Bollettino Unione Matematica Italiana

G. Palamà

Numero di termini minimo di un membro di multigrade non banali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 310–317.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_310_0>

Numero di termini minimo di un membro di multigrade non banali.

Nota di G. PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Si stabiliscono dei teoremi relativi all'impossibilità della*

$$a_1, \dots, a_p \overset{2}{=} b_1, \dots, b_q$$

nei casi

$$k = 1, 2, \dots, n; \quad k = 2, 4, \dots, 2n; \quad k = 1, 3, \dots, 2n-1.$$

e quando p *e* q *hanno valori opportuni.*

(2) Si veda per es. quanto scrive O. BELLUZZI: *Scienza delle costruzioni*. Vol II°, pag. 207 (nota 59) a proposito del calcolo dell'arco elastico con i cinque poligoni.

(3) J. STEINER: *Geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises*, 1938.

Nell' « Intermédiaire des Recherches Mathématiques » (1) noi si proponeva la seguente questione:

Nella

$$a_1, \dots, a_p \overset{k}{=} b_1, \dots, b_q,$$

quando essa sussiste senza essere banale per i valori di k *di uno dei seguenti tre casi:*

1° $k = 1, 2, \dots, n$;
2° $k = 2, 4, \dots, 2n$;
3° $k = 1, 3, \dots, 2n - 1$;

quale è il minimo valore che può assumere q, *sia quando è* $p = n + 1$, *che quando è* $p = n + 2$?

Per rispondere alla 1ª questione il sig. A. GLODEN (2) enunciava senza dimostrare, (e soltanto per il caso $p = n + 1$), il seguente interessante teorema: *La*

$$a_1, \dots, a_{n+1} \overset{n}{=} b_1, \dots, b_q,$$

con i termini tutti positivi è impossibile, se non con soluzioni banali, se $q < n$.

E per rispondere alla 2ª questione, appoggiandosi, (sempre nel detto caso $p = n + 1$), a risultati empirici, affermava che *la* (3)

$$a_1, \dots, a_{n+1} \underset{2}{\overset{2n}{=}} b_1, \dots, b_q,$$

è impossibile con soluzioni non banali se $q < n$.

(1) Cfr. « Inter. Rech. Math. », t. 2, fasc. 6, (1946), domande 0471, 0472, p. 41.

Per teoremi, proprietà, ecc. delle multigrade cfr. per es. G. PALAMÀ *Saggio di una nuova trattazione delle multigrade*, « Boll. Un, Mat. It. », serie III, anno III, n. 3, (dic. 1948), pp. 263-78.

(2) Cfr. « Int. Rech. Math. », t. 4, fasc. 13, (1948), risposta 1076, pp. 14-5.

(3) Si ricordi che la

$$a_1, \dots, a_p \underset{2}{\overset{2n}{=}} b_1, \dots, b_q,$$

sta per la

$$a_1, \dots, a_p \overset{k}{=} b_1, \dots, b_q, \qquad (k = 2, 4, \dots, 2n);$$

e così analogamente noi scriviamo

$$a_1, \dots, a_p \underset{2}{\overset{2n-1}{=}} b_1, \dots, b_q \quad \text{invece di} \quad a_1, \dots, a_p \overset{k}{=} b_1, \dots, b_q, \quad (k = 1, 3, \dots, 2n - 1).$$

Cfr, G. PALAMÀ, *Un teorema analogo a quello di Tarry, ecc.*, « Atti del Sem. Mat. e fis. della Università di Modena », vol. II, (1947-8).

La risposta che il sig. GLODEN dava alla 3ª questione era però già nota [4].

Ora noi qui dimostriamo alcune proposizioni assai generali da cui si traggono, come casi particolari, risposte alle nostre questioni che sarebbero esaurienti qualora, insieme con i teoremı con i quali dimostriamo la impossibilità di alcune multigrade, potessimo in qualche modo provare anche la possibilità di quelle che per i teoremi qui stabiliti non sarebbero impossibili.

1. TEOR. 1°. - *È impossibile, se non con soluzioni banali, la*

$$a_1, \ldots, a_{n+m} \overset{n}{=} b_1, \ldots, b_{n-1}, \qquad (m \geq 1), \tag{1}$$

quando tutti i termini sono positivi.

Infatti, ammessa possibile la (1), a_i, b_i siano rispettivamente radici delle equazioni

$$x^{n+m} + A_1 x^{n+m-1} + \ldots + A_{n+m} = 0, \tag{2}$$

$$x^{n+m} + B_1 x^{n+m-1} + \ldots + B_{n-1} x^{m+1} = 0, \tag{3}$$

e di quest'ultima le b_i siano le radici non nulle.

Dal confronto delle relazioni, fra i coefficienti di un'equazione e le funzioni simmetriche semplici di essa, relative a (2) e (3), seguirebbe subito, a mezzo della (1)

$$A_i = B_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

e quindi

$$A_n = B_n = 0,$$

che è assurda, perchè, essendo positive non nulle le radici di (2), non può essere $A_n = 0$.

Questo teorema, che ovviamente sussiste anche se il numero dei teoremi del 2° membro della (1) è minore di $n - 1$, dà per $m = 1$ ed $m = 2$ una parziale risposta alla 1ª questione rispettivamente nei casi $p = n + 1$, $p = n + 2$. Si noti che si è detto parziale, sia perchè nella 1ª questione non ci si riferisce solamente a multigrade con termini tutti positivi, ma anche a multigrade con termini sia positivi che negativi, e sia per quanto si è osservato alla fine dell'introduzione.

Ecco pertanto un interessante teorema che si riferisce, ed in maniera assai generale, al caso di multigrade con termini sia positivi che negativi.

[4] Cfr. G. PALAMÀ, *Teoremi relativi alle uguaglianze multigrade*, « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », fasc. III-IV, (1947), l'osservazione del n. 29.

TEOR. 2°. - *La*

$$a_1, \dots, a_{n+m} \overset{n}{=} b_1, \dots, b_{n-2}, \qquad (m \geq 1) \tag{4}$$

è impossibile in numeri interi, se non con soluzioni banali, se gli interi $a_1, \dots, a_{n+m}, b_1, \dots, b_{n-2}$ *sono in parte negativi ed in parte positivi.*

Difatti con procedimento analogo a quello della dimostrazione del precedente teorema, si avrebbe, qualora la (4) fosse possibile in interi relativi, poichè la (3) andrebbe sostituita con la

$$x^{n+m} + B_1 x^{n+m-1} + \dots + B_{n-2} x^{m+2} = 0,$$

che

$$A_{n-1} = B_{n-1} = A_n = B_n = 0,$$

e ciò è assurdo, perchè allora la (2), mancando di due termini consecutivi, $(a_{n-1} = a_n = 0)$, dovrebbe avere almeno due radici complesse.

Naturalmente anche questo teorema sussiste se il numero dei termini del 2° membro della (4) è minore di $n - 2$.

2. Dai due teoremi precedenti si possono trarre interessanti conseguenze.

S la

$$a_1, \dots, a_{n+m} \overset{n}{=} b_1, \dots, b_{n+r}, \tag{5}$$

ha

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{r+1} = M,$$

con M *minore (o maggiore) di tutti gli altri termini della* (5), *essa è impossibile con soluzioni non banali.*

Difatti se essa fosse invece possibile sottraendo M da ciascun termine della (5), ci troveremmo in disaccordo con il teor. 1°, (nella 2ª ipotesi per M, se si moltiplicano i termini della (5) per -1, dopo averne sottratto M).

E così analogamente per non contraddire il teor. 2° *non è possibile che nella* (5) *si abbia*

$$b_1 = \dots = b_{r+2} = M,$$

con M *non minore e nè maggiore di tutti gli altri termini della stessa* (5), *se essa non è banale.*

TEOR. 3°. - *È impossibile che, nella multigrada non banale*

$$a_1, \dots, a_{n+r} \overset{2n}{\underset{2}{=}} b_1, \dots, b_{n+r}, \qquad r \geq 1,$$

(in cui si possono ritenere positivi tutti i termini, perchè essa vale per soli esponenti pari), *sia*

$$b_1 = \dots = b_s = M, \qquad (M \neq 0),$$

così $s > 2r - 1$, $2r$ *qualora* M *rispettivamente è o no maggiore di tutti gli altri termini della* (6).

Difatti la nota proposizione: « *la*

$$a_1, \dots, a_p \overset{2n}{\underset{2}{=}} b_1, \dots, b_p,$$

implica la

$$\pm a_1 + t, \dots, \pm a_p + t \overset{2n+1}{=\!=\!=} \pm b_1 + t, \dots, \pm b_p + t,$$

con t *arbitrario* », per $t = M$ ci darebbe nei due casi:

a) M *maggiore di tutti gli altri termini*

$$M \pm a_1, \dots, M \pm a_{n+r} \overset{2n+1}{=\!=\!=} M \pm b_1, \dots, M \pm b_{n+r}, \tag{7}$$

con tutti i termini del 1° membro > 0 e con, nel 2° membro, s, ($> 2r - 1$), termini nulli ed i rimanenti

$$2(n + r) - s \leq 2n$$

maggiori di zero; e ciò è assurdo per il 1° teor.

b) M *non maggiore ecc.*

la stessa (7), da cui si ricaverebbe analoga conclusione assurda per il 2° teorema.

Teor. 4°. - *È impossibile con soluzioni non banali la*

$$a_1, \dots, a_p \overset{2n-1}{\underset{2}{=\!=\!=}} b_1, \dots, b_q, \tag{8}$$

(in cui si possono ritenere positivi tutti i termini, perchè quelli che non lo fossero basterebbe cambiarli di membro), *ove* $p + q = 2n + r$, $r \geq 1$, *se è*

$$b_1 = \dots = b_s = M, \qquad (M \neq 0).$$

con $s > r$, $r + 1$ *se rispettivamente* M *è o no maggiore di tutti gli altri termini.*

La dimostrazione analoga alla precedente segue subito dal noto teorema: « *La* (8) *implica la*

$$a_1 + t, \dots, a_p + t, -b_1 + t, \dots, -b_q + t \overset{2n}{=} b_1 + t, \dots, b_q + t, -a_1 + t, \dots, -a_p + t,$$

con t *arbitrario* », quando si assume $t = M$.

3. Consideriamo ora il caso escluso $M = 0$, del teor. 3°.

Teor. 5°, - *La* (6) *è impossibile, se non con soluzioni banali, se è*

$$b_1 = \dots = b_s = 0,$$

con $s > r$.

Infatti, poichè nella (6), come si è detto, si possono ritenere tutti i termini positivi, e nella (7) si può assumere $M = 0$, il 2° membro di essa avrebbe $2n + 2r - 2s$ termini in parte negativi ed in parte positivi il cui numero per $s > r$ sarebbe $< 2n$ e ciò è assurdo per il 2° teor.

4. I teoremi precedenti non escludono pertanto che siano possibili, con soluzioni non banali, le

$$a_1, \dots, a_{n+m} \overset{n}{=} b_1, \dots, b_n, \qquad (m \geq 1) \tag{9}$$

con tutti i termini positivi;

$$a_1, \dots, a_{n+m} \overset{n}{=} \underset{1}{M}. \dots, \underset{r}{M}, b_{r+1}, \dots, b_{n+r}, \qquad (m \geq 1), \tag{10}$$

se M è minore di tutti gli altri termini;

$$a_1, \dots, a_{n+m} \overset{n}{=} b_1, \dots, b_{n-1}, \qquad (m \geq 1) \tag{11}$$

con $a_1, \dots, a_{n+m}, b_1, \dots, b_{n-1}$ in parte negativi ed in parte positivi;

$$a_1, \dots, a_{n+m} \overset{n}{=} \underset{1}{M}, \dots, \underset{r+1}{M}, b_{r+2}, \dots, b_{n+r}, \qquad (m, r \geq 1); \tag{12}$$

se M non è minore e nè maggiore di tutti gli altri termini:

$$a_1, \dots, a_{n+r} \underset{2}{\overset{2n}{=}} \underset{1}{M}, \dots, \underset{2r-1}{M}, b_{2r}, \dots, b_{n+r}, \qquad (2 \leq r \leq n). \tag{13}$$

se M è maggiore di tutti gli altri termini della (13) che li rite) niamo, come è lecito, positivi;

$$a_1, \dots, a_{n+r} \underset{2}{\overset{2n}{=}} M, \dots, \underset{2r}{M}, b_{2r+1}, \dots, b_{n+r}, \qquad (1 \leq r \leq n), \tag{14}$$

se M non è maggiore di tutti gli altri termini della (14);

$$a_1, \dots, a_{n+r} \underset{2}{\overset{2n}{=}} b_1, \dots, b_n, \qquad (r \geq 1); \tag{15}$$

$$a_1, \dots. a_p \underset{2}{\overset{2n-1}{=\!=}} \underset{1}{M}, \dots, \underset{r}{M}, b_{r+1}, \dots, b_q, \tag{16}$$

se M è maggiore di tutti gli altri termini della (16) e se $p + q = 2n + r$. $r \geq 1$;

$$a_1, \dots, a_p \underset{2}{\overset{2n-1}{=\!=}} \underset{1}{M}, \dots, \underset{r+1}{M}, b_{r+2}, \dots, b_q, \tag{17}$$

se M non è maggiore di tutti gli altri termini e se è $p + q = 2n + r$, $r \geq 1$.

5. Esempi del tipo della (9), (per $m=1$), ne esistono infiniti. Infatti se $1 \leq n \leq 9$, da una multigrada normale. cioè del tipo

$$a_1, \ldots, a_{n+1} \overset{n}{=} b_1, \ldots, b_{n+1},$$

a mezzo del teor. di FROLOV, si può subito ottenere una avente la forma della (9), per $m=1$. Così per es. dalla

$$1,\ 6,\ 7,\ 17,\ 18,\ 23 \overset{5}{=} 2,\ 3,\ 11,\ 13,\ 21,\ 22,$$

sottraendo 1 da ogni termine, si ha la

$$5,\ 6,\ 16,\ 17,\ 22 \overset{5}{=} 1,\ 2,\ 10,\ 12,\ 20,\ 21.$$

Invece dalla

$$(18) \qquad 1,\ 4,\ 6,\ 12,\ 14,\ 17 \overset{5}{=} 2,\ 2,\ 9,\ 9,\ 16,\ 16,$$

si hanno tre esempi di multigrade del tipo della (11), sottraendo da ogni suo termine rispettivamente 2, 9, 16. La (18) è poi anche es. della (12).

Esempi della (14) sono dati dalle

$$1,\ 7 \overset{2}{\underset{2}{=}} 5,\ 5; \qquad 7,\ 17 \overset{2}{\underset{2}{=}} 13,\ 13; \quad \text{ecc.}$$

che si ricavano dalla

$$m^2 - n^2 + 2mn,\ m^2 - n^2 - 2mn \overset{2}{\underset{2}{=}} m^2 + n^2,\ m^2 + n^2, \quad (m, n \text{ arbitrari}),$$

in cui come è ovvio $m^2 + n^2$ non può essere maggiore dei valori assoluti di ciascuno dei due termini del 1° membro;
e dalle

$$0,\ 7,\ 7 \overset{4}{\underset{2}{=}} 3,\ 5{,}8; \qquad 0,\ 13,\ 13 \overset{4}{\underset{2}{=}} 7\ 8\ 15; \quad \text{ecc.}$$

che si traggono dalla [5]

$$(19) \quad 0.\ n^2 + np + p^2,\ n^2 + n\,) + p^2 \overset{4}{\underset{2}{=}} n^2 + 2np,\ p^2 + 2np,\ n^2 - p^2, \quad (n, p \text{ arbitrari}),$$

che non potrebbe essere identicamente soddisfatta per i valori 2 e 4 dell'esponente, se $n^2 + np + p^2$ fosse maggiore del valore assoluto di ciascun termine del 2° membro.

[5] Per notizie relative alla (19) del testo cfr. G. PALAMÀ, *Metodi per avere soluzioni parametriche della* $a_1, \ldots, a_p \overset{2,4}{=} b_1, \ldots, b_p$. *nei casi* $p=3$, $p=4$, « Rend. di Mat. e delle sue Applicazioni », fasc. 1°, (1947).

La (19) dà anche es. della (15).

Si noti ancora per es. la

$$7,\ 7,\ 7 \frac{3}{2} 1,\ 10,\ 10,$$

che è esempio sia della (16) che della (17) e la

$$a+M,\ b+M,\ b+M,\ b+M,\ 4a+7b+M \overset{2}{=} M,\ M,\ M,\ a+4b+M,\ 4a+6b+M$$

con a, b, M arbitrari, che è esempio della (10).

Osserviamo infine che la (13) è impossibile con soluzioni non banali se $r=n$ e se essa sussiste anche per l'esponente 1, perchè allora si avrebbe anche

$$a_1, \dots, a_{2n} \overset{2}{=} \underset{1}{M}, \dots, \underset{2n-1}{M}, b_{2n},$$

che è impossibile per l'osservazione iniziale del n. 2