
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIERO POZZATI

La lastra rettangolare con due lati opposti semplicemente appoggiati e gli altri due sostenuti da travi elastiche e impediti o liberi di ruotare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 4 (1949), n.4, p. 374-381.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_374_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La lastra rettangolare con due lati opposti semplicemente appoggiati e gli altri due sostenuti da travi elastiche e impediti o liberi di ruotare.

Nota di PIERO POZZATI (a Bologna).

Sommario. - Si ritiene cosa utile dare tali soluzioni della lastra rettangolare perchè questi due casi limiti forniscono al progettista dati di utile orientamento anche nei casi di vincolo intermedio.

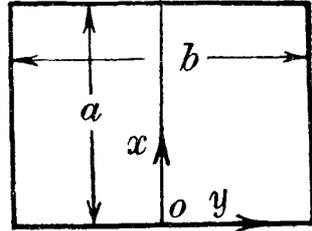
Tabelle danno i valori delle azioni interne e deformazioni che possono maggiormente interessare relativamente al caso della lastra quadrata, caricata uniformemente, per $\nu = 0,1$.

Per lo studio del secondo tipo di vincolo, (la lastra rettangolare sostenuta da due travi elastiche prive di rigidezza a torsione) viene indicato un procedimento rapido di calcolo.

1. Sia data una lastra rettangolare di lati a e b , di spessore s , di rigidezza $B = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)}$ con i due lati $x=0$, $x=a$ semplicemente appoggiati e gli altri due $y = \pm b/2$ sostenuti da travi elastiche di rigidezza $B_t = EJ_t$ (J_t è il momento d'inerzia della sezione) e impediti di ruotare nella direzione dell'asse y .

L'origine degli assi sia nel punto di mezzo del lato $x=0$, come è mostrato nella figura.

Nei paragrafi 5 e 6 verrà esaminato il caso della stessa lastra avente i due lati $y = \pm b/2$ semplicemente appoggiati su travi elastiche: quindi si possono avere dati di utile orientamento in tutti i casi pratici con condizioni di vincolo intermedie alle due situazioni limiti svolte nella presente nota e, in generale, nello studio delle lastre continue (¹).



(¹) Lo studio delle lastre continue su travi sia rigide che elastiche è stato svolto nelle mie due note: *Sul calcolo delle lastre rettangolari continue*, « Giornale del Genio Civile », Roma, gennaio 1948; *Il calcolo della lastra rettangolare continua su travi elastiche*, « Atti della Fac. Ing. », Bologna, vol. I, n. 9. Una chiara esposizione del problema delle lastre continue si trova in: S. TIMOSHENKO, *Theory of plates and shells*, cap. VI, § 45.

2. Come è noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari, l'integrale generale dell'equazione fondamentale delle lastre

$$a) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B}$$

si può ottenere come somma dell'integrale generale della *a*) resa omogenea e di un integrale particolare della *a*) stessa, tali da tener conto, separatamente, l'uno delle condizioni di vincolo, l'altro del tipo di carico che agisce sulla lastra ⁽²⁾.

Come indicò il LÉVY ⁽³⁾ l'integrale della *a*) può essere quindi sempre scritto nella forma

$$b) \quad w = \sum_n [s_n + Y_n(y)] \operatorname{sen} a_n x \quad \left(a_n = \frac{n\pi}{a} \right)$$

dove le $Y_n(y)$ sono funzioni della sola y e, nel rispetto della *a*) resa omogenea alla quale debbono soddisfare, si possono scrivere, nel caso di simmetria rispetto all'asse delle x , e nel caso che il carico p sia uniformemente distribuito

$$Y_n(y) = \frac{pa^4}{B} (A_n \cosh a_n y + B_n a_n y \operatorname{senh} a_n y).$$

La *b*) pone quindi già fissate le condizioni di vincolo lungo i due lati $x=0$, $x=a$ che debbono essere semplicemente appoggiati perchè, per questi valori di x , si ha $\operatorname{sen} a_n x = 0$: le condizioni di vincolo lungo gli altri due lati si impongono determinando le due costanti A_n e B_n contenute nelle funzioni $Y_n(y)$.

3. Esaminando il caso della lastra caricata uniformemente, si può prendere l'integrale particolare $s_n \operatorname{sen} a_n x = \frac{4pa^4}{\pi^5 n^5 B} \operatorname{sen} a_n x$, che viene così a rappresentare la linea elastica di una striscia larga 1, parallela all'asse x , caricata uniformemente.

⁽²⁾ Tale modo di procedere può essere spiegato in maniera più intuitiva e aderente al funzionamento di lastra. Una lastra rettangolare, appoggiata lungo due lati opposti, caricata ad esempio uniformemente e provvisoriamente libera lungo gli altri due, si comporta (a parte il piccolo aumento di rigidità nel rapporto da $1 - \nu^2$ a 1) come una trave e a tale situazione deve riferirsi lo studio di qualunque azione interna e deformazione. È necessario poi applicare lungo i due lati liberi un opportuno sistema di forze capaci di fare rispettare le condizioni di vincolo lungo tali due lati. È evidente quindi che l'integrale particolare rappresenta la situazione di trave e l'integrale generale dell'equazione omogenea il completamento a tale situazione dovuto alle forze distribuite lungo i due lati inizialmente liberi.

⁽³⁾ M. LÉVY, *Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire*, « Comptes Rendus », 1899, vol. 129, pagg. 535-539.

L'espressione b) assume in definitiva la forma

$$(1) \quad w = \frac{pa^4}{B} \sum_n \left(\frac{4}{n^5 \pi^5} + A_n \cosh a_n y + B_n a_n y \sinh a_n y \right) \sin a_n x.$$

Operiamo ora sulle costanti A_n e B_n , per imporre il rispetto delle condizioni di vincolo lungo i due lati (paralleli all'asse x) $y = \pm \frac{b}{2}$.

Tali condizioni sono: rotazione nulla nella direzione y e reazione ⁽⁴⁾ uguale e contraria al carico q che agisce su ciascuna delle due travi di margine, ossia (se con η si indica l'ordinata corrente della linea elastica della trave),

$$c) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm b/2} = 0; \quad d) \quad -B \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=\pm b/2} = -q = -B_t \frac{d^4 \eta}{dx^4} = - \\ - \left(B_t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{y=\pm \frac{b}{2}}.$$

Derivando la (1) e sostituendo nella condizione c) si trova

$$d) \quad A_n = -B_n (1 + \varphi_n \operatorname{ctgh} \varphi_n) \quad \varphi_n = \frac{a_n b}{2}$$

dalla quale, sostituendo nella (1), si ha

$$e) \quad w = \frac{pa^4}{B} \sum_n \left[\frac{4}{n^5 \pi^5} - (1 + \varphi_n \operatorname{ctgh} \varphi_n) B_n \cosh a_n y + B_n a_n y \sinh a_n y \right] \sin a_n x.$$

Derivando la e), nel rispetto delle condizioni d), posto

$$M_n = 1 + \varphi_n \operatorname{ctgh} \varphi_n; \quad N_n = \sinh \varphi_n [2 + n\pi\lambda(M_n \operatorname{ctgh} \varphi_n - \varphi_n)];$$

$$\lambda = \frac{B_t}{Ba}$$

otteniamo infine il valore cercato delle due costanti d'integrazione

$$(2) \quad \begin{cases} A_n = -\frac{M_n}{N_n} \frac{4\lambda}{n^4 \pi^4} \\ B_n = \frac{4\lambda}{n^4 \pi^4 N_n} \end{cases}$$

A_n e B_n sostituite nella (1) definiscono l'equazione della superficie elastica cercata e quindi, mediante operazioni di derivazione,

(4) Essendo la lastra impedita di ruotare nella direzione y lungo i due lati $y = \pm \frac{b}{2}$, l'espressione che dà la reazione r_y lungo tali lati coincide con quella del taglio t_y . Infatti poichè si ha $r_y = t_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$ e poichè, essendo $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, il momento torcente $m_{xy} = -(1-\nu)B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ è nullo, si ottiene quanto si è asserito.

qualunque azione interna che si desideri. La serie ottenuta ha convergenza notevole.

4. Se le travi sono infinitamente rigide, si ritrova la soluzione della lastra (v. tabella seguente) aventi due lati opposti incastrati perfettamente.

In tale caso particolare si ottiene facilmente

$$B_n = \frac{4}{n^5 \pi^5 \operatorname{senh} \varphi_n (M_n \operatorname{ctgh} \varphi_n - \varphi_n)}$$

Quando $\lambda = 0$ (cioè mancano le travi di sostegno) è $B_n = A_n = 0$, cioè nella (1) rimane il solo integrale particolare; la lastra quindi, inflettendosi, indipendentemente dal valore del coefficiente di contrazione ν , si comporta come una trave di rigidezza B .

Tale comportamento è dovuto al fatto che i momenti distribuiti lungo i due lati impediscono l'effetto della contrazione che, come è noto, si manifesta con un arricciamento verso il basso della zona vicina ai due lati $y = \pm b/2$.

Il massimo abbassamento e i massimi momenti positivi sono nel centro della lastra. Il massimo momento negativo nel punto di mezzo dei due lati $y = \pm \frac{b}{2}$.

Alcuni valori di queste quantità calcolate per una lastra quadrata, caricata uniformemente con i due lati opposti $x = 0$, $x = a$ appoggiati e gli altri due sostenuti da travi elastiche e impediti di ruotare nel piano ad essi normale, per qualunque valore di ν sono dati nella seguente tabella.

$\lambda = \frac{B_t}{Ba}$	$w_{max} = \alpha \frac{pa^4}{B}$	$x = \frac{a}{2}; y = \frac{a}{2}$ $(m_y)_{max} = -\beta pa^2$	$x = \frac{a}{2}; y = 0$ $(m_y)_{max} = +\beta_1 pa^2$	$x = \frac{a}{2}; y = 0$ $(m_x)_{max} = +\beta_2 pa^2$
λ	α	β	β_1	β_2
∞	0,00192	-0,07026 + 0,00010 ν	0,02854 + 0,01491 ν	0,01491 + 0,02854 ν
100	0,00197	-0,06881 + 0,00059 ν	0,02839 + 0,01546 ν	0,01546 + 0,02839 ν
30	0,00211	-0,06802 + 0,00228 ν	0,02793 + 0,01682 ν	0,01682 + 0,02793 ν
10	0,00241	-0,06622 + 0,00563 ν	0,02724 + 0,01976 ν	0,01976 + 0,02724 ν
5	0,00287	-0,06287 + 0,01046 ν	0,02609 + 0,02427 ν	0,02427 + 0,02609 ν
2	0,00401	-0,05576 + 0,02379 ν	0,02313 + 0,03551 ν	0,03551 + 0,02313 ν
1	0,00543	-0,04668 + 0,03987 ν	0,01917 + 0,04948 ν	0,04948 + 0,01917 ν

5. Il caso della *lastra rettangolare avente due lati opposti semplicemente appoggiati e gli altri due lati* $y = \pm \frac{b}{2}$ *sostenuti elasticamente (liberi però di ruotare)* si può affrontare in modo diretto ⁽⁵⁾, ma è molto più agevole, qualora si debbano esaminare diversi valori di λ e varie condizioni di carico, ricorrere al seguente procedimento semplificato ⁽⁶⁾.

Supponiamo, provvisoriamente, che le travi siano infinitamente rigide e, ad esempio, che la lastra sia caricata uniformemente.

In sede di tale ipotesi, la lastra si comporta come semplicemente appoggiata su tutto il contorno e, per essa, la soluzione in serie semplice, come è noto, è

$$f) \quad w = \frac{4pa^4}{\pi^5 B} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[1 - \frac{(\varphi_n \operatorname{tgh} \varphi_n + 2)}{2 \cosh \varphi_n} \cosh a_n y + \frac{a_n y}{2 \cosh \varphi_n} \operatorname{senh} a_n y \right] \cdot \operatorname{sen} a_n x. \quad \left(\varphi_n = \frac{a_n b}{2} = \frac{n\pi b}{2a} \right)$$

Dalla relazione che dà la reazione r_y lungo il lato $y = +b/2$ (o $y = -b/2$)

$$r_y = -B \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

operando sulla f) con derivazioni, tale reazione r_y viene ad essere ovviamente rappresentata (poichè contiene solamente derivate di ordine pari rispetto alla variabile x) da una serie di seni nella forma

$$r_y = \sum_n F_n \operatorname{sen} a_n x$$

dove è

$$g) \quad F_n = \frac{2pa}{n^3 \pi^2} [(3 - \nu) \operatorname{tgh} \varphi_n - (1 - \nu) \varphi_n (1 - \operatorname{tgh}^2 \varphi_n)].$$

⁽⁵⁾ S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, cap. VI, § 43.

⁽⁶⁾ In definitiva viene applicato il principio di equivalenza del quale fu posta in evidenza la feconda applicazione anche nel calcolo delle lastre (v. P. POZZATI, *Risoluzione, in serie semplice, della lastra rettangolare avente due lati opposti appoggiati, gli altri due liberi, sottoposta all'azione di un carico concentrato comunque disposto*. Tipografia Azzeguidi, Bologna, luglio 1947). Si assume cioè la lastra nelle condizioni reali di vincolo, sottoposta al carico esterno e, lungo ognuno dei due lati $y = \pm b/2$ al sistema di forze equilibrate $\pm r_y$ essendo r_y la reazione, lungo gli stessi lati, della lastra appoggiata rigidamente lungo tutto il contorno. Il carico e la forza $-r_y$ ristabiliscono la situazione (generalmente nota e più semplice) di lastra appoggiata: rimangono poi da valutare gli effetti prodotti dalla $+r_y$ che si studiano in modo semplice (v. nota 7).

Successivamente riportiamo la lastra alla condizione di vincolo reale; cioè imponiamo che gli abbassamenti lungo i lati $y = \pm \frac{b}{2}$ della lastra per effetto della r cambiata di segno (cioè rivolta verso il basso) e per effetto della reazione r_1 ricevuta dalla trave sottostante, debbano essere uguali ai corrispondenti abbassamenti della trave per effetto della r_1 stessa.

Tale equazione determina facilmente r_1 pure essa espressa nella forma

$$r_1 = \sum_n R_n \operatorname{sen} a_n x.$$

Non rimane quindi altro che sovrapporre agli effetti provocati dal carico sulla lastra nella prima fittizia condizione di vincolo, gli effetti provocati dalle forze $(r - r_1)$ agenti sui due lati $y = \pm b/2$ resi ora liberi.

Tali effetti si valutano facilmente essendo nota la soluzione della lastra soggetta sui due lati liberi a qualunque distribuzione di forze simmetriche o no rispetto all'asse x (7). Se le forze sono simmetriche si ha:

$$h) \quad w = \frac{a^3}{B\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(F_n - R_n)}{n^3} \frac{(D_n \cosh a_n y - a_n y \operatorname{senh} a_n y)}{E_n} \operatorname{sen} a_n x,$$

dove è

$$D_n = \left(\frac{2}{1-\nu} + \varphi_n \operatorname{tgh} \varphi_n \right)$$

$$E_n = (1 + \nu) \operatorname{senh} \varphi_n - (1 - \nu)(\varphi_n \cosh \varphi_n - D_n \operatorname{senh} \varphi_n).$$

I vantaggi che si traggono da tale modo di procedere sono considerevoli, infatti:

Gli effetti provocati dai carichi esterni nella prima condizione di vincolo sono generalmente noti da ricerche già fatte e l'espressione di F_n rimane sempre la stessa indipendentemente dalla rigidità delle due travi di margine.

Gli effetti provocati da forze aventi distribuzione generica

$$\sum_n (F_n - R_n) \operatorname{sen} a_n x,$$

sui due lati $y = \pm b/2$, o sono già noti o è sufficiente una sola ricerca preparatoria poichè essi non dipendono dal valore di $\lambda = \frac{B_t}{Ba}$, ma solo dal rapporto dei lati della lastra.

(7) P. POZZATI, *Risoluzione, in serie semplice, della lastra rettangolare avente due lati opposti appoggiati, sottoposta all'azione di forze comunemente distribuite sugli altri due lati liberi*. Tip. Azzoguidi, Bologna 1947.

Quando i carichi non sono simmetrici, il procedimento non subisce alcuna modifica, mentre, nella soluzione diretta, si hanno presenti tutte e quattro le costanti d'integrazione che dipendono, con espressioni non semplici, tutte dal valore di λ e le complicazioni sono gravi quando si debbono esaminare diverse condizioni di carico.

6. Portiamo come esempio il calcolo relativo ad una lastra quadrata di cemento armato ($\nu = 0,1$) caricata uniformemente.

L'equazione elastica esprime che la deformazione lungo il lato $y = +b/2$ (o $y = -b/2$) per effetto della forza

$$\sum_n (F_n - R_n) \text{sen } a_n x,$$

è uguale alla linea elastica della trave, vale, per il noto principio di identità della serie (v. relazione h),

$$\frac{(F_n - R_n)a^3}{B\pi^3 n^3} \frac{(D_n \cosh \varphi_n - \varphi_n \sinh \varphi_n)}{E_n} = \frac{R_n a^4}{B_i \pi^4 n^4}$$

dalla quale, nota l'espressione g) di F_n , si ha facilmente l'incongnita R_n .

Ad esempio per $n = 1$, si ha

$$\frac{a^3}{B} (F_1 - R_1) 0,02737 = \frac{a^4}{B_i} R_1 0,01027,$$

dalla quale si ottiene

$$R_1 = F_1 \frac{\lambda}{\lambda + 0,3752} \quad \text{con} \quad F_1 = 0,49347 \text{ pa.}$$

Similmente per $n = 3$

$$R_3 = F_3 \frac{\lambda}{\lambda + 0,1482} \quad \text{con} \quad F_3 = 0,06524 \text{ pa.}$$

Due termini sono sufficienti anche nella valutazione dei momenti perchè nella serie h), già convergente per sè stessa, si introducono i coefficienti F_n che diminuiscono col crescere di n .

Quindi per tutti i valori di λ che interessano, si hanno immediatamente i valori del parametro R_n .

Noto R_n è sufficiente sostituire i valori ottenuti nelle espressioni che danno le azioni interne che si desiderano per aver risolto il problema.

In tal modo si è facilmente risolto il caso della lastra quadrata

di cemento armato ($\nu = 0,1$) sostenuta elasticamente lungo due lati opposti, per valori diversi del parametro λ (*).

Freccia e momenti nel centro di una lastra quadrata, caricata uniformemente avente due lati opposti appoggiati e gli altri due sostenuti da travi elastiche con rigidezza a torsione nulla.

$\lambda = \frac{B_t}{Ba}$	$v_{max} = \lambda \frac{pa^4}{Es^3}$	$(m_x)_{max} = \beta_1 pa^2$	$(m_y)_{max} = \beta_2 pa^2$
λ	α	β_1	β_2
∞	0,0482	0,04052	0,04052
100	0,0486	0,04079	0,04036
30	0,0495	0,04151	0,04010
10	0,0520	0,04346	0,03936
6	0,0544	0,04539	0,03866
4	0,0572	0,04764	0,03782
2	0,0649	0,05366	0,03598
1	0,0770	0,06325	0,03202
0,5	0,0934	0,07626	0,02719