UMI

Recensioni

* G. Fano, A. Terracini, Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva, Paravia, Torino, 1948 (Mario Villa)
* W. Gröbner, Moderne algebraische Geometrie - Die idealtheoretischen Grundlagen, Springer, Wien and Innsbruck, 1949 (Beniamino Segre)
* A. Duschek, Vorlesungen über höhere Mathematik, Springer, Wien, 1946 (Lamberto Cesari)
* L. Locher-Ernst, Differential und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen, Birkhäuser, Basel, 1948 (Beniamino Segre)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 423–429.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_423_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

RECENSIONI

G. FANO, A. TERRACINI: *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva.* Paravia, Torino, Ristampa anastatica della II edizione, 1948, pp. 642 + VII, con 211 fig., L. 2.600.

In quest'Opera per gli studenti di matematica, matematica-fisica e ingegneria, la materia tradizionale del 1° corso di Geometria, magistralmente trattata, è ampiamente corredata di nozioni complementari, importanti o come elementi di una più larga cultura geometrica, o per le applicazioni che possono ricevere nelle scienze tecniche.

Nell'*Introduzione* gli AA. contrappongono il metodo sintetico della geometria euclidea, usato nella scuola secondaria per trattare caso per caso le diverse questioni, al metodo *generale* offerto dalla geometria analitica di cui il giovane sta per iniziare lo studio. In un'*Appendice* invece gli AA. comparano la geometria proiettiva alla geometria elementare, fanno intravedere al giovane altri tipi di geometrie, secondo il *programma di Erlangen di Klein,* quali la geometria affine, la geometria delle inversioni e si trattengono sulla subordinazione della geometria metrica e affine alla geometria proiettiva.

Vengono delineati i caratteri essenziali della teoria dei nomogrammi, il cui studio si è reso ormai assai opportuno per la diffusione sempre più crescente che va assumendo questo metodo di rappresentazione. Si espongono anche alcuni esempi di nomogrammi tratti dalle scienze tecniche (nomogramma che si presenta nel calcolo del muro di sostegno di terre inclinate, carte isotermiche e isobariche).

Ampio sviluppo danno gli AA. alla geometria della retta nello spazio. I complessi lineari di rette sono diffusamente studiati, avuto riguardo anche per le importanti applicazioni alla statica grafica a cui danno luogo. Gli AA. considerano anche quelle figure (*dinamo*) costituite da un complesso lineare e da un vettore scorrevole sul suo asse.

Ma molti altri argomenti che non si trovano solitamente nei trattati di geometria analitica figurano invece in quest'Opera in cui costantemente gli AA. tengono presenti le applicazioni alle scienze tecniche. Gli allievi ingegneri, gli allievi fisici vi trovano ad es. i diagrammi sinusoidali e la relativa composizione, i diagrammi dei fenomeni vibratori smorzati, le superficie equipotenziali e le linee di flusso del campo prodotto da due strati elettrici cilindrici filiformi con assi paralleli, le coordinate sulla sfera celeste in astronomia, i fuochi di un sistema diottrico come punti limiti di una proiettività, il momento e l'ellisse d'inerzia, applicazioni alla teoria delle immagini elettriche, la distribuzione delle velocità in un atto di movimento rigido, il problema di Pothenot, ecc., ecc.. E gli allievi matematici: la determinazione grafica del valore di un dato polinomio in x per un valore assegnato della variabile, la risoluzione grafica delle equazioni, l'inversione e l'inversore di *Peaucellier*, le antiproiettività fra forme di 1ª specie, il metodo di falsa posizione, le schiere rigate come *forme elementari di* 1ª *specie*, ecc., ecc..

Ed ora ecco succintamente la materia trattata. L'Opera è divisa in cinque parti. La parte 1ª è dedicata alla geometria analitica del piano, mentre la parte 2ª alla geometria analitica dello spazio. Questa 2ª parte si chiude con un capitolo sui vettori, sul calcolo vettoriale (del quale si fanno applicazioni alle curve e superficie) e sui campi scalari e vettoriali. La trattazione vettoriale non è tuttavia frammischiata con quella cartesiana. La 3ª parte è dedicata alla geometria proiettiva. La trattazione viene svolta ora con metodo sintetico, ora con metodo analitico, dando la preferenza a quel metodo che di volta in volta consente di raggiungere più rapidamente l'intento; talvolta uno stesso concetto, uno stesso risultato è esposto con entrambi i metodi. Sono indicati i vari procedimenti con i quali può svolgersi la geometria proiettiva; giustamente sono date particolari notizie del procedimento grafico-deduttivo che dai futuri matematici non può essere ignorato. La 4ª parte è dedicata alle coniche, mentre la parte 5ª a questioni complementari di geometria dello spazio (omografie, inversione, polarità, quadriche, geometria della retta e complessi lineari).

Nonostante la notevole mole della materia trattata, il libro, anche per merito di un'abile distribuzione della materia fra due caratteri tipografici, di una felice scelta del formato, appare semplice, facile ed invoglia alla lettura ed acquista anche perciò un notevolissimo valore didattico.

Quest'Opera dei due illustri Maestri dell'Ateneo Torinese è indubbiamente una delle più preziose della magnifica collana di trattati che i geometri italiani hanno saputo dare alla geometria analitica e proiettiva.

MARIO VILLA

W. GRÖBNER: *Moderne algebraische Geometrie. - Die idealtheoretischen Grundlagen.* Wien und Innsbruck, Springer, 1949, pp. XII-212.

I legami da tempo noti fra teoria degli ideali e geometria algebrica lasciavano intravedere la possibilità di valersi della prima per rielaborare ex-novo i fondamenti della seconda. Ciò vien fatto per la prima volta in modo ampio e sistematico in questo volume, pregevole per la chiarezza ed il rigore dell'esposizione, nonchè per la novità di vari risultati, e l'originalità di qualche accostamento e di alcuni procedimenti dimostrativi.

La trattazione rifugge di proposito da ogni appello all'intuizione geometrica, ciò che — se da un lato giova alla perfezione logica — dà luogo d'altro canto a qualche pesantezza, alleviata però da osservazioni ed esempi adeguati. La terminologia è di necessità abbastanza complessa, tanto da esigere l'uso di un certo numero di sigle, e la scelta dei nomi non pare sempre fra le più felici; ma la lettura rimane facilitata dai frequenti rinvii, dai dettagliati indici generale ed analitico, dalle interpretazioni geometriche di alcuni fra i risultati ottenuti e dall'ottima veste tipografica.

Fra le denominazioni che sembrano non del tutto appropriate segnaliamo specialmente quella di « molteplicità » di un ideale. Si tratta di un nuovo interessante carattere (introdotto alle pp. 88-93), che però geometricamente pare più affine ad una postulazione (cfr. pp. 159-160) che ad una molteplicità. È vei che l'A. non ritiene vantaggioso di definire la molteplicità d'intersezione i modo da assicurare la più ampia validità del teorema di BÉZOUT generalizzat tanto ch'egli dà (a p. 180) l'esempio di una V^4_2 di S_4 avente a comune con u piano un unico punto, in cui la « molteplicità ideale » d'intersezione col pian vale 5. Ma le ragioni addotte dall'A. a sostegno di tale punto di vista (pp. 17 178) non possono venir condivise da tutti i cultori della geometria algebrica; l'idea che l'usuale definizione di molteplicità d'intersezione debba venire rigettat in una trattazione come la sua, perchè fa intervenire considerazioni di continuit ed è quindi contraria alla purezza del metodo, si controbatte riflettendo che nu la si oppone a che una definizione equivalente sia conseguibile senza l'uso dell continuità (*).

Le riserve precedenti non sminuiscono affatto il valore di un'opera che nc tevolmente contribuisce a porre la geometria algebrica su basi sempre più solid e che indubbiamente costituirà il punto di partenza d'importanti ricerche ulte riori. Essa si svolge tutta per semplicità nel campo complesso; ma le estension a corpi numerici commutativi arbitrari, algebricamente chiusi, non presente rebbero difficoltà.

Il libro è diviso in cinque paragrafi, dedicati ordinatamente agli anelli d polinomi, alle teorie degli zeri e della dimensione degli ideali di polinomi alla funzione caratteristica di HILBERT ed alle syzygie degli ideali.

I primi due paragrafi espongono in forma piuttosto stringata la parte dell teoria degli ideali utile per gli scopi futuri. Ivi alle nozioni preliminari su corpi numerici e sulle loro estensioni, sugli anelli di polinomi e di serie di po tenze, e sui moduli ed ideali a questi relativi, si innesta lo studio degli ideal di polinomi e delle loro varietà degli zeri, effettuato mediante la teoria dell'eli minazione. Il lato intrinseco di questa teoria viene lumeggiato coll'opportuna in troduzione di nuovi concetti (ideali di eliminazione ed ideali risultanti); e l distinzione fra la varietà degli zeri (la quale corrisponde all'interferenza second SEVERI) e la varietà algebrica, inerenti ad un ideale di polinomi, viene ottenut attraverso la nozione di molteplicità di un ideale primario, della quale già si è fatto cenno. Notevole infine la rappresentazione esplicita del risultante di n forme in n variabili, ottenuta semplificando il procedimento originale di F. S. MACAULAY.

Il § 3 tratta della teoria della dimensione, esposta dapprima per ideali non omogenei e poi trasportata agli ideali omogenei. Tale teoria è completata colla considerazione delle matrici jacobiane, delle varie polari di una forma, degli spazi lineari tangenti e degli ideali di serie di potenze definiti localmente da una varietà, e comprende alcuni nuovi criteri atti ad assicurare la purezza dimensionale di un ideale.

Nel § 4 vengono raggruppati vari risultati collegati colla funzione e colle equazioni di HILBERT per un ideale, e specie coi coefficienti di quella funzione, fra i quali notoriamente v'è l'ordine dell'ideale. Così, con un procedimento originale estremamente interessante, viene studiato il comportamento dell'ordine per proiezione e per intersezione, raggiungendo una significativa estensione del teorema di BÉZOUT per gli ideali.

(*) Ciò infatti è stato recentemente ottenuto da P. SAMUEL, il quale ne ha riferito li 28 settembre 1949 al « Colloque International d'Algèbre et de Théorie des Nombres » di Parigi.

Assai eleganti sono gli sviluppi del successivo § 5 sulle catene di syzygie inerenti ad un ideale, ed anzi — più generalmente — ad una matrice rettangolare i cui elementi siano forme, comprendenti il teorema di HILBERT secondo cui il numero degli elementi di una catena non può superare il numero delle variabili. Viene quindi approfondito lo studio degli ideali per cui il rango (differenza fra la dimensione dello spazio ambiente e la dimensione dell'ideale) uguaglia il numero degli elementi della relativa catena di syzygie, fra l'altro dimostrando ch'essi coincidono cogli ideali perfetti, già introdotti dal MACAULAY per tutt'altra via, ed estendendo ad essi il teorema di NOETHER dell'$Af + B\varphi$. Da ultimo sono esaminati gli ideali determinabili mediante i minori d'ordine massimo di una matrice i cui elementi siano forme, relativamente ai quali viene stabilito che, qualora abbiano dimensione unitaria ed il ~~numero delle~~ numero delle variabili omogenee valga 4, non differiscono dagli ideali perfetti dianzi considerati.

BENIAMINO SEGRE

A. DUSCHEK: *Vorlesungen über höhere Mathematik.* Erster Band, Springer, Wien, 1949, pp. X-395.

Questo volume che, insieme ai rimanenti tre in corso di stampa, è destinato agli studenti e prima di tutto a quelli di ingegneria e di fisica, costituisce la prima parte di un ampio e completo corso di Analisi Matematica. Per la semplicità, completezza e modernità della trattazione, per l'ordinamento nuovo ed originale della vasta materia che già in questo volume abbraccia il Calcolo numerico e il Calcolo delle probabilità, l'opera è veramente degna di nota e meritevole della più larga diffusione.

La pubblicazione del libro corrisponde alla nuova vita impressa dopo la guerra alle Scuole Superiori in Austria — dal Duschek e da una schiera di valenti matematici — e al confermato alto indirizzo scientifico di quelle Scuole per la preparazione degli ingegneri, indirizzo quindi comune alle analoghe scuole in Italia.

Non vi è una matematica propria ai tecnici e ai fisici, ma occorre scegliere quegli argomenti della matematica che necessitano ad essi. La matematica non può essere influenzata nè dagli scopi a cui è destinata nè da esigenze esterne e, anche se dedicata ai tecnici — aggiunge con spirito il Duschek — essa non deve diventare per questo una matematica degenere o una sottospecie. Lo sviluppo della tecnica è tale che oggi nessun tecnico può lavorare scientificamente nel proprio campo senza essere un buon matematico.

Questi i concetti informatori del libro ed essi sono ben famigliari in Italia, come ovunque sia seriamente impostato il problema dell'insegnamento tecnico superiore. L'A. ha poi realizzato tali concetti con consumata perizia, giusta misura ed intuito e perciò il suo libro sarà utilissimo anche agli studenti e agli studiosi in Italia. Non premesse troppo generali, mai ricerca dell'astratto, una precisa e chiara esposizione (alla quale molto giovano le 167 figure del testo), uno stile discorsivo e frequenti commenti, caratterizzano la redazione del libro che riesce di agevole lettura e consultazione e al quale giova anche il buon spirito viennese che trova largo modo di esprimersi. Su quest'ultimo particolare ricordo che l'A. spiega che le successive estrazioni di un'urna debbono essere fatte... « senza sbirciare nell'urna stessa ». In quanto alla parola urna (ted. *Urne*), che nel linguaggio corrente in Austria è solo l'urna funeraria, egli aggiunge « non so perchè proprio sia stata scelta questa parola, ma non posso permettermi di allontanarmi dall'uso corrente ».

Il volume è principalmente dedicato alle funzioni di una variabile reale, al Calcolo integrale e differenziale per tali funzioni, al Calcolo delle probabilità. A tali studi è dato giustamente il massimo risalto e sviluppo riducendo ad esempio le proporzioni di quelle teorie (numeri reali, insiemi, successioni, serie, calcolo combinatorio) che necessariamente devono precedere essi, ma che di fatto entrano direttamente in assai minore misura nelle applicazioni. Alla teoria delle equazioni algebriche, alla loro risoluzione numerica e alla interpolazione è dedicata l'ultima parte del volume. Il Calcolo delle probabilità è esposto dapprima nel caso di variabili casuali assumenti un sistema finito di valori di un intervallo ed è condotto assai avanti fino ai teoremi fondamentali di Bernoulli, Poisson, Bayes. Le dimostrazioni sono assai semplici. È discusso criticamente il concetto di probabilità e nell'esposizione trova posto il paradosso di Bertrand. I capitoli dedicati al Calcolo delle probabilità sono ben connessi con il rimanente svolgimento così da risultarne un tutto organico veramente istruttivo per lo studente. Il concetto di funzione di una variabile reale è esposto con l'ausilio sistematico di esempi e numerosi grafici e riesce di chiarezza cristallina. Con grafici sono poi illustrate le nozioni di funzione inversa, di continuità e di discontinuità, di convergenza semplice e uniforme. Il discorso si attarda sulle questioni delicate o di principio con utilissimi commenti, ma questo non avviene nelle dimostrazioni ove talvolta passaggi un po' sottili sono omessi. Ma l'ossatura è eccellente e lo studente di maggiori esigenze critiche è in grado volendo di completare da se. Ad esempio il concetto di estremo superiore di un insieme limitato è dato come il minimo di tutte le valutazioni superiori, ma l'A. non si sofferma a dimostrare l'esistenza del minimo.

E ora una breve analisi del contenuto del volume.

La parte I^a riporta un breve accenno alle ordinarie classi numeriche e alle operazioni fondamentali su di esse, ma le varie classi sono in sostanza supposte note. Accennata l'equivalenza tra numero reale e punto di una retta, sono introdotte le semplici nozioni di insieme, di punto di accumulazione, di insiemi equivalenti, di insiemi numerabili, coi teoremi di Bolzano-Weierstrass e la non numerabilità dell'insieme dei numeri reali. Seguono la nozione di successione e di limite, coi teoremi relativi. Assai in risalto sono posti gli esempi fondamentali, come « successioni speciali » e cioè a^n, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$, $1 + 1/1! + \ldots + 1/n!$, $(1 + 1/n)^n$. Alle assai brevi notizie di calcolo combinatorio segue la formula del binomio di Newton solo enunciata, la dimostrazione essendo rimandata a quella, identica formalmente, della regola di Leibnitz sulle derivate successive di un prodotto nella parte III^a. Il resto della parte I^a è dedicato all'aspetto più elementare del Calcolo delle probabilità fino ai problemi semplici per variabili casuali assumenti un sistema finito di valori.

La parte II^a riguarda la nozione di funzione e si è già parlato di essa. Le dimostrazioni dei teoremi fondamentali per le funzioni continue sono molto semplici. La parte termina con il metodo delle corde (regula falsi) integrato da esempi numerici.

La parte III^a è dedicata alle nozioni di integrale e derivata. La nozione di integrale precede quella di derivata ma poi in tutta la parte III^a i due classici aspetti del Calcolo infinitesimale sono intrecciati. La nozione di integrale definito viene utilizzata per calcolare direttamente gli integrali di x, $ax + b$, x^2, x^α con α razionale, $\alpha \neq -1$, sen x. Alle nozioni di derivata e di differenziale fa seguito la discussione sull'uso pratico del differenziale con esempi ed illustrazioni numeriche. Dimostrati in seguito i teoremi del valor medio per le derivate e della media per gli integrali, se ne mostra l'equivalenza, mentre si deduce il teorema di Cauchy per le derivate dal teorema della media generalizzata per gli integrali. Il secondo teorema della media è pure direttamente dimostrato. È esposto il metodo delle iterate per la risoluzione delle equazioni, metodo così corrente nella pratica. Introdotta la nozione di funzione integrale e di integrale definito, si dà subito il concetto di equazione differenziale e si danno metodi grafici per la determinazione della funzione integrale. Senza dubbio l'aver introdotto l'integrale definito quale il comune limite (finito) delle somme inferiori e superiori di Riemann giova alla semplificazione dell'esposizione ma la dimostrazione della integrabilità delle funzioni continue è appesantita dalla mancanza degli integrali di Darboux. La parte III^a termina col Calcolo delle probabilità per variabili casuali assumenti tutti i valori di un intervallo, fino ai teoremi fondamentali come si è già detto.

La parte IV^a espone con grande risalto le trascendenti elementari. Le funzioni *ln* ed *exp* sono introdotte la prima come la funzione integrale di $1/x$ e la seconda come la funzione inversa della prima, il numero e come il numero per cui $\ln e = 1$ e se ne mostra l'identità col numero e già definito nella parte I^a. Chiara e completa la trattazione delle funzioni circolari, dirette e inverse, e delle loro formule di derivazione e integrazione. Altrettanto per le funzioni iperboliche.

La parte V^a è di complemento alle precedenti. Si espongono il calcolo differenziale per vettori, le forme di indeterminazione, gli integrali generalizzati, la serie di Taylor, le formule di Wallis e Stirling, il calcolo di aree e i relativi integrali curvilinei (di questi non vi è alcuna trattazione generale nel volume), lunghezza di una curva, numeri complessi (introdotti in modo geometrico).

La parte VI^a tratta dei polinomi, del calcolo di essi, dei loro zeri, espone lo schema di Horner e il procedimento grafico di Lill. L'interpolazione è trattata ampiamente cominciando dalla formula di Lagrangia, dalla quale vengono dedotte quella alle differenze divise e quella di Newton. La risoluzione numerica delle equazioni algebriche è completata dal metodo di Graeffe con numerosi esempi. Il torema fondamentale dell'algebra è soltanto enunciato. Termina la parte VI^a la scomposizione canonica delle funzioni razionali fratte e la loro integrazione, con cenni sugli integrali abeliani. Inoltre i noti classici casi di integrazione di funzioni contenenti irrazionalità.

Per i successivi volumi dell'opera sono previsti i seguenti argomenti: Vol. II: Integrazione e differenziazione delle funzioni di più variabili — Complementi al Calcolo delle probabilità — Teoria degli errori — Metodo dei minimi quadrati e compensazione delle osservazioni — Equazioni lineari e determinanti. Vol. III: Equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali — Sviluppo in serie delle soluzioni — Equazioni integrali — Calcolo delle variazioni. Vol. IV: Elementi di teoria delle funzioni.

LAMBERTO CESARI

L. Locher-Ernst: *Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen.* Basel, Birkhäuser, 1948, pp. 595, con 1007 esercizi e 406 figure. Legato in tela 48 fr. svizz., in broch. 44 fr. svizz.

Il presente volume contiene ad un dipresso — ma con minor profondità — quanto di solito vien esposto nei nostri corsi biennali di Analisi matematica, insieme a nozioni abbastanza estese di geometria analitica e di calcolo numerico e grafico. L'ampia materia è svolta in vista principalmente delle applicazioni, e seguendo criteri didattici atti a smussare le difficoltà concettuali. Le nozioni più delicate vengono a tal fine introdotte gradualmente, sovente da vari punti di vista, illustrandone dapprima il contenuto intuitivo su esempi, eppoi chiarendone via via più rigorosamente la portata. Vi è inoltre una preferenza sistematica dei procedimenti più elementari, la quale si riflette in un maggior risalto dato ai risultati speciali nei confronti delle teorie generali. Ciò rende in complesso la trattazione più semplice e concreta dell'usuale, seppure alle volte un po' frammentaria e priva delle spiccate qualità estetiche che possono conseguirsi adottando le vedute più elevate.

Nonostante qualche lacuna riscontrabile qua e là (come p. es. il teorema di Rolle dedotto, a p. 250, da quello dell'esistenza di un estremo, di cui, a p. 240, è dato soltanto l'enunciato), il libro si raccomanda per le sue doti didattiche, per l'inusitata dovizia di particolari interessanti che affiorano nel testo e nei numerosi esercizi proposti (di ciascuno dei quali è pure data la soluzione), per i suggestivi nitidissimi disegni, per le frequenti applicazioni grafiche e numeriche, per l'eccellente veste tipografica e per le notizie storiche (raccolte da J. O. Fleckenstein) poste in fondo al volume.

In esso, dopo un'introduzione alla geometria analitica sulla retta e nel piano, vengon esposte le prime nozioni sulle derivate, sugli integrali e sulle interpolazioni nel caso di polinomi, nonchè sulla teoria delle differenze finite. Si passa quindi ai differenziali ed alle successioni infinitesime, alla tecnica della derivazione nell'ambito delle funzioni elementari, ai metodi grafici e numerici di derivazione. Dopo aver illustrate ed approfondite le relazioni fra funzioni continue e funzioni derivabili, vengono dati diversi teoremi della media, la serie di Taylor — di cui sono fatte applicazioni molteplici (p. es. alle formule di interpolazione ed ai limiti di espressioni indeterminate) — e qualche risultato sulle funzioni di due o più variabili. Segue un capitolo sull'integrazione, che comprende l'integrale di Riemann e le varie regole d'integrazione, con applicazioni al calcolo di aree, volumi, momenti, ecc., l'integrazione grafica e numerica, e l'analisi armonica. Vi è infine uno studio algebrico e differenziale di curve piane algebriche e trascendenti speciali, qualche nozione di geometria cinematica piana, esempi ed applicazioni riferentisi alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie. In appendice, poi, trovansi cenni sulla risoluzione approssimata delle equazioni, tavole delle funzioni esponenziali, iperboliche ed ellittiche, ed una raccolta delle formule più importanti ottenute nel testo.

Beniamino Segre