
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI SANSONE

Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Legendre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 4
(1949), n.4, p. 339–341.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_339_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Legendre.

Nota di GIOVANNI SANSONE (a Firenze).

Sunto. - Si studia la differenza $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1}$ per $x > 1$ e si stabilisce una limitazione per P_{n+1}/P_n .

a) Se $\{P_n(x)\}$, $P_0 = 1$, $P_n(x) = (2^n n!)^{-1} [d^n(x^2 - 1)^n / dx^n]$, ($n = 1, \dots$) è la successione dei polinomi di LEGENDRE, G. SZEGÖ ⁽¹⁾, ha dato quattro dimostrazioni della disuguaglianza di P. TURÁN

$$(1_1) \quad \Delta_n(x) = [P_n(x)]^2 - P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \geq 0, \quad (n \geq 1, -1 \leq x \leq 1),$$

e a questa, in una nota precedente ⁽²⁾ abbiamo sostituito una limitazione più forte

$$0 < \frac{1 - P_n^2(x)}{2n(n+1)} < \Delta_n(x) < \Delta_n(0) + \frac{P_n^2(0) - P_n^2(x)}{2n(n+1)}, \quad (n \geq 1, -1 < x < 1).$$

Vogliamo ora completare lo studio di $\Delta_n(x)$ per $|x| > 1$, ed essendo $\Delta_n(x)$ pari, basterà limitarci al caso $x > 1$.

b) Si ha ⁽³⁾

$$(2) \quad \Delta'_n(x) - \frac{x}{x^2 - 1} \Delta_n(x) = - \frac{1}{n(n+1)} P_n(x) P'_n(x)$$

⁽¹⁾ G. SZEGÖ: *On an inequality of P. Turán concerning Legendre polynomials*, « Bull. of the Am. Math. Soc. », 54 (1948), pp. 401-405.

⁽²⁾ G. SANSONE: *Su una disuguaglianza di P. Turán relativa ai polinomi di Legendre*; « Boll. Un. Mat. It. », (3), 4 (1949), pp. 221-223. Nella (7) vi è un evidente errore di stampa: il denominatore è $2n(n+1)$.

⁽³⁾ Cfr. G. SANSONE: nota cit. in ⁽²⁾, formula (4).

e da questa equazione differenziale lineare integrando [otteniamo

$$\Delta(x) = \sqrt{x^2 - 1} \left[-\frac{1}{n(n+1)} \int_1^x \frac{P_n(t) P_n'(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt + c \right],$$

e poichè $\lim_{x \rightarrow 1+0} \Delta_n(x)/(x^2 - 1)^{1/2} = 0$, ne viene

$$-\Delta_n(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{n(n+1)} \int_1^x \frac{P_n(t) P_n'(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad (n \geq 1, x > 1),$$

e perciò

$$(1_1) \quad \Delta_n(x) < 0 \quad \text{per} \quad n \geq 1, x > 1.$$

Ora $P_n(1) = 1$, $P_n'(1) = n(n+1)/2$, ed essendo $P_n(t)$, $P_n'(t)$ crescenti per $t \geq 1$ ne viene che $\Delta_n(x)$ è negativo, decrescente per $x > 1$, e

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta_n(x) = -\infty.$$

c) Una seconda dimostrazione della decrescenza di $\Delta_n(x)$ in $(1, +\infty)$, di natura algebrica è la seguente.

Per la (2) se un valore di $x > 1$ annullasse $\Delta_n'(x)$, le funzioni $\Delta_n(x)$ e $-P_n(x)P_n'(x)$ avrebbero segno contrario, e poichè

$$-P_n(x)P_n'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \geq 1$$

ne viene che

$$(4) \quad \Delta_n(x), \quad \Delta_n'(x), \quad -P_n(x)P_n'(x)$$

formano una successione di STURM in $(1 + \varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$.

Essendo $\Delta(1) = 0$, $\Delta_n'(1) = -1$, si può scegliere ε così piccolo in guisa che risulti

$$\Delta_n(1 + \varepsilon) < 0, \quad \Delta_n'(1 + \varepsilon) < 0, \quad -P_n(1 + \varepsilon)P_n'(1 + \varepsilon) < 0,$$

cioè la successione (4) per $x = 1 + \varepsilon$ presenta due permanenze, e siccome crescendo x questa non può acquistare variazioni ⁽⁴⁾ ne segue che per $x > 1$ è

$$\Delta_n(x) < 0, \quad \Delta_n'(x) < 0.$$

d) Dalla (3) (per $x > 1$) si ha

$$(5_1) \quad P_n(x)/P_{n-1}(x) < P_{n+1}(x)/P_n(x),$$

ma $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n+1}(x)/P_n(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ⁽⁵⁾, e ne segue

$$(5_2) \quad 0 < P_{n+1}(x)/P_n(x) < x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad (x > 1, n = 1, \dots).$$

⁽⁴⁾ Cfr. ad es. M. CIPOLLA: *Analisi Algebrica e introduzione al Calcolo Infinitesimale*, (3^a ed., Principato, Milano, 1948), p. 430.

⁽⁵⁾ Cfr. G. SANSONE: *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, I (2^a ed., Bologna, 1948), p. 161.

È poi noto che posto $\xi = x + \sqrt{x^2 - 1}$, per il rapporto

$$P_{n+1}(x) / P_n(x)$$

vale la formula di approssimazione asintotica ⁽⁶⁾

$$(6_1) \quad \frac{1}{\xi} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = 1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(2n-1)} \frac{1}{\xi^2} + R(\xi)$$

con

$$(6_2) \quad |R(\xi)| \leq \frac{\pi}{n+1} \left[\frac{3}{\xi^2(\xi-1)} + \frac{1}{\xi^2(\xi-1)^2} \right].$$