
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

EUGENIO MACCAFERRI

I teoremi di Pappo-Guldino.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 6
(1951), n.4, p. 323–327.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_323_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

I teoremi di Pappo-Guldino ⁽¹⁾.

Nota di EUGENIO MACCAFERRI (a Bologna).

Sunto. - *Si dimostrano elementarmente i teoremi di PAPPO-GULDINO, con alcune estensioni non consuete e applicazioni varie.*

Sono comunemente noti i cosiddetti teoremi di GULDINO ⁽²⁾, già considerati dal geometra alessandrino PAPPO (del III secolo d. C.), che riguardano la misura di figure di rotazione (solidi, superficie) intorno ad un asse.

Desidero darne una dimostrazione elementare, che può essere esposta nelle scuole medie superiori, specie nei Licei scientifici e negli Istituti industriali; poi indicherò alcune estensioni non consuete, e qualche applicazione.

1. ENUNCIATO. - Il volume del solido generato da una superficie piana nella sua rotazione intorno ad una retta del suo piano che non la attraversa è dato dal prodotto della sua area per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo centro di gravità.

La dimostrazione può farsi così: Adoperando per semplicità di linguaggio la parola area tanto per la superficie che per la sua misura, si abbia un'area piana A che ruota intorno alla retta r del suo piano che non la attraversa; sia O il suo baricentro e ρ la distanza di O dalla retta r . Si consideri l'area A divisa in un numero grandissimo n di parti piccolissime α_h di uguale estensione α , onde $A = n\alpha$.

In una rotazione infinitesima intorno all'asse r sia δ_h lo spostamento di α_h , generante il volume $\alpha_h\delta_h$, sicchè avremo il volume complessivo infinitesimo

$$(1) \quad \Sigma \alpha_h \delta_h = \alpha \Sigma \delta_h;$$

e sia δ lo spostamento corrispondente del baricentro O .

Consideriamo ora le n parti infinitesime α_h sollecitate da forze ortogonali eguali f ; queste avranno per risultante la forza nf agente sul baricentro O , e nella rotazione infinitesima predetta, per la

⁽¹⁾ Da una lettura-conversazione al Corso di perfezionamento di Matematica e Fisica dell'Università di Bologna.

Per riferimenti storici si legga la Nota del prof. A. AGOSTINI, *I baricentri di Torricelli*, in « Boll. dell'U. M. I. », giugno 1951.

⁽²⁾ GULDINO (PAOLO), matematico tedesco, gesuita (1577-1643).

eguaglianza dei lavori, avremo $f \sum \delta_k = nf \cdot \delta$, da cui la relazione

$$(2) \quad \sum \delta_k = n\delta.$$

Segue che il volume (1) dello spostamento infinitesimo dell'area A sarà

$$(3) \quad \alpha \sum \delta_k = \alpha \cdot n\delta = \alpha n \cdot \delta = A\delta,$$

ove δ è lo spostamento infinitesimo del baricentro, e quindi nell'intera rotazione il volume totale sarà $V = A \cdot 2\pi\rho$ ⁽³⁾.

II. ENUNCIATO. — L'area della superficie generata da una linea piana nella sua rotazione intorno ad una retta del suo piano che non la attraversa è data dal prodotto della sua lunghezza per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo centro di gravità.

Dimostrazione analoga alla precedente.

Si può aggiungere un terzo e anche un quarto enunciato, estensione dei precedenti, che non ho trovato nei libri da me consultati.

III. ENUNCIATO. — Se si ha in un piano un gruppo di n punti che ruota intorno ad una retta del loro piano che li lascia tutti da banda, il cammino complessivo degli n punti è eguale ad n volte il cammino percorso dal centro di gravità del gruppo ⁽⁴⁾.

Dimostrazione analoga a quella del primo enunciato, anzi si potrebbe cominciare con questa che si presenta manifestamente più semplice.

Si deduce poi immediatamente che il baricentro del gruppo di punti ha una distanza dall'asse di rotazione che è la media aritmetica delle distanze dei singoli punti dell'asse.

È importante notare che nei tre precedenti enunciati non è escluso che punti, o parti, del contorno della figura rotante siano sull'asse di rotazione, sempre che la figura rotante sia in un solo semipiano limitato dall'asse.

Veniamo ora al quarto enunciato, in cui ci limitiamo a considerare una superficie piana rotante.

IV. ENUNCIATO. — Se si ha una superficie piana rotante intorno ad una retta del suo piano che la attraversi, il prodotto della sua area per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo centro di gravità è eguale alla differenza dei volumi generati nella rotazione delle due parti della superficie separate dall'asse di rotazione.

⁽³⁾ È poi manifesto che il volume generato da una rotazione parziale è eguale al prodotto dell'area A pel cammino corrispondente percorso dal baricentro.

⁽⁴⁾ Cioè dal punto d'applicazione della risultante di n forze eguali e parallele agenti su gli n punti del gruppo.

La dimostrazione è abbastanza semplice, ma non immediata.

La superficie σ sia divisa dall'asse α in due parti σ' , σ'' di cui O' , O'' sono i baricentri, essendo A l'intersezione di $O'O''$ con α ⁽⁵⁾. Il baricentro O della σ sarà sul segmento $O'O''$, per es. sul segmento $O'A$; avremo

$$O'O : O''O = \sigma'' : \sigma',$$

onde componendo

$$O'O : O'O'' = \sigma'' : \sigma,$$

da cui

$$O'O = \frac{O'O'' \cdot \sigma''}{\sigma};$$

ora

$$OA = O'A - O'O = O'A - \frac{O'O'' \cdot \sigma''}{\sigma} = \frac{O'A \cdot \sigma - O'O'' \cdot \sigma''}{\sigma},$$

e quindi

$$\begin{aligned} OA \cdot \sigma &= O'A(\sigma' + \sigma'') - (O'A + O''A)\sigma'' \\ OA \cdot \sigma &= O'A \cdot \sigma' - O''A \cdot \sigma''; \end{aligned}$$

ma OA , $O'A$, $O''A$ sono proporzionali alle distanze r , r' , r'' di O , O' , O'' dall'asse α , onde

$$r\sigma = r'\sigma' - r''\sigma'',$$

e quindi

$$\sigma \cdot 2\pi r = \sigma' \cdot 2\pi r' - \sigma'' \cdot 2\pi r''$$

ciò che dimostra l'assunto.

APPLICAZIONI

È notissima l'applicazione del I e II enunciato per la determinazione del volume e della superficie del toro, generato nella rotazione di un cerchio intorno ad una retta r del suo piano che non lo attraversi. Il centro O del cerchio è il baricentro tanto della superficie che della circonferenza che la racchiude: se R è il raggio del cerchio e ρ è la distanza di O dalla retta r , avremo per il volume e la superficie del toro le espressioni

$$V = \pi R^2 \cdot 2\pi \rho = 2\pi^2 R^2 \rho, \quad S = 2\pi R \cdot 2\pi \rho = 4\pi^2 R \rho,$$

onde

$$V = R \cdot \frac{S}{2}.$$

Consideriamo ora un poligono regolare per es. un esagono regolare che ruota intorno ad una retta del suo piano che non lo attra-

⁽⁵⁾ Si disegni la figura, con $O'O''$ comunque inclinato all'asse α .

versi: in questo caso potremo applicare tutti i primi tre enunciati, considerando il solido generato dalla rotazione, ovvero la superficie ovvero il percorso complessivo dei suoi vertici, essendo sempre il medesimo il baricentro. (Si potrà anche applicare il quarto enunciato.)

Si noti tuttavia che in un poligono qualunque il baricentro della superficie non coincide in generale con quello del contorno e questo con quello dei suoi vertici. E la medesima cosa si può dire del baricentro di un'area piana qualunque e di quello del suo contorno.

Consideriamo ad es. un triangolo di lati a, b, c di cui il centro di gravità è, come è noto, il punto di concorso delle mediane, che dista per es. dal lato a di $1/3$ dell'altezza corrispondente h_a . Si dimostra ⁽⁶⁾ che il baricentro del contorno è il punto di concorso delle bisettrici del triangolo che ha per vertici i punti medi dei lati del triangolo dato, e si deduce che la sua distanza d_a dal lato a è data da

$$d_a = \frac{h_a}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} \quad (?).$$

Quest'ultimo risultato si ottiene pure dal teorema di GULDINO (II enunciato), giacchè facendo rotare il triangolo intorno al lato a deve aversi l'eguaglianza delle aree

$$(a+b+c) \cdot 2\pi\rho = \pi h_a(b+c)$$

la quale dà appunto per $\rho = d_a$ l'espressione precedente.

Il baricentro dei tre vertici è lo stesso punto di concorso delle tre mediane, come si ottiene immediatamente.

In generale quando sia nota la misura della figura risultante dalla rotazione di una figura piana, si può viceversa, determinare la distanza del baricentro di questa dall'asse di rotazione applicando il corrispondente enunciato del teorema di GULDINO.

Si abbia per es. un semicerchio di raggio R che ruota intorno al diametro che lo limita; il baricentro dell'area del semicerchio si troverà sul raggio mediano del semicerchio ad una distanza ρ dal centro data dall'eguaglianza dei volumi

$$\frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi\rho = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

⁽⁶⁾ V. ad es. CINTOLESI, *Meccanica*, Ed. Le Monnier, pag. 108-9.

⁽⁷⁾ Cfr *Manuale* del COLOMBO, ultime edizioni.

da cui

$$\rho = \frac{4R}{3\pi};$$

il baricentro della circonferenza si troverà pure sul raggio mediano, e ad una distanza ρ' dal centro data dall'eguaglianza delle aree

$$\pi B \cdot 2\pi\rho' = 4\pi R,$$

da cui

$$\rho' = \frac{2R}{\pi},$$

risultando

$$\rho' = \frac{3}{2}\rho.$$

Se si considera un trapezio di cui a , b sono le basi ed h l'altezza, il baricentro O dell'area è manifestamente sulla retta che unisce i punti medi delle basi, e si dimostra direttamente, o col teorema di GULDINO (I enunciato) facendo rotare il trapezio intorno alla base maggiore a , che la distanza di O dalla a è data da

$$d_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b} \quad (^8).$$

Si dimostra poi col teorema di GULDINO (II enunciato) che il baricentro del contorno del trapezio ha una distanza dalla base a data da

$$d_a' = \frac{h}{2} \frac{2b + c + d}{a + b + c + d}$$

ove c , d sono i due lati non paralleli. Il baricentro dei quattro vertici del trapezio è nell'inserzione della mediana delle due basi e di quella dei due lati non paralleli, e perciò nel punto di mezzo di ciascuna di esse.

Quest'ultima proprietà si estende ad un quadrilatero qualunque, pel quale il baricentro dei 4 vertici è nell'intersezione delle mediane delle due coppie di lati opposti, mediane che sono in ogni caso le diagonali di un parallelogramma.

(⁸) Cfr. COLOMBO, l. c. La stessa formula si ottiene se a è la base minore