Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco G. Tricomi

Una formula sulla norma della funzione gamma incompleta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 341–344.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_341_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Una formula sulla norma della funzione gamma incompleta.

Nota di FRANCESCO G. TRICOMI (a Pasadena, Calif.).

Sunto. - *Si dimostra che la norma* $\Gamma(\alpha, ix)\cdot\Gamma(\alpha, -ix)$, *del complemento* $\Gamma(\alpha, x)$ *della funzione gamma incompleta, coincide con la trasformata di* LAPLACE *di una certa funzione ipergeometrica.*

1. In due casi particolari mi sono note delle formule fornenti, sotto forma di una trasformata di LAPLACE:

$$\mathfrak{L}_s[F(t)] = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt,$$

la *norma*

$$N(\alpha, x) = \Gamma(\alpha, ix)\cdot\Gamma(\alpha, -ix)$$

del « *complemento* » della funzione gamma incompleta:

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt.$$

Precisamente alludo alla formula di ENNEPER [1]:

$$N(0, x) = \mathfrak{L}_x\left[\frac{1}{t}\log(1+t^2)\right], \qquad (\Re x > 0) \tag{1}$$

[6] Cfr. G. SANSONE: *Sviluppo in serie e valutazione asintotica del rapporto tra due polinomi consecutivi di Jacobi,* « Ann. di Mat. pura ed appl. », (4), 16 (1937) pp. 39-48. [Si faccia nella (2·11), $\alpha = \beta = 0$, e si tenga conto che nella (3·8) risulta $A = \pi$].

[1] Cfr. E. BÖHMER: *Differenzengleichungen und bestimmte Integrale,* Leipzig, Koehler, 1939, p. 137.

relativa al caso $\alpha=0$ e ad una formula d'ignota origine [2]:

$$N\left(\frac{1}{2},\, x\right)=4\mathfrak{L}_{2\sqrt{x}}\left[\frac{1}{t}\sin(t^2)\right], \qquad (\Re x>0) \tag{2}$$

relativa al caso $\alpha=1/2$. Non conosco invece alcuna formula del genere valida per un generico α.

Considerata l'importanza della norma di una funzione da molteplici punti di vista, non mi sembra del tutto privo d'interesse far conoscere una formula da me trovata nel corso della redazione di una monografia sulla funzione gamma incompleta [3], che mostra come la generica $N(\alpha, x)$ possa considerarsi come la trasformata di LAPLACE di una funzione ipergeometrica. Precisamente dico che si ha

$$N(\alpha,\, x)=\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)}\mathfrak{L}_x[F_\alpha(t)+\bar{F}_\alpha(t)] \quad (\Re\alpha<1,\ \Re x>0), \tag{3}$$

dove la sopralineatura denota, al solito, il coniugato e si è posto

$$\begin{aligned} F_\alpha(t)&=\frac{t^{-2\alpha}}{t+i}F\left(1,\, 1-\alpha;\, 2-2\alpha;\, \frac{t}{t+i}\right)= \\ &=2\frac{t^{-2\alpha}}{t+2i}F\left(1,\, \frac{1}{2};\, \frac{3}{2}-\alpha;\, \frac{t}{t+2i}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

2. Partiremo dalla ben nota formula

$$\mathfrak{L}_x\left[\frac{t^{-\alpha}}{1+t}\right]=\Gamma(1-\alpha)e^x\Gamma(\alpha,\, x), \quad (\Re\alpha<1,\ \Re x>0).$$

da cui — essendo lecito supporre che, diversamente dal solito, il cammino d'integrazione sia una parallela all'asse immaginario — ponendo $t=i\tau$ si deduce subito che

$$\Gamma(1-\alpha)e^{-ix}\Gamma(\alpha,\, -ix)=e^{(1-\alpha)\pi i/2}\mathfrak{L}_x\left[\frac{\tau^{-\alpha}}{1+i\tau}\right].$$

Conseguentemente, moltiplicando quest'uguaglianza per l'analoga in cui i è cambiato in $-i$, avremo

$$[\Gamma(1-\alpha)]^2N(\alpha,\, x)=\mathfrak{L}_x\left[\frac{t^{-\alpha}}{1+it}\right]\cdot\mathfrak{L}_x\left[\frac{t^{-\alpha}}{1-it}\right]$$

(2) V. (salvo le diverse notazioni) W. MAGNUS-F. OBERHETTINGER: *Formeln und Sätze u. s. w.*, 2. Aufl. Berlin..., Springer, 1948, p. 172.

(3) Per il *Bateman Manuscript Project:* un'iniziativa del California Institute of Technology finanziata dall'Office of Naval Research degli S. U.

da cui, per il teorema della FALTUNG [4], segue

$$[\Gamma(1-\alpha)]^2 N(\alpha, x) = \mathfrak{L}_x[f_\alpha(t)] \tag{5}$$

avendo posto

$$f_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{1-it} * \frac{t^{-\alpha}}{1+it} = \int_0^t \frac{\tau^{-\alpha}}{1-i\tau} \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{1+i(t-\tau)} d\tau. \tag{6}$$

Da quest' ultima formula, osservando che si ha identicamente

$$\frac{1}{1-i\tau} \frac{1}{1+i(t-\tau)} = \frac{1}{it}\left(\frac{1}{1-i\tau} - \frac{1}{1+it-i\tau}\right)$$

e cambiando la variabile d'integrazione τ nell'altra $\xi = \tau/t$, si ha

$$f_\alpha(t) = t^{1-2\alpha}\left\{\int_0^1 \frac{[\xi(1-\xi)]^{-\alpha}}{t\xi + i} d\xi + \int_0^1 \frac{[\xi(1-\xi)]^{-\alpha}}{t(1-\xi) - i} d\xi\right\}.$$

Ma il secondo integrale si riduce al primo cambiando ξ in $1-\xi$ ed i in $-i$ rispettivamente; dunque possiamo più semplicemente scrivere

$$f(t) = t^{1-2\alpha}[\varphi_\alpha(t) + \bar{\varphi}_\alpha(t)] \tag{7}$$

essendo

$$\varphi_\alpha(t) = \int_0^1 \frac{[\xi(1-\xi)]^{-\alpha}}{t\xi + i} d\xi = \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{[\xi(1-\xi)]^{-\alpha}}{1-it\xi} d\xi.$$

Ciò posto osserviamo che l'ultimo integrale può identificarsi col generale integrale ipergeometrico:

$$\int_0^1 \xi^{b-1}(1-\xi)^{c-b-1}(1-z\xi)^{-a} d\xi = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z)$$

ponendo

$$a = 1, \quad b = 1-\alpha, \quad c = 2-2\alpha, \quad z = it.$$

Per note formule sulle funzioni ipergeometriche (generiche o relative al caso $c = 2b$) avremo dunque

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{i}\frac{[\Gamma(1-\alpha)]^2}{\Gamma(2-2\alpha)} F(1, 1-\alpha; 2-2\alpha; it) =$$
$$= \frac{[\Gamma(1-\alpha)]^2}{\Gamma(2-2\alpha)} \frac{1}{t+i} F\left(1, 1-\alpha; 2-2\alpha; \frac{t}{t+i}\right) =$$
$$= \frac{[\Gamma(1-\alpha)]^2}{\Gamma(2-2\alpha)} \frac{2}{t+2i} F\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-\alpha; \frac{t}{t+2i}\right)$$

(4) V. p. es. G. DOETSCH: *Laplace-Transformation*, Berlin, Springer, 1937, p. 155 e seg.

donde, sostituendo nella (7) e poi nella (6), segue la formula da dimostrare.

3. Dalla (3), ponendo $\alpha = 0$ e ricordando che

$$F(1,\ 1;\ 2;\ z) = -\frac{1}{z}\log(1-z)$$

segue immediatamente la formula di Enneper (1). Ponendo invece $\alpha = 1/2$, tenuto conto che

$$F\left(1,\ \frac{1}{2};\ 1;\ z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

con elementari trasformazioni, la (3) fornisce

$$N(1/2,\ x) = \sqrt{2}\,\mathfrak{L}_x[\{(1+t^2)(1+\sqrt{1+t^2})\}^{-1/2}]: \tag{8}$$

una formula che sembra ben diversa dalla (2). Tuttavia ricordando ([5]) che se è

$$\mathfrak{L}_x[F(t)] = f(x)$$

si ha pure

$$\mathfrak{L}_{2\sqrt{x}}[F(t^2)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{L}_x[t^{-3/2}f(1/t)]$$

e tenendo altresì conto che è

$$\mathfrak{L}_x\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{it}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{x-i}},$$

non è difficile verificare che i due risultati sono perfettamente equivalenti.

Forse la (8) è preferibile alla (2) perchè sotto il segno $\mathfrak{L}$ c'è una funzione algebrica invece di una trascendente.

Finalmente vogliamo osservare che dalla (6) può anche dedursi che

$$f_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{1+t^2}(1+it) * \frac{t^{-\alpha}}{1+t^2}(1-it) =$$
$$= \frac{t^{-\alpha}}{1+t^2} * \frac{t^{-\alpha}}{1+t^2} + \frac{t^{1-\alpha}}{1+t^2} * \frac{t^{1-\alpha}}{1+}$$

cioè che, con evidente simbolica, si ha anche

$$N(\alpha,\ x) = [\Gamma(1-\alpha)]^{-2}\,\mathfrak{L}_x\left[\left(\frac{t^{-\alpha}}{1+t^2}\right)^{*2} + \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1+t^2}\right)^{*2}\right]. \tag{9}$$

([5]) Magnus-Oberhettinger: op. cit., p. 169.