
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIULIANO TORALDO DI FRANCIA

Moti uniformi di un liquido viscoso fra due sfere concentriche rotanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 5
(1950), n.3-4, p. 273–281.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_273_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Moti uniformi di un liquido viscoso fra due sfere concentriche rotanti.

Nota di GIULIANO TORALDO DI FRANCIA (a Firenze).

Sunto - Si applica un procedimento di approssimazioni successive al calcolo del moto uniforme di un liquido viscoso fra due pareti sferiche rotanti. Nella prima approssimazione si trova il noto movimento per sfere rigide. Nella seconda approssimazione interviene un moto di rimescolamento nel piano meridiano. Infine nella terza approssimazione si studia in qual modo il moto nel piano meridiano influisca su quello lungo i paralleli, modificando il momento esercitato dal liquido su una delle due pareti che si suppone fissa.

1. È noto che il coefficiente di viscosità dei fluidi può essere ricavato sperimentalmente, oltre che col metodo classico del deflusso di POISEUILLE, anche mediante la misura di un momento

(³) Se $f(x)$ è una trascendente intera alla (9) può sostituirsi l'altra

$$M(r) \leq e^{\beta r^2}, \quad \text{con } \beta < 1/4.$$

di torsione. Per esempio, il fluido può essere racchiuso fra due pareti cilindriche o sferiche, rispettivamente coassiali o concentriche, di cui una rotante uniformemente, e si può misurare il momento necessario per mantenere fissa l'altra.

Or i primi che sperimentarono con le sfere concentriche ⁽¹⁾, ⁽²⁾ trovarono che, utilizzando l'espressione del momento data da KIRCHHOFF ⁽³⁾ per il moto lento, risultava un coefficiente di viscosità che aumentava al crescere della velocità di rotazione. La spiegazione del fenomeno si intuisce facilmente in via qualitativa, quando si tenga conto del fatto notato da STOKES ⁽⁴⁾ che un moto per sfere concentriche rigide (come, in particolare, quello della soluzione di KIRCHHOFF) non è possibile e che deve sussistere anche un moto (sia pure del secondo ordine) nei piani meridiani. Questo rimescolamento, che porta le particelle animate di maggiore velocità di rotazione verso le regioni ove la velocità di rotazione è minore e viceversa, è chiaramente causa di aumento del momento di torsione esercitato sulla parete fissa.

WHITEHEAD ⁽⁵⁾, dopo aver sviluppato un procedimento di approssimazioni successive per l'integrazione delle equazioni di NAVIER POISSON, lo applicò al calcolo del moto nei piani meridiani, provocato dalla rotazione uniforme di una sfera in un liquido indefinito. Le obiezioni teoriche, sollevate da LORD RAYLEIGH ⁽⁶⁾ e da LAMB ⁽⁷⁾, circa la validità del procedimento di WHITEHEAD, in pratica non ne infirmano l'applicabilità anche per velocità di rotazione non infinitesime, come fu dimostrato sperimentalmente da ZEMPLÉN ⁽⁸⁾.

La soluzione di KIRCHHOFF si ottiene considerando soltanto i termini del primo ordine rispetto alla velocità di rotazione. Il moto nei piani meridiani è del secondo ordine. Nel presente lavoro studieremo questo moto, per un fluido racchiuso fra due sfere concentriche. Il problema risolto da WHITEHEAD è contenuto in questo

(1) B. ELIE, *Variation du coefficient de viscosité avec la vitesse*, « Journ. de Phys. », 1, 225 (1882).

(2) C. G. BRODMANN, *Untersuchungen über den Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten*, « Ann. der Phys. », 45, 159 (1892).

(3) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über math. Phys.*, 1 *Mechanik*. (Leipzig, 1887) pag. 375.

(4) G. G. STOKES, *Math. and Phys. Papers*. (Cambridge, 1880), pag. 103.

(5) A. N. WHITEHEAD, *On the Motion of Viscous Incompressible Fluids*, « Quart. Journ. », 23, 78, (1889).

(6) LORD RAYLEIGH, *On the Flow of Viscous Liquids*, « Phil. Mag. », 36, 365, (1893).

(7) H. LAMB. *Hydrodynamics*, (Cambridge, 1924), pag. 558.

come caso particolare. Inoltre spingeremo l'approssimazione fino al terzo ordine, trovando in che modo il rimescolamento nei piani meridiani influenza il moto lungo i paralleli e, in particolare, come fa variare il momento esercitato sulla sfera fissa.

2. Evidentemente è utile per il nostro scopo scindere la velocità del fluido in una parte tangente al parallelo ed una parte giacente nel piano meridiano. Pertanto, supponendo il fluido incompressibile (ciò che nel nostro caso vale praticamente anche per i gas, come fu osservato da ZEMPLEN⁽⁸⁾), partiremo dalle equazioni per i moti a simmetria di rotazione di un liquido viscoso soggetto a forze di massa conservative⁽⁹⁾

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial t} - \nu \left(\Delta_2 H - \frac{H}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (rH)}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial (rH)}{\partial x} \right] = 0 \\ (1) \quad & \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \nu \left(\Delta_2 \Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{H}{r} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Omega}{r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Omega}{r} \right) = 0 \\ & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + 2\Omega r = 0. \end{aligned}$$

In queste equazioni r e x sono coordinate cilindriche (x asse di simmetria), t il tempo, $\nu = \mu/\rho$ il coefficiente di viscosità cinematico, H la componente della velocità secondo il parallelo, ψ la funzione di corrente del piano meridiano, tale che $rv_x = \partial\psi/\partial r$, $rv_r = -\partial\psi/\partial x$ e 2Ω la componente del vortice secondo il parallelo.

Sia R_1 il raggio della sfera interna e R_2 quello della sfera esterna. La sfera interna ruoti con velocità angolare costante ω e quella esterna sia fissa. Il liquido aderisca alle pareti senza slittamento. Ci sarà utile definire come numero di REYNOLDS il numero $\mathcal{R} = \omega R_2^2/\nu$, quantunque la velocità del fluido sia ovunque minore di ωR_2 .

Ci riferiremo a coordinate polari, anzichè cilindriche come nella (1), e con r indicheremo ora il raggio vettore. Inoltre, secondo un noto procedimento, cambieremo le unità di misura, scrivendo rR_2 al posto di r , $H\omega R_2$ al posto di H , $\psi\omega R_2^3$ al posto di ψ e $\Omega\omega$ al posto di Ω . Con questo dalle (1) si ricavano facilmente le se-

⁽⁸⁾ G. ZEMPLEN, *Untersuchungen über die innere Reibung der Gase*, « Ann. der Phys. », 29, 869, (1909); 38, 71, (1912).

⁽⁹⁾ Cfr. B. CALDONAZZO, *Sui moti di un liquido viscoso simmetrici rispetto a un asse*, « Rend. Ist. Lombardo », 58, 403, (1925).

guenti equazioni per il moto stazionario

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) - H = \\
 & - \mathfrak{R} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \right] \\
 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) - \Omega = & \mathfrak{R} H \left(\sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} - r \cos \theta \frac{\partial H}{\partial r} \right) \sin \theta + \\
 & + \mathfrak{R} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Omega}{\sin \theta} \right) \right] \sin \theta \\
 (4) \quad & r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = - 2r^3 \Omega \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Le equazioni scritte in questa forma sono particolarmente adatte per compiere le verifiche sulle soluzioni, che nel seguito daremo direttamente, senza tediare con i lunghi e poco perspicui passaggi attraverso agl'integrali generali.

3. Supponiamo da prima che \mathfrak{R} sia tanto piccolo da potersi trascurare il secondo membro della (2). Allora da essa si ottiene facilmente la soluzione di KIRCHHOFF

$$(5) \quad H_0 = \alpha(r^{-2} - r) \sin \theta$$

con $\alpha = \beta^3/(1 - \beta^3)$ e $\beta = R_1/R_2$. Si constata che H_0 soddisfa le condizioni al contorno $H_0 = 0$ per $r = 1$ (sfera esterna) e $H_0 = R_1 \sin \theta/R_2$ per $r = \beta$ (sfera interna). Dalla (5) si calcola il momento che il fluido esercita sulla sfera esterna

$$(6) \quad M_0 = 8\pi\mu\alpha\omega R_2^2.$$

Si osservi che nella (6) M_0 è dato in unità naturali (non ridotte).

Dalla (3) e dalla (4) si vede subito che in questa approssimazione ($\mathfrak{R} = 0$) la velocità nel piano meridiano è nulla; essa è dunque almeno del primo ordine rispetto a R .

Per passare a una seconda approssimazione, conserviamo nella (3) i termini del primo ordine in \mathfrak{R} . Valendosi della (5) per esprimere H al secondo membro, si ottiene

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) - \Omega = \\
 & \frac{3}{2} \mathfrak{R} \alpha^2 (r^{-4} - r^{-1}) \sin^2 \theta \sin 2\theta.
 \end{aligned}$$

Si può verificare che questa equazione è soddisfatta da

$$(8) \quad \Omega_1 = \frac{1}{4} \mathfrak{A} x^2 (r^{-4} + r^{-1} + \frac{3}{2} A r^{-3} - \frac{7}{2} B r^2) \sin 2\theta.$$

I primi due termini nella parentesi danno un integrale particolare dell'equazione non omogenea (7), mentre gli altri due termini costituiscono quella parte dell'integrale generale dell'equazione omogenea, che è sufficiente al nostro scopo.

Sostituiamo ora l'espressione (8) di Ω nel secondo membro della (4), ottenendo

$$(9) \quad r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2} \mathfrak{A} x^2 \left(r^{-1} + r^2 + \frac{3}{2} A - \frac{7}{2} B r^5 \right) \sin \theta \sin 2\theta.$$

Si può verificare che questa equazione possiede l'integrale

$$(10) \quad \psi_1 = \frac{1}{8} \mathfrak{A} x^2 (r^{-1} + r^2 + A + B r^5 + C r^3 + D r^{-2}) \sin \theta \sin 2\theta.$$

I primi quattro termini in parentesi danno un integrale dell'equazione (9) non omogenea, mentre gli altri due sono integrali della parte omogenea.

Sulle due superficie sferiche, cioè per $r = 1$ e $r = \beta$ le derivate prime rispetto a r e a θ della funzione di corrente devono essere nulle. Pertanto dalla (10) si ottiene subito il sistema

$$\begin{aligned} 5B + 3C - 2D &= -1, & 5B\beta^4 + 3C\beta^2 - 2D\beta^{-2} &= \beta^{-2} - 2\beta \\ A + B + C + D &= -2, & A + B\beta^5 + C\beta^3 + D\beta^{-2} &= -\beta^{-1} - \beta^2. \end{aligned}$$

Risolvendo, si hanno le espressioni dei coefficienti

$$(11) \quad \begin{aligned} B &= \frac{3 - 10\beta + 5\beta^2 + 12\beta^3 - 5\beta^4 - 18\beta^5 + 15\beta^6 - 2\beta^8}{-4\beta + 25\beta^4 - 42\beta^6 + 25\beta^8 - 4\beta^{11}}, \\ C &= \frac{-5 + 18\beta - 7\beta^2 - 20\beta^3 + 14\beta^5 + 7\beta^6 + 12\beta^7 - 25\beta^8 + 6\beta^{10}}{-4\beta + 25\beta^4 - 42\beta^6 + 25\beta^8 - 4\beta^{11}}, \\ A &= -\frac{1}{2}(7B + 5C + 5), & D &= \frac{1}{2}(5B + 3C + 1). \end{aligned}$$

Ecco alcuni valori dei coefficienti, calcolati con le (11), per diversi valori di β .

β	A	B	C	D
1/100	-50.0362	-72 5025	120.5180	-0.0050
1/5	-2.6262	-1.6826	2.4061	-0.0973
1/2	-1.3953	-0.1018	0,2994	-0.2035
2/3	-1.2627	-0.0166	-0.5182	-0.2357

Nella fig. 1 sono illustrati, ciascuno mediante un quarto di piano meridiano, i casi $\beta = 1/100$, $\beta = 1/5$, $\beta = 1/2$, $\beta = 2/3$. L'asse di rotazione giace nel piano della figura ed è diretto dal basso all'alto. Sono tracciate le linee di corrente $\psi = \text{costante}$, per valori equidistanti della costante, contrassegnati convenzionalmente con

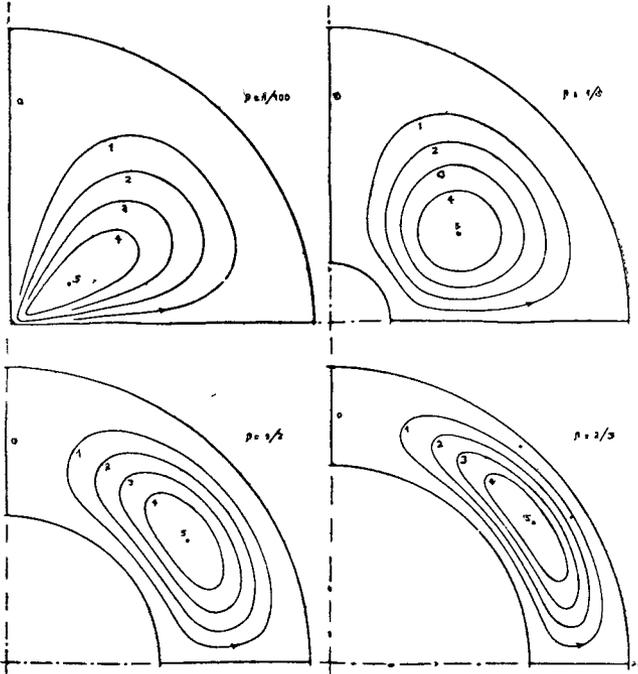


Fig. 1.

0, 1, 2, 3, 4, 5. La linea di corrente che degenera in un punto ha in tutti i casi l'anomalia $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$, come si ricava facilmente dalla (10).

4. Passiamo ora a una terza approssimazione, conservando i termini in \mathfrak{R}^2 . Per questo sostituiremo al secondo membro della (2) l'espressione (5) di H e l'espressione (10) di ψ . Si giunge così all'equazione

$$(12) \quad \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) - H =$$

$$= \frac{1}{4} \mathfrak{R}^2 \alpha^2 \{ 2[Dr^{-5} - Ar^{-3} - 4Dr^{-2} - 6r^{-1} - 2A - 4C - 6Br^2 + Cr^2 + 3Br^5] \sin^3 \theta +$$

$$[-Dr^{-5} + r^{-4} + 3Ar^{-3} + 10Dr^{-2} + 15r^{-1} + 6A + 9C + (13B + 2)r^2 - 4Br^5] \sin^5 \theta \}.$$

Scriveremo l'integrale di questa equazione nella forma $H = H_0 + H_2$, nella quale H_0 rappresenta la soluzione (5) di KIRCHHOFF e H_2 è il termine correttivo provocato dal moto nel piano meridiano. Si verifica che H_2 può avere la forma

$$(13) \quad H_2 = \frac{1}{4} \mathfrak{R}^2 \alpha^3 \left[-\frac{4}{5} ar^{-4} + cr^{-2} + dr - \frac{4}{5} br^2 + \varphi(r) \right] \sin \theta + [ar^{-4} + br^2 + \chi(r)],$$

essendo

$$(14) \quad \begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{D}{6} r^{-5} + \frac{4}{35} r^{-4} \log r + \frac{2}{25} r^{-4} + \frac{A}{2} r^{-3} + r^{-1} + C + \frac{4B+2}{3} r^2 + \frac{C}{5} r^2 + \frac{5J}{18} \\ \chi(r) &= -\frac{D}{8} r^{-5} - \frac{1}{7} r^{-4} \log r - \frac{A}{2} r^{-3} - Dr^{-2} - \frac{5}{4} r^{-1} - \frac{2A+3C}{4} - \\ &\quad - \frac{13B+2}{6} r^2 - \frac{2B}{9} r^5. \end{aligned}$$

Nella (13) la parte corrispondente a $\varphi(r)$ e a $\chi(r)$ rappresenta un integrale dell'equazione non omogenea (12), mentre la parte corrispondente ai coefficienti a, b, c, d rappresenta l'integrale dell'equazione omogenea, che è necessario per soddisfare le condizioni al contorno. Queste condizioni sono evidentemente $H_2(1) = 0$ e $H_2(\beta) = 0$, dato che H_0 già di per sè soddisfa le condizioni realmente esistenti alle pareti. Dalla (13) avremo dunque

$$\begin{aligned} a + b &= -\chi(1), & a\beta^{-4} + b\beta^3 &= -\chi(\beta) \\ c + d &= \frac{4}{5}(a + b) - \varphi(1), & c\beta^{-2} + d\beta &= \frac{4}{5}(a\beta^{-4} + b\beta^3) - \varphi(\beta). \end{aligned}$$

Da queste equazioni si ricavano i coefficienti incogniti

$$(15) \quad \begin{aligned} a &= \frac{\beta^7 \chi(1) - \beta^4 \chi(\beta)}{1 - \beta^7}, & b &= \frac{\beta^4 \chi(\beta) - \chi(1)}{1 - \beta^7} \\ c &= \alpha[\varphi(1) - \beta^{-1} \varphi(\beta) + \frac{4}{5} \chi(1) - \frac{4}{5} \beta^{-1} \chi(\beta)], \\ d &= \alpha[\beta^{-1} \varphi(\beta) - \beta^{-2} \varphi(1) + \frac{4}{5} \beta^{-1} \chi(\beta) - \frac{4}{5} \beta^{-3} \chi(1)]. \end{aligned}$$

Mediante le (11), (13), (14), (15) la correzione H_2 è completamente nota.

Per trovare la correzione che la presenza di H_2 apporta al momento esercitato dal fluido sulla sfera esterna, calcoliamo la derivata radiale di H_2 per $r = 1$

$$(16) \quad \left(\frac{\partial H_2}{\partial r} \right)_{r=1} = \frac{1}{4} \mathfrak{R}^2 \alpha^3 (E \sin \theta + F \sin^3 \theta)$$

essendo

$$E = \frac{16}{5}a - 2c + d - \frac{12}{5}b + \varphi'(1), \quad F = -4a + 3b + \chi'(1)$$

due numeri che si sanno calcolare in funzione di β . D'altra parte, ricordando le particolari convenzioni fatte sulle unità, si vede facilmente che il momento provocato da H_2 sulla sfera esterna è

$$M_2 = -2\pi\mu\omega R_2^3 \int_0^\pi \left(\frac{\partial H_2}{\partial r} \right)_{r=R_2} \sin^2 \theta d\theta.$$

Esprimendo la derivata con la (16), eseguendo l'integrazione e ricordando la (6), si trova infine

$$\frac{M_2}{M_0} = -\frac{1}{12} \mathfrak{R}^2 \alpha^2 \left[E + \frac{4}{5} F \right].$$

Possiamo così calcolare in funzione di β l'incremento relativo del momento, dovuto al rimescolamento del fluido. Come si vede, esso è del secondo ordine rispetto ad \mathfrak{R} .

A questo punto conviene introdurre al posto di \mathfrak{R} il numero $\mathfrak{R}' = \omega R_1^2/\nu$, che è la più naturale determinazione del numero di

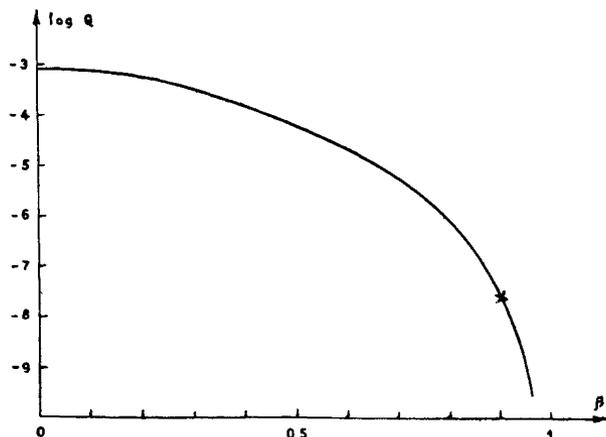


Fig. 2.

REYNOLDS e meglio si presta a rappresentare i risultati, specie quando R_1 è molto piccolo.

Dalla (17) risulta che l'espressione

$$(18) \quad Q = \frac{M_2}{M_0 \mathfrak{R}'^2} = -\frac{1}{12} \frac{\alpha^2}{\beta^4} \left(E + \frac{4}{5} F \right)$$

rappresenta un numero puro, funzione di β , indipendente dalla velocità di rotazione e dalla natura del fluido. Per esempio, alcuni valori calcolati con la (18) sono: $Q = 8.333.10^{-4}$ per $\beta = 1/100$, $Q = 5.580.10^{-4}$ per $\beta = 1/5$, $Q = 6.195.10^{-5}$ per $\beta = 1/2$, $Q = 8.677.10^{-6}$ per $\beta = 2/3$.

Un passaggio al limite piuttosto laborioso dimostra poi che Q tende a zero per $\beta \rightarrow 1$.

La fig. 2 rappresenta l'andamento del logaritmo decimale di Q in funzione di β . Il punto segnato con una crocetta risulta dai dati sperimentali di ZEMPLÉN⁽⁸⁾. Quest'ultimo, in base alle sue misure, aveva dedotto i primi termini di uno sviluppo del coefficiente di viscosità apparente in serie di potenze di ω . Dal coefficiente che egli dà per il termine di secondo grado e dai dati geometrici della sua esperienza si può facilmente calcolare Q . Il fatto che il punto sperimentale cada esattamente sulla curva dedotta dal calcolo conferma la fiducia nel nostro procedimento di approssimazioni successive.