left\{ \sum_{h=1}^{p} \int_B | L_h[u] |^2 dx + \sum_{k=p+1}^{n} \int_b | L_k[u] |^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Tale spazio riesca altresì completo, esista, cioè, in esso il limite di ogni successione convergente secondo la normalizzazione (2).

Considerato lo spazio hilbertiano H dei vettori ad n componenti, di cui le prime p sono definite in B e le rimanenti su b, diciamo $L[U]$ la varietà lineare, appartenente ad H, descritta dal vettore di componenti $L_1[u], L_2[u], \dots, L_n[u]$ quando u descrive U.

Poichè H è separabile, cioè dotato di una successione di elementi ovunque densa in H (base di H), tale sarà $L(U)$ ([2]). Sia $\{v_k\}$ una successione di funzioni di U tale che la corrispondente successione di vettori $\{L_1[v_k], L_2[v_k], \ldots, L_n[v_k]\}$ sia ovunque densa in $L[U]$. La successione $\{v_k\}$ è una base per lo spazio U. Posto:

$$(u, v) = \sum_{h=1}^{p} \int_B L_h[u]\overline{L_h[v]}dx + \sum_{k=p+1}^{n} \int_b L_k[u]\overline{L_k[v]}d\sigma,$$

sarà $(v, u) = \overline{(u, v)}$. Si può ovviamente supporre che le funzioni $\{v_k\}$ verificano le condizioni di ortonormalità $(v_i, v_k) = \delta_i^k$, con che resta assodata l'esistenza in U di un sistema ortonormale e completo. Ogni funzione di U è suscettibile del seguente sviluppo in serie

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x), \qquad c_k = (u, v_k), \tag{3}$$

uniformemente convergente nell'interno di B.

Fissato x in B si consideri il valore $u(x)$ come un funzionale della u definito in U. Tale funzionale è omogeneo, additivo e continuo rispetto alla normalizzazione (1), cioè è un funzionale lineare delle funzioni di U. Dal teorema relativo alla rappresentazione dei funzionali lineari negli spazi hilbertiani segue che $u(x)$ ammette la rappresentazione seguente

$$u(x) = (u(y), K(x, y)) \tag{4}$$

essendo $K(x, y)$, per ogni fissato x, funzione di y appartenente ad U ([3]). Per essa, in virtù della (3), deve essere

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y)(K(x, y), v_k(y)) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \overline{v_k(x)}v_k(y) \tag{5}$$

([2]) Infatti se $\{h_n\}$ è una base per H, una base per $L[U]$ sarà la successione $\{l_{nk}\}$, essendo l_{nk} un punto di $L[U]$ che ha distanza da h_n non superiore a $d_n + \frac{1}{k}$, avendo indicato con d_n la distanza da $L[U]$ di h_n. Si noti che essendo $L[U]$ un insieme chiuso di H può darsi una ben precisa legge di scelta per il punto l_{nk}.

([3]) Il teorema a cui si è accennato nel testo è il seguente:

Se F(u) *è un funzionale lineare definito nello spazio hilbertiano completo* U *esiste un punto* v *di* U *tale che* F(u) $\equiv$ (u, v).

Per amore di completezza accenno alla dimostrazione di questo teorema.

Sia $\{v_k\}$ un sistema ortonormale e completo in U, pongo $F(v_k) = c_k$. Sarà $F[\sum_{k=1}^{n} c_k v_k] = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$ e riuscirà $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$. Infatti se così non fosse con convergenza uniforme — per ogni fissato x in B — della serie al secondo membro al variare di y in ogni insieme chiuso interno a B, e — com'è ovvio — viceversa scambiando x con y.

La $K(x, y)$ verifica la seguente proprietà di minimo. Si consideri, fissato x in B, la totalità U_x di tutte le funzioni per le quali si ha: $u(x) = 1$. Consideriamo nella classe U_x — supposta non vuota — il funzionale reale $I[u] = \|u\|^2$. Esso vi ha minimo. Applicando infatti il solito procedimento euleriano al problema di minimo vincolato: $I[u] = minimum$, $G[u] = (u(y), K(x, y)) = 1$ si ottiene la seguente estremale $u_x = \dfrac{K(x, y)}{K(x, x)}$ la quale è una minimante assoluta (ovviamente unica) esssendo per ogni funzione η di U, tale che $\eta(x) = 0$:

$$\| u_x + \eta \|^2 - \| u_x \| = \| \eta \|^2.$$

2. **Casi particolari.**

a) *Funzioni olomorfe di norma sommabile.* - Sia B un campo limitato del piano complesso $x = x_1 + ix_2$, U la classe delle funzioni olomorfe in B e tali che

$$\int_B | u(x) |^2 dx_1 dx_2 < +\infty$$

Si assuma $p = n = 1$ e come operatore L_1 l'identità; cioè: $L_1[u(x)] \equiv u(x)$, Tutti i risultati stabiliti nel caso generale saranno validi nel caso ora considerato se si dimostra, soltanto, che sussiste la (1), che, nel caso attuale, diviene

$$(1_a) \qquad | u(x) |^2 \leq A_C \int_B | u |^2 dx_1 dx_2 .$$

Ciò è ben facile. Sia infatti δ un numero minore della distanza di C da b. Fissato comunque x in C per ogni ρ tale che $0 < \rho \leq \delta$

per ogni intero positivo h esisterebbe un indice n_h per cui $\sum_{k=1}^{n_h} c_k^2 > h^2$, che, posto $u_h = \dfrac{\sum_{k=1}^{n_h} c_k v_k}{h \left| \sum_{k=1}^{n_h} c_k^2 \right|^{1/2}}$, equivale alla $F[u_h] > 1$. Questa è assurda dato che $\lim_{h \to \infty} \|u_h\| = 0$. Si ponga $v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$. Riesce

$$F[u] = \sum_{k=1}^{\infty} (u, v_k) F[v_k] = \sum_{k=1}^{\infty} (u, v_k)(v, v_k) = (u, v).$$

si ha:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

integrando i due membri rispetto a ρ nell'intervallo $(0, \delta)$, applicando la diseguaglianza di SCHWARZ e dopo un'ovvia maggiorazione si deduce la (1_a) con

$$A_C = \frac{1}{\pi \delta^2}.$$

Qualsiasi altra dimostrazione si rende inutile e non è — ad esempio — necessario servirsi di laboriose considerazioni e dell'impiego della teoria delle famiglie normali di funzioni per provare l'esistenza di un sistema completo in U, la convergenza dello sviluppo (5), la proprietà di minimo per $K(x, y)$, etc. ([4]).

b) *Funzioni armoniche il cui gradiente ha norma sommabile.* Sia B un campo limitato dello spazio euclideo ad r dimensioni. Su B faremo soltanto l'ipotesi che esistano un suo punto $x^{(0)}$ e due costanti positive L e M tali che ogni punto x di B possa essere congiunto a $x^{(0)}$ mediante una poligonale avente lunghezza minore di L e la cui distanza dalla frontiera b di B sia maggiore di $M\delta(x)$, se $\delta(x)$ è la distanza di x da b.

Sia U la classe delle funzioni armoniche in B, tali che

$$\int_B |\operatorname{grad} u|^2 dx < +\infty$$

e verificanti la condizione

$$u(x^{(0)}) = 0. \tag{6}$$

Si assuma $p = n = r$, $L_1[u] = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, L_r[u] = \frac{\partial u}{\partial x_r}$. La (1) si consegue al modo seguente. Intanto un ragionamento analogo a quello fatto in a) permette di stabilire che

$$|\operatorname{grad} u|^2 \leq A'_C \int_B |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

in ogni insieme chiuso C contenuto in B. Detta Γ_C la chiusura dell'insieme costituito da tutti i punti delle poligonali $\gamma(x^{(0)}, x)$, di cui si è sopra discorso, che congiungono $x^{(0)}$ ad un punto x di C, essendo Γ_C contenuto in B, si ha:

$$|u(x)|^2 = \left| \int_{\gamma(x^{(0)},\, x)} \sum_{i=1}^{r} u_{x_i} dx_i \right|^2 \leq \left| \int_{\gamma(x^{(0)},\, x)} |\operatorname{grad} u| \, ds \right|^2 \leq A'_{\Gamma_C} L^2 \int_B |\operatorname{grad} u|^2 dx.$$

([4]) Cfr. B.K.F., capp. I. e II.

Nel caso attuale la costante A_C è dunque data da $A'_{\Gamma_C} L^2$. Nel caso particolare che la frontiera b di B sia costituita da un numero finito di ipersuperficie chiuse, avente ciascuna iperpiano tangente variabile con continuità, potendosi — com'è noto — definire ogni funzione u anche su b e riuscendo ivi ipersuperficialmente sommabile, la condizione (6) può essere sostituita con la seguente

$$\int_b u(x) d\sigma = 0 \text{ [5]}.$$

È evidente l'esistenza della funzione nucleare anche per la nuova classe che così viene ad aversi [6].

c) *Funzioni olomorfe che assumono valori di norma sommabili sulla frontiera di un dominio.* – B sia un campo limitato e connesso del piano $x = x_1 + ix_2$ e la sua frontiera sia composta da un numero finito di curve semplici e chiuse, γ_0 (contorno esterno) e $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ (contorni interni) a due a due senza punti in comune e composte, ognuna, da un numero finito di archi dotati di curvatura continua. U sia la classe delle funzioni olomorfe in B e tali che per quasi tutti i punti ξ di b esista il limite: $\lim\limits_{x \to \xi} u(x)$. Tale limite servirà a definire $u(x)$ in quasi tutto b. La funzione testè definita sia di norma sommabile su b.

Fissato il punto $x^{(h)}$ nel campo limitato da $\gamma_h (h = 1, 2, \dots, p)$, sia $\omega_k(x)$ la successione di funzioni ottenuta riunendo tutte le funzioni: x^ν, $(x - x^{(h)})^{-\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots;\ h = 1, 2, \dots p)$. Per ogni u di U si abbia:

$$\int_b u(x) \omega_k(x) dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

La classe U, ora definita, contiene quella delle funzioni olomorfe in B e continue in $B + b$.

Poichè, per un noto teorema, riesce per ogni x di B

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_b \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi \text{ [7]} \tag{7}$$

[5] In B.K.F. dove non viene notata la circostanza che ogni funzione di U è, nel caso attuale, anche definita su b (quasi ovunque) ed è ivi sommabile, si distinguono i due casi: quello in cui $\int_b u d\sigma$ « is defined » e quello in cui non lo sarebbe (pagg. 48-49).

[6] B.K.F., cap. V.

[7] Tale teorema è il seguente: Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $u(\xi)$ sommabile su b sia ivi la traccia di una funzione $u(x)$ olomorfa in B e sussista la (7) è che riesca per ogni k: $\int_b u(x) \omega_k(x) dx = 0$.

ed essendo $|u(\xi)|^2$ sommabile su b, in modo evidente si consegue la disuguaglianza

$$|u(x)|^2 \leq A_C \int_b |u(\xi)|^2 d\sigma.$$

Si assuma $p=0$, $n=1$, e si definisca così l'operatore L:

$$L[u] = \lim_{x \to \xi} u(x)$$

essendo ξ su b:

La teoria generale si applica completamente al caso particolare che ora si considera e resta pertanto acquisita l'esistenza di una *kernel function* $K(x, y)$ tale che per ogni u di U riesca

$$u(x) = \int_b u(y)\overline{K(x, y)}d\sigma. \tag{8}$$

Il punto di vista in cui ci siamo messi ci consente di pervenire in modo assai rapido alla dimostrazione di un teorema che viene, altrimenti, assai laboriosamente dimostrato e che vien posto a fondamento della teoria della *kernel function* relativa alla classe U ora considerata ([8]).

Tale teorema asserisce l'esistenza e l'unicità di due funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ delle quali la prima — per ogni fissato x — olomorfa in B e la seconda olomorfa in $B - x$ e con un prefissato polo del primo ordine in x, tali che per $y = y_1 + iy_2$ su b e x in B verificano l'equazione

$$\overline{f(x, y)}ds = g(x, y)dy \text{ (}^9\text{)}. \tag{9}$$

È immediata l'esistenza di tali funzioni. Infatti assumendo $f(x, y) = K(x, y)$, per (7) e (8) si ha qualunque sia u in U:

$$\int_b u(y) \left[\frac{\overline{f(x, y)}}{y_1' + iy_2'} - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y - x} \right] dy = 0,$$

donde per il teorema della nota ([7]) per y su b:

$$\frac{\overline{f(x, y)}}{y_1' + iy_2'} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y - x} + \text{funzione olomorfa in } B$$

cioè la (9). L'unicità di f e g segue da quella di K.

([8]) B.K.F., cap. VII. Ivi si suppone che U sia esclusivamente costituita dalle funzioni olomorfe in B e continue in $B + b$. Con tale restrizione, però, adottando la normalizzazione:

$$\int_b |u|^2 d\sigma = \|u\|^2,$$

lo spazio U non riesce completo.

([9]) B K.F. pagg. 79-83.

d) *Ulteriori esempi.* - Quanto è stato detto in b) per le funzioni armoniche può estendersi senza difficoltà alle soluzioni dell'equazione

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - Pu = 0 \qquad (P > 0) \tag{10}$$

che hanno la norma sommabile in B assieme al loro gradiente. Si pone in tal caso $p = n = r$, $L_k[u] = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ $L_{r+1}^{[u]} = \sqrt{P}u$. Da ben noti teoremi di media per le soluzioni della (10) si deduce la (1), cioè

$$| u(x) |^2 \leq A_C \int_B \left\{ \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + Pu^2 \right\} dx.$$

Con ragionamenti analoghi si svolge una teoria della *kernel function* per le soluzioni dell'equazione bi-iperarmonica $\Delta_4 u = 0$ o più in generale n-iperarmonica $\Delta_{2n} u = 0$, per le funzioni olomorfe di più variabili complesse etc. [10].

3. **Estensione della teoria generale.** - La teoria generale svolta al § 1 è suscettibile di una più estesa formulazione a cui vogliamo accennare. Sia $B_k (k = 1, 2, \ldots, s)$ un campo di uno spazio ad r_k dimensioni e sia u_k una funzione definita in B_k. Con u indicheremo il vettore avente le s componenti $u_1, u_2, \ldots, u_s$. Sia U una varietà lineare di tali vettori e sia L un operatore omogeneo e distributivo il quale trasforma il vettore u nel vettore $L[u]$ ad n componenti $L_1[u], L_2[u], \ldots, L_n[u]$, essendo $L_h[u]$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ definita nel campo A_h di uno spazio a q_k dimensioni. Le equazioni $L_h[u] = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ abbiano l'unica soluzione $u = 0$ in U. Detto $d\sigma_h$ l'elemento di misura di A_h, risulti

$$\sum_{h=1}^{n} \int_{A_h} | L_h[u] |^2 d\sigma_h < +\infty \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Supponiamo infine che, assunto comunque l'insieme chiuso C_k in B_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$, qualunque sia u di U risulti, per $x^{(k)}$ in C_k:

$$| u_k(x^{(k)}) |^2 \leq A(C_1, C_2, \ldots, C_s) \sum_{h=1}^{n} \int_{A_h} |L_h[u]|^2 d\sigma_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

U può considerarsi come uno spazio hilbertiano definendo al

[10] Cfr. B.K.F. capp. X e XI.

modo seguente il prodotto scalare

$$(u, v) = \sum_{h=1}^{n} \int_{A_h} L_h[u]\overline{L_h[v]}d\sigma_h;$$

supponiamo inoltre che tale spazio sia completo.

È evidente come venga estesa la teoria del § 1. Si perverrà a dimostrare l'esistenza di una *matrice nucleare*

$$\| k_{ij}(x^{(i)}, y^{(j)}) \| \qquad (i, j = 1, 2, \dots, s)$$

tale che, indicato con $K_i(x^{(i)}, y)$ il vettore che ha per componenti gli elementi della i-esima riga, sarà per ogni u di U:

$$u_i(x^{(i)}) = (u(y), K_i(x^{(i)}, y)) \qquad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Se $\{ v^{(h)} \}$ è un sistema di vettori ortonormale e completo in U sussisteranno i seguenti sviluppi

$$k_{ij}(x^{(i)}, y^{(j)}) = \sum_{h=1}^{\infty} \overline{v_i^{(h)}(x^{(i)})}v_j^{(h)}(y^{(j)}).$$

Fissato $y^{(j)}$, la serie a secondo membro converge uniformemente nell'interno di B_i e — viceversa — fissato $x^{(i)}$, uniformemente nell'interno di B_j.

La teoria della matrice nucleare può applicarsi alle classi delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali. Ad esempio alle equazioni dell'equilibrio di un corpo elastico, isotropo e omogeneo. Omettiamo di sviluppare tali considerazioni che hanno ormai il carattere di un non difficile esercizio.

4. **Osservazioni conclusive.** – Prescindendo dal maggiore o minore interesse teorico che può avere la teoria della funzione o, più in generale, della matrice nucleare, la quale — quando se ne accetti la naturale formulazione datane nei §§ precedenti — diviene una immediata conseguenza dei primi fondamenti della teoria degli spazi hilbertiani, mi permetterò esprimere il mio parere sulla utilità per le applicazioni ad altre teorie matematiche. Mi troverò in ciò costretto a non essere completamente d'accordo col BERGMAN che dichiara i metodi della *kernel function* « ... *of wide applicability in such branches of analysis as function theory, partial differential equations, differential geometry, etc.* ... » ed aggiunge, allorchè accenna ai problemi al contorno per l'equazione di LAPLACE ed altre equazioni ellittiche o a quelli della rappresentazione conforme: « *The fact that the kernel function*

can be expressed in terms of a complete orthonormal system makes it possible to solve numerically these boundary value and mapping problems for arbitrarily given domains ».

In verità, a me pare evidente che la possibilità di rappresentare le funzioni di una certa classe U mediante quelle di un dato sistema completo prescinda assolutamente dall'esistenza di una *kernel function* relativa ad U. Ed anzi la circostanza che il sistema completo in U sia ortonormale è affatto inessenziale. Tutt'al più permetterà di scrivere formule graficamente meno complicate, ma nulla più di ciò. Tutti, infatti, sanno che una funzione u è numericamente nota allorquando sono note le sue coordinate di FOURIER rispetto ad un sistema completo $\{v_k\}$ anche non ortonormale; cioè, impiegando le notazioni sopra introdotte, allorquando si sa che u verifica le infinite equazioni $(u, v_k) = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ con le c_k costanti note. Infatti, supposte le funzioni v_k linearmente dipendenti, è ben noto che dette $\gamma_h^{(s)}(h = 1, 2, \ldots, s)$ le soluzioni del sistema lineare algebrico $\sum_{h=1}^{s} \gamma_h^{(s)}(v_h, v_k) = c_k$, la successione $u^{(s)} = \sum_{h=1}^{s} \gamma_h^{(s)} v_h$ converge verso la u. Tutto ciò senza che la *kernel function* abbia niente a che vederci e senza impiegare sistemi ortonormali, la deduzione dei quali — come lo stesso BERGMAN riconosce — « *is a rather time-consuming procedure* ».

I problemi che in realtà si presentano sono invece di natura diversa da quelli relativi all'esistenza di una *kernel function* e alla rappresentazione di questa mediante funzioni ortonormali. Ad esempio, se u è la soluzione di un problema al contorno per una equazione differenziale lineare, si pone in primo luogo la questione di esprimere i termini noti c_k mediante i dati del problema. Ciò è stato già da tempo conseguito da PICONE ([11]) con i suoi procedimenti d'integrazione delle equazioni differenziali lineari. Secondariamente, volendo effettivamente pervenire al calcolo della u, occorrerà servirsi non di un qualsiasi sistema completo — l'esistenza del quale è ovvia — ma di un *ben determinato*, *prefissato* sistema di funzioni atte al calcolo numerico. Per fissare le idee,

([11]) Cfr. M. PICONE: a) *Appunti di analisi superiore*, Rondinella, Napoli (1940), pagg. 752-765; b) *Nuovi metodi risolutivi per i problemi di integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali* etc., « Atti dell'Accademia delle Scienze » di Torino, (1939-40); c) *Sulla traduzione in equazione integrale di prima specie dei problemi al contorno* etc., « Rend. Acc. Naz. Lincei », (1947); cfr. anche M. PICONE e G. FICHERA, *Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme* etc. « Monatshefte für Mathematik » (1950).

se u è soluzione di un problema al contorno per l'equazione

$$\Delta_2 u - (x^2 + y^2)u = 0 \tag{11}$$

si vorrà sapere se le soluzioni del tipo $f(x^2 + y^2)e^{ik \operatorname{arctang} \frac{y}{x}}$ costituiscano un sistema completo, atto ad approssimare la u secondo, una ben determinata metrica. Questioni di tal natura hanno trovato la loro soluzione in un gruppo di ricerche che, proposte dal PICONE, furono iniziate dall'AMERIO e concluse dallo scrivente ([12]).

Non soltanto per l'analisi quantitativa è da ritenere che i metodi della *kernel function* siano inessenziali, ma anche per quella esistenziale. Uua prova di ciò risiede — a mio avviso — nel fatto che il BERGMAN nella Sua Opera ha costantemente bisogno di supporre già acquisita l'esistenza delle funzioni di GREEN o di NEUMANN per le equazioni differenziali che viene a considerare ([13]).

([12]) Cfr. L. AMERIO: a) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ etc., « Rend. Ist. Lombardo Scienze e Lettere », (1944-45); b) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} u = f$, « Annali di Mat. », (1945); c) *Sull'equazione di propagazione del calore*, « Rend. di Mat. e delle sue applicaz. »; Roma, 1946); d) *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi di contorno per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico*, « American Journal of Math. » (July 1947).

Cfr. anche G. FICHERA: a) *Sull'equilibrio di un corpo elastico, isotropo e omogeneo*, « Rend. Sem. Mat. Univ. » Padova, (1948); b) *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili* etc., « Rend. Acc. Naz. Lincei », (1947): a) *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio* etc., « Annali di Mat. » (1948); d) *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione* $\Delta_4 u = f$, « Giornale di Mat. di Battaglini », (1947), e) *Applicazioni della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare*, « Giorn. di Mat. di Battaglini », (1948-49); f) *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio* etc., « Ann· Scuole Norm. Sup. », Pisa, (1950); g) *On some ganeral integration methods employed in connection with linear differential equations*, « Jourmal of Math; and Physis », (1950); h) *Sui problemi analitici dell'elasticità piana* « Rend. del Sem. della Facoltà di Seienze dell' Univ. di Cagliari » (1949).

Va notato che il BERGMAN non fa nella Sua Opera riferimento alcuno ai metodi del PICONE e alle ulteriori ricerche che da essi sono derivate.

([13]) Il BERGMAN, per contro, si attarda sovente a dimostrare ovvie e notissime proprietà e credo sia un significativo esempio di ciò quanto Egli fa all'inizio del cap. V, dove, dopo aver costretto il lettore ad ammettere nota l'esistenza delle funzioni di GREEN e di NEUMANN per l'equazione di LAPLACE, verificanti per di più proprietà di regolarità tali da rendere per esse applicabile il teorema di reciprocità, sente la necessità di dimostrargli che esse sono simmetriche. E al cap. XI essen-

Per cui, date le continue ammissioni di teoremi di esistenza che si trovano in detta Opera, si sarebbe tentati di concludere che non è la *kernel function* ad essere un metodo *of wide applicability* in varie teorie dell'Analisi, ma sono queste ultime che debbono venire in soccorso alla prima. Ciò viene avvertito dal BERGMAN stesso il quale dichiara: « ... *it is desirable to prove the existence of these functions* (si riferisce a quelle di GREEN e di NEUMANN) *within the framework of our present theory and so to make this theory indipendent of loans from other fields...* » ([14]). L'unico teorema di esistenza che però egli dà è quello relativo all'esistenza della funzione che rappresenta conformemente un dominio piano limitato p volte connesso in un piano privato di p segmenti paralleli ([15]). La dimostrazione del BERGMAN è meno generale e più laboriosa di altre che possono essere date con differenti procedimenti. Per il resto Egli rimanda ad una Memoria di due altri Autori nella quale sarebbe dimostrata l'esistenza della funzione di GREEN per il problema di DIRICHLET relativo all'equazione di LAPLACE col metodo della *kernel function*. Un esame di tale Memoria pone però in luce che la dimostrazione di tale esistenza è errata ([16]).

Mi pare dopo quanto si è osservato, potere affermare che l'unico interesse che può rivestire la *kernel function* è soltanto formale per le molteplici relazioni che legano essa alle classiche funzioni di GREEN, NEUMANN, etc. Ma il sussistere di tali relazioni certo non stupisce chi osservi le questioni da un punto di vista generale. Essendo le sopradette funzioni esprimibili nei vari casi mediante funzioni di U e sussistendo la (4) si comprende come sia in più modi possibile pervenire a relazioni formali fra quelle e la $K(x, y)$.

dosi imbattuto nei problemi al contorno per le funzioni bi-armoniche in quattro variabili, anzichè far luce su di essi, passa ad occuparsi di altri problemi la risoluzione dei quali è estranea a quella dei precedenti, senza, peraltro, fare alcun riferimento ai lavori del SEVERI e di altri che già da tempo, in Italia, hanno lumeggiato quelle questioni.

([14]) B.K.F., pag. 106.

([15]) B.K.F., cap. IX.

([16]) G. FICHERA: *Sui teoremi di esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme,* (Nota I. e II) « Rendiconti Acc. Naz. Lincei », (8) 10 (1951), pp. 356-360, 452-457.