
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUCIEN GODEAUX

Sur la construction de surfaces irrégulières.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 6
(1951), n.4, p. 277-280.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_277_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sur la construction de surfaces irrégulières (*).

Nota di LUCIEN GODEAUX (a Liège).

Sunto. - *Costruzione di superficie irregolari come immagine di involuzioni cicliche appartenenti alla superficie delle coppie di punti di una curva algebrica.*

Considérons une courbe L , de genre π , non hyperelliptique, contenant une involution cyclique γ , d'ordre premier $p > 2$ et de genre $\pi' > 0$ engendrée par une transformation birationnelle τ de L en soi. Soit F la surface des couples de points non ordonnés de L . A un point P de cette surface, image du couple P_1P_2 de L , nous faisons correspondre le point P' image du couple $P'_1P'_2$ que τ fait correspondre au couple P_1P_2 . Nous définissons ainsi sur F une transformation birationnelle T , de période p , engendrant une involution I possédant un nombre fini de points unis. Ceux-ci représentent les couples de points unis de γ , distincts ou non. Nous désignerons par Φ une surface image de l'involution I .

Prenons pour modèle projectif de L la courbe canonique d'ordre $2\pi - 2$ de $S_{\pi-1}$. La transformation τ est déterminée par une homographie présentant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$, le premier, de dimension $\pi' - 1$, ne rencontrant pas L et les autres rencontrant éventuellement la courbe aux points unis de γ . Nous supposons qu'en un de ces points, la courbe L n'est pas tangente à l'axe ponctuel qui le contient. En rapportant projectivement les complexes linéaires de droites de $S_{\pi-1}$ aux hyperplans d'un espace à $\frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - 1$ dimensions, on obtient pour modèle projectif de F une surface d'ordre $(\pi - 1)(4\pi - 9)$, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques (SEVERI).

Sur F , T est déterminée par une homographie présentant p axes ponctuels $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{p-1}$ que l'on peut former de la manière suivante :

Si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous pouvons attacher à $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$ respectivement les nombres $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{p-1}$. Cela étant :

(*) Conferenza tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Bologna il 5 Novembre 1951.

N. D. R.: In ottemperanza alla deliberazione dell'Assemblea del 22 aprile 1951 le Note di questo « Bollettino », a partire dal 1° gennaio 1952 saranno pubblicate unicamente se redatte in lingua italiana.

Σ_0 est déterminé par les images des droites de σ_0 , des droites s'appuyant sur σ_1 et σ_{p-1} , sur σ_2 et σ_{p-2} , A Σ_0 est donc attaché le nombre $\varepsilon^0 = 1$.

Σ_1 est déterminé par les images de droites des σ_1 , des droites s'appuyant sur σ_0 et sur σ_2 , sur σ_3 et sur σ_{p-1} , A Σ_1 est donc attaché le nombre ε^1 .

Et ainsi de suite.

Pour déterminer la structure des points unis de l'involution I , il suffit de connaître le nombre α déterminé de la manière suivante: Si U est un point uni de I , le plan tangent à F en U est uni pour l'homographie T . Rapportons ce plan à un triangle de référence $O_1O_2O_3$ tel que U coïncide avec le sommet O_3 . L'homographie déterminée par T dans le plan peut s'écrire

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \eta x_2 : \eta^2 x_3,$$

η étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Désignons par $U'_1, U'_2, \dots, U'_8$ les points unis de γ sur L et par $U_{i,k}$ le point de F qui représente le couple U'_i, U'_k .

Premier cas. Les points unis U'_i, U'_k appartiennent à une même axe σ_k de τ . Soient t_i, t_k les tangentes à L en U'_i, U'_k .

Supposons en premier lieu que t_i, t_k s'appuient en des points P_i, P_k sur un même axe σ_j et considérons l'espace U'_i, U'_k, P_i, P_k . Prenons ces points comme sommets d'un tétraèdre de référence et soient x_i, x_k, y_i, y_k les coordonnées correspondantes. Dans cet espace τ détermine l'homographie

$$x'_i : x'_k : y'_i : y'_k = \varepsilon^h x_i : \varepsilon^h x_k : \varepsilon^j y_i : \varepsilon^j y_k.$$

Une quadrique passant par les droites U'_i, U'_k, t_i, t_k a pour équation

$$(1) \quad ax_i y_k + bx_k y_i + cy_i y_k = 0.$$

L'homographie lui fait correspondre la quadrique

$$(2) \quad \varepsilon^h (ax_i y_k + bx_k y_i) + c \varepsilon^j y_i y_k = 0,$$

qui se raccorde à la première le long de la droite U'_i, U'_k . On en conclut que $U_{i,k}$ est un point uni de première espèce.

Supposons maintenant que t_i s'appuie en P_i sur σ_j et t_k en P_k sur σ_l . L'homographie devient

$$x'_i : x'_k : y'_i : y'_k = \varepsilon^l x_i : \varepsilon^h x_k : \varepsilon^j y_i : \varepsilon^l y_k.$$

Cette fois, la quadrique transformée de la quadrique (1) ne se raccorde plus à celle-ci le long de U'_i, U'_k et $U_{i,k}$ est un point uni de seconde espèce.

Le plan tangent à F en U_{ik} est déterminé par le points U_{ik} , U_{ii} , U_{kk} et dans ce plan on a l'homographie

$$x'_1 : x_2 : x'_3 = \varepsilon^{i+l} x_1 : \varepsilon^{h+l} x_2 : \varepsilon^{h+j} x_3.$$

Le nombre α , compris entre l et p , est donné par la congruence

$$(p + h - j)\alpha \equiv p + h - l, \quad (\text{mod } p).$$

Deuxième cas. U'_i et U'_k appartiennent le premier à σ_i , le second à σ_i , t_i s'appuie sur σ_j et t_k sur σ_m . Un raisonnement analogue au précédent montre que α est déterminé par la congruence

$$(p + h - m)\alpha \equiv p + l - j, \quad (\text{mod } p)$$

Troisième cas. Il nous reste à considérer le points U_{ii} . Soient K les courbes de F qui représentent les couples de points de L dont un point est fixe. Les système $\{K\}$ admet pour enveloppe K_0 (représentant les couples de points de L formés de deux points confondus). Si K_i est la courbe K qui passe par U_{ii} , le point de F infiniment voisin de U_{ii} sur les courbes K_0 et K_i est uni de première espèce pour I .

Soit L' la courbe image de l'involution γ et soit F' la surface des couples de points non ordonnés de L' . Entre F' et Φ , on a une correspondance $(1, p)$ et les courbes canoniques de F' ont pour homologues sur Φ des courbes qui appartiennent à des courbes canoniques de cette surface. Sur F' , elles ont pour homologues des des courbes découpées par les hyperplans passant par $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{p-1}$. On en conclut qu'aux courbes canoniques de Φ correspondent sur F' les courbes découpées par les mêmes hyperplans. Par conséquent, si $s_1, s_2, \dots, s_{p-1}$ sont les dimensions des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$, le genre géométrique de Φ est

$$p_g = \frac{1}{2} \pi'(\pi' - 1) + (s_1 + 1)(s_{p-1} + 1) + \dots + (s_\gamma + 1)(s_{\gamma+1} + 1),$$

où l'on a posé $p = 2\gamma + 1$.

Les surfaces F et F' étant irrégulières, il en est de même de Φ , mais le calcul du genre arithmétique de Φ exige la connaissance de la structure de points unis de I . Notons cependant que dans tous les exemples que nous avons étudiés, Φ a l'irrégularité π' .

BIBLIOGRAPHIE

Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Colloque de Géométrie algébrique de Liège, Paris.

Masson, 1950, pp. 177-195); *Construction de surfaces algebrique irregulieres* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1950, pp. 14-22); *Involutions irregulieres appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algebrique* (Idem, pp. 102-112); *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algebrique* (Idem, pp. 383-387).