BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO VAONA

Sulla trasformazione linearizzante di una corrispondenza puntuale fra spazi lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 293–299.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_293_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sulla trasformazione linearizzante di una corrispondenza puntuale fra spazi lineari.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna).

Sunto. - *Si dà una nuova definizione geometrica di trasformazione linearizzante, recentemente introdotta dal ČECH, e si collega questa nozione con altre già note, introdotte in Italia. Si fa inoltre vedere come certi problemi, cui si perviene attraverso la nozione di trasformazione linearizzante, siano equivalenti ad altri cui si giunge colla nozione di direzione caratteristica.*

1. Recentemente il CECH [1], ha dedicato una serie di importanti Memorie alla geometria proiettivo-differenziale delle corrispondenze fra due spazi lineari S_r. Alla base delle ricerche del ČECH è il concetto di *trasformazione linearizzante.*

Il prof. VILLA, nella conferenza tenuta lo scorso ottobre a Reggio Calabria al IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana [2], ha

[1] Si veda: E. ČECH, *Geométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*, I. II. III, « Čas. Pro Pest. Mat. a Fys. ». Vol. 74, pp. 32-48, Vol. 75, pp. 123-158 (1950).

[2] Si veda: M. VILLA, *Per una geometria proiettiva-differenziale in*

proposto fra l'altro di porre in relazione la trasformazione linearizzante e le altre nozioni e risultati del ČECH coi risultati stabiliti in questi ultimi anni da Lui stesso, dal BOMPIANI e da altri in Italia.

In questa Nota, data una nuova definizione geometrica di trasformazione linearizzante, si mostrano i legami esistenti con enti già noti introdotti dal BOMPIANI [3] e dal VILLA.

Si dimostra inoltre che il problema della determinazione delle trasformazioni fra S_r $(r > 2)$ che possegono un cono V^2_{r-1} di direzioni caratteristiche per ogni punto, proposto dal VILLA al III Congresso dell' U. M. I. (Pisa, 1948) [4], è equivalente a quello ora risolto dal ČECH nelle Memorie citate.

Infine si fa vedere come un altro problema, cui si perviene colla nozione di trasformazione linearizzante, sia equivalente a quello della determinazione delle trasformazioni puntuali fra S_r aventi un S_{r-1} di direzioni caratteristiche per ogni punto.

2. *La trasformazione linearizzante di una corrispondenza fra piani.*

Sia T una trasformazione fra due piani π, $\bar{\pi}$ ed $(O, \bar{O})$ una coppia regolare di punti corrispondenti. È ben noto che esistono ∞^2 omografie (tangenti) che approssimano T fino agli intorni del 1° ordine della coppia $(O, \bar{O})$ e che subordinano fra i fasci di rette di centri $(O, \bar{O})$ una stessa proiettività ω. Sia K un' omografia tangente e p, $\bar{p}$ due rette corrispondenti in ω. Se γ è una curva tangente a p, siano $\bar{\gamma}$ e $K\gamma$ le curve corrispondenti in T e K alla curva γ. Il ČECH ha dimostrato che, in generale, esiste una retta $\bar{p}'$ per $\bar{O}$ luogo dei punti S tali che proiettando da S $\bar{\gamma}$ e $K\gamma$ su una retta (non passante per S) le proiezioni hanno in $\bar{O}'$ un contatto analitico del 2° ordine. La retta $\bar{p}'$ è indipendente dalla curva γ tangente a p e dalla retta su cui si proietta ma dipende esclusivamente dall' intorno del 2° ordine di T e dalla omografia tangente K. La retta $\bar{p}'$ è chiamata dal ČECH *retta* K-*linearizzante* della retta $\bar{p}$.

Si chiama poi *trasformazione* K-*linearizzante* la corrispondenza, fra le rette del fascio di centro $\bar{O}$ (ed analogamente per O), che associa ad ogni retta la sua K-linearizzante.

([3]) Si veda: E. BOMPIANI, *Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. 6, pp. 145-151 (1949).

([4]) Si veda: M. VILLA, *Alcuni risultati e problemi sulle trasformazioni puntuali*, « Atti del III Congresso dell' U. M. I., Pisa (1948) », Ed. Cremonese della Casa Ed. Perrella, Roma. pp. 157-159 (1951).

La trasformazione T sia rappresentata, com'è sempre possibile, dagli sviluppi locali

$$\bar{x} = x + \varphi_2(x, y) + [3] \qquad (1)$$
$$\bar{y} = y + \psi_2(x, y + [3],$$

dove φ_2, ψ_2 sono forme di 2° ordine in x, y e con [3] si denotano termini di grado > 2.

Le equazioni della trasformazione K-linearizzante relativa all'omografia tangente di equazioni

$$\bar{x} = \frac{x}{1 + \alpha x + \beta y}, \quad \bar{y} = \frac{y}{1 + \alpha x + \beta y}, \qquad (2)$$

si scrivono

$$\rho l_1' = \varphi_2(l_1, l_2) + l_1(\alpha l_1 + \beta l_2) \qquad (3)$$
$$\rho l_2' = \psi_2(l_1, l_2) + l_2(\alpha l_1 + \beta l_2) \qquad (\rho \neq 0),$$

ove si indichi con $\frac{x}{l_1} = \frac{y}{l_2}$ l'equazione di una retta p e con $\frac{x}{l_1'} = \frac{y}{l_2'}$ l'equazione della retta p' K-linearizzante.

Della trasformazione linéarizzante si può dare anche la definizione seguente:

Si consideri l'E_2 di π corrispondente in T all'E_2 di flesso appartenente ad una retta $\bar{p}$ e lo si proietti da una punto S sulla sua tangente p. Si stabilisce così una corrispondenza (fino al 2° ordine) fra i punti di $(p, \bar{p})$. Il luogo dei punti S per cui tale corrispondenza è approssimata fine al 2° ordine dall'omografia tangente K è la retta K-linearizzante di p.

Recentemente il BOMPIANI [5] ha associato ad ogni coppia di rette uscenti da un punto O una omografia fra i due piani determinata dall'intorno del 2° ordine di O. Questa omografia è strettamente legata al concetto di trasformazione linearizzante.

Si ha che:

L'omografia associata dal BOMPIANI *ad una coppia di rette per* O (opp. $\bar{O}$) *coincide con l'omografia tangente K per cui le due rette sono K-linearizzanti l'una dell'altra.*

Il ČECH [6] ha dimostrato che nel caso in cui le tre rette caratteristiche per O siano distinte esistono tre omografie tangenti la cui trasformazione linearizzante è degenere nel senso che per ogni retta la linearizzante è una retta fissa (*totalmente linearizzante*). Si verifica facilmente, mediante le (3), che:

Le tre omografie tangenti la cui trasformazione linearizzante è

[5] Si veda: E. BOMPIANI, op. cit. in [3], p. 147.

[6] Si veda: E. ČECH, op. cit. vol. 75, p. 124.

degenere sono le tre omografie caratteristiche del VILLA [7] *e la retta totalmente linearizzante per l'omografia caratteristica associata a due rette inflessionali è la retta inflessionale residua.*

Notiamo infine che *le omografie tangenti la cui trasformazione linearizzante si riduce ad una proiettività sono le omografie tangenti che contengono una proiettività caratteristica.*

3. *La trasformazione linearizzante di una corrispondenza fra* S_r $(r > 2)$.

Per $r > 2$ la trasformazione linearizzante relativa ad un'omografia tangente K si può definire al seguente modo:

Sia $(O, \bar{O})$ una coppia regolare di punti corrispondenti e $(p, \bar{p})$ una coppia di rette per $(O, \bar{O})$ corrispondenti (fino al 1° ordine) nella trasformazione. Si consideri l'E_2 corrispondente all'E_2 di flesso appartenente a $\bar{p}$ e lo si proietti da un punto S del suo piano di appartenenza π sulla tangente p. Si stabilisce così una corrispondenza (fino al 2° ordine) fra i punti delle rette $(p, \bar{p})$. Il luogo dei punti S di π per cui tale corrispondenza è approssimata fino al 2° ordine dall'omografia tangente K è la retta K-linearizzante di p.

Il piano π dicesi *piano linearizzante* ed è manifestamente indipendente da K.

La trasformazione fra $S_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ ed $\bar{S}_r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r)$ si può localmente rappresentare con equazioni della forma

$$\bar{x}_i = x_i + \xi_i(x) + [3]' \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

dove $\xi_i(x)$ è un polinomio omogeneo di grado 2 in $x_1, x_2, \ldots, x_r$ e $[3]$ ha il solito significato.

Si trova che le equazioni della trasformazione linearizzante relativa all'omografia tangente di equazioni

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{1 - \Sigma\alpha_j x_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r), \tag{5}$$

si scrivono

$$\rho l_i' = \xi_i(l) - l_i \Sigma\alpha_j l_j , \tag{6}$$

ove si indichino con $\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \ldots = \frac{x_r}{l_r}$ le equazioni di una retta p e con $\frac{x_1}{l'_1} = \frac{x_2}{l'_2} = \ldots, = \frac{x_r}{l'_r}$ le equazioni della sua K-linearizzante p'.

[7] Per la nozione di omografia caratteristica si veda: M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza fra piani proiettivi.* II. *Loro costruzione.* «Rend. Acc. d'Italia», ser. VII, vol. 4, n. 5 (1942).

Il BOMPIANI [8], estendendo il risultato ricordato al n. precedente, ha associato ad ogni r-pla di rette uscenti da O, fra loro linearmente indipendenti, una omografia fra i due S_r dipendente dall'intorno del 2° ordine di O. Ora si ha che:

L'omografia associata dal BOMPIANI *ad* r *rette per* O, *linearmente indipendenti, coincide con l'omografia tangente* K *per cui la retta K-linearizzante di ciascuna di esse appartiene all'* S_{r-1} *individuato delle rimanenti.*

Indichiamo col BOMPIANI con $(\underset{\sigma}{l_1}, \underset{\sigma}{l_2}, \ldots, \underset{\sigma}{l_r})$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, r)$ le coordinate di r rette per O. con $\Delta \neq 0$ il determinante $|l_i|$. con $\overset{\sigma}{l_i}$ gli elementi reciproci delle $\underset{\sigma}{l_i}$ in Δ, con $\underset{\sigma}{\xi_i}$ le $\underset{\sigma}{\xi_i}(l)$ ed infine con Δ_σ il valore di Δ quando al posto delle $\underset{\sigma}{l_i}$ della σ-esima riga si sostituiscono le $\underset{\sigma}{\xi_i}$.

Si ha allora che l'iperpiano contenente le $r-1$ rette residue alla $\underset{\sigma}{l}$, ha l'equazione

$$\Sigma_i \overset{\sigma}{l_i} x_i = 0.$$

Affinchè esso contenga la retta K-linearizzante della $\underset{\sigma}{l}$, deve aversi

$$\Delta_\sigma - \Delta \Sigma_i \alpha_i \underset{\sigma}{l_i} = 0. \tag{7}$$

Le (7) rappresentano un sistema di r equazioni lineari nelle r incognite α_i il cui determinante è $\Delta \neq 0$. Si ha pertanto la sola soluzione

$$\alpha_i = \Sigma_\sigma \frac{\Delta_\sigma \overset{\sigma}{l_i}}{\Delta}.$$

L'omografia K così ottenuta coincide con quella considerata dal BOMPIANI.

4. *Applicazioni.*

Il ČECH nei lavori citati [9] propone di classificare le trasformazioni puntuali fra S_r a seconda della natura delle trasformazioni linearizzanti relative. Pone subito il seguente problema: determinare le trasformazioni fra S_r le quali posseggono un'omografia tangente K in ogni coppia generica di punti corrispondenti la cui trasformazione K-linearizzante è *degenere* nel senso che ogni retta ha come K-linearizzante una retta fissa *(totalmente linearizzante).*

[8] Si veda: E. BOMPIANI, op. cit. in [3], p. 149.
[9] Si veda: E. ČECH, op. cit. vol. 75, p. 123.

Il problema ha senso per $r > 2$ ed è completamente risolto dal Čech.

Si può provare che tale problema coincide con uno posto dal Villa al III° Congresso dell'U. M. I. (Pisa, 1948) e cioè col problema della determinazione delle trasformazioni puntuali fra S_r $(r > 2)$ per le quali le direzioni caratteristiche, in una coppia generica, costituiscono (a prescindere da una di esse) un cono V^2_{r-1}.

Si dimostra infatti che in generale:

Se una corrispondenza fra due S_r $(r > 2)$, *in una coppia regolare* $(O, \bar{O})$, *possiede un' omografia tangente* K *la cui trasformazione* K*-linearizzante è degenere, nel senso che ogni retta ha come* K*-linearizzante una retta fissa, la corrispondenza possiede in* $(O, \bar{O})$ *due coni* V^2_{r-1} *corrispondenti di direzioni inflessionali; l'omografia tangente* K *è l'omografia che subordina fra le coppie di rette inflessionali dei due coni le proiettività caratteristiche* [10] *e la retta totalmente linearizzante è la retta inflessionale residua al cono* V^2_{r-1}: *e inversamente.*

Omettiamo per brevità la dimostrazione, che si conduce facilmente assumendo riferimenti opportuni.

Dopo il caso già trattato del Čech il più semplice che si presenta, secondo la classificazione proposta dal Čech, è senza dubbio quello delle corrispondenze fra S_r $(r > 2)$ che posseggono un'omografia tangente K in ogni coppia generica di punti corrispondenti la cui trasformazione K-linearizzante è un'omografia.

Si tratta cioè delle corrispondenze per le quali le direzioni inflessionali, in un punto generico, costituiscono un iperpiano (a prescindere da r di esse [11]).

Si ha infatti:

Se una corrispondenza fra due S_r $(r > 2)$, *in una coppia regolare* $(O, \bar{O})$, *possiede un'omografia tangente* K *la cui trasformazione* K*-linearizzante è un'omografia, la corrispondenza possiede in* $(O, \bar{O})$ *due iperpiani corrispondenti di rette inflessionali; l'omogra-*

[10] È noto per $r = 3$ (e si estende facilmente ad r qualunque) che nel caso in cui la trasformazione possegga due coni di direzioni caratteristiche uscenti da una coppia regolare $(O, \bar{O})$, le infinite proiettività caratteristiche relative alle coppie di rette dei due coni sono subordinate da una stessa omografia. Si veda: G. Martini, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi nel caso conforme*, « Rend. Ist. Lombardo » vol. LXXXII, pp. 223-232 (1949); si veda anche: A. Cossu, *Trasformazioni conformi in una coppia di punti corrispondenti e nei punti dei loro intorni del 1° ordine*, « Questo Boll. », ser. III, vol. IV, pp. 122-127 (1949).

[11] È questo il caso generale, ma non è escluso che si presentino, come appare dal seguito, casi particolari in cui le rette caratteristiche residue all'iperpiano sono infinite e costituiscono degli S_h con $0 < h < r$.

fia tangente K è l'omografia che subordina fra le coppie di rette inflessionali dei due iperpiani le proiettività caratteristiche, le rette unite della omografia K-linearizzante sono le rette caratteristiche residue; e inversamente.

Per la dimostrazione assumiamo in S_r, $\overline{S}_r$ riferimenti proiettivi in guisa che la omografia K abbia le equazioni $\overline{x}_i = x_i$.

Le equazioni della trasformazione linearizzante relativa si scrivono

(8) $$\rho l_i' = \xi_i(l).$$

Perchè le (8) rappresentino un'omografia deve aversi $\xi_i(l) = \xi(l)\varphi_i(l)$, dove $\xi(l)$ e $\varphi_i(l)$ sono polinomi omogenei di 1° grado nelle l_i.

Le equazioni di T si scrivono

(8) $$\overline{x}_i = x_i + \xi(x)\varphi_i(x) + [3]$$

e quindi sono caratteristiche le rette dell'iperpiano $\xi(x) = 0$ e le rette le cui equazioni si ottengono uguagliando a zero i minori del 2° ordine estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_r \end{matrix} \right\|.$$

Dalle equazioni scritte segue l'enunciato.