Bollettino Unione Matematica Italiana

Silvio Cinquini

Sopra il cambiamento delle variabili negli integrali doppi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 228–235.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_228_0>

Sopra il cambiamento delle variabili negli integrali doppi

Nota di Silvio Cinquini (a Pavia).

Sunto: - *Nella presente nota, la quale ha un obbiettivo puramente didattico, viene esposta una dimostrazione del teorema per il cambiamento delle variabili negli integrali doppi di* Mengoli-Cauchy.

Nella preparazione, fatta assieme ad altro autore, delle « Lezioni di Analisi matematica » per i nostri studenti ho rilevato che le varie dimostrazioni del teorema per il cambiamento di variabili

$$x = X(u, v), \qquad y = Y(u, v)$$

nell'integrale doppio (nel senso di Mengoli-Cauchy)

$$(a) \qquad \iint_A f(x, y)dxdy = \iint_B f(X(u, v),\ Y(u, v)) \left| J\binom{XY}{uv} \right| dudv$$

appartengono in prevalenza a due tipi essenzialmente distinti:

I) L'uno che appare più spontaneo e che trae origine da Eulero [1], effettua il cambiamento delle variabili per gradi: ridotto l'integrale doppio che figura al primo membro della (a) a due integrazioni successive

$$\int_c^d dy \int_\varphi^\Psi f(x, y)dx,$$

si cambia la variabile x in u lasciando invariata la y; poi, dopo

[1] Euler: *De formulis integralibus duplicatis,* « Novi Comm. Acad. Petr. », T. XIV, pp. 72-103; oppure: « Institutionum Calculi inte- Vol. IV, pp. 416-445.

un' inversione dell'ordine delle integrazioni, si muta la variabile y in v mantenendo inalterata la u.

II) L'altro, che risale a GOURSAT [2] e che oggi è il più diffuso, si basa sulle note formule di GAUSS-GREEN utilizzando sia nel piano (x, y) sia nel piano (u, v) l'idea di trasfornare l'integrale doppio in un integrale curvilineo esteso al contorno del rispettivo campo di integrazione in modo da ridursi a effettuare il cambiamento di variabili in un integrale curvilineo.

Non mi soffermo sulle discussioni a cui può dar luogo il metodo I): basta tener presente che esso si basa sulla riduzione dell'integrale doppio che figura nel primo membro della (a) a due integrazioni successive, mentre una delle ragioni per la quale talvolta si ricorre al cambiamento delle variabili di integrazione è proprio la difficoltà che presenta la riduzione ora citata; a ciò si aggiunga il fatto che, dopo essere passati, per esempio, dalle variabili iniziali (x, y) alle (u, y), occorre fare un' inversione nell' ordine delle integrazioni.

Tra le dimostrazioni che si attengono al metodo II) ne distinguo due sottotipi:

II-1) La formula di GAUSS-GREEN viene applicata senz' altro a ciascuno degli integrali doppi che figurano nei due membri della (a). In tal caso la dimostrazione del teorema (sulla quale non mi indugio) è piuttosto semplice, però richiede ipotesi di derivabilità della funzione $f(x, y)$ che sono del tutto estranee al problema in questione.

II-2) Il cambiamento di variabili viene fatto inizialmente nel caso particolare $f(x, y) \equiv 1$, cosicchè le ipotesi ora accennate sono automaticamente soddisfatte. Poi, per stabilire il teorema in tutta la sua generalità, si suddivide il campo B in parti e si usufruisce, in modo più o meno diverso, del risultato raggiunto nel caso particolare $f(x, y) \equiv 1$.

A proposito di alcune dimostrazioni di questo sottotipo II-2) mi permetto di esprimere l'impressione che non si possa escludere che qualche esordiente possa trovare un po' di difficoltà di fronte a una domanda che si presenta spontanea quando si legga la dimostrazione originale di GOURSAT [3], la quale, a differenza da quelle

(2) E. GOURSAT: *Sur le changement de variables dans un intégrale double,* « Bull. des Sciences Mathém. », Vol. 29 (1894), pp. 92-95. Si deve citare anche una Nota di J. A. GMEINER: *Rein analitische Herleitung der Transformationsgleichung für eigentliche Doppelintegrale mit Hilfe des Green'schen Satzes.* « Monatshefte für Mathematik und Physik », Vol. IV (1893), pp. 277-293.

(3) Citata in (2).

che figurano in alcuni trattati, non può lasciare nel lettore il dubbio di non essersi abbastanza informato di quanto in un trattato precede la dimostrazione in questione: Premetto che nel luogo cit. in ([3]) la dimostrazione della formula

$$(b) \qquad \frac{A'}{B'} = \left| J\binom{XY}{uv} \right|_{(\xi,\,\eta)}$$

che esprime il rapporto tra le aree di due campi A' e B', appartenenti rispettivamente ai piani (x, y) e (u, v) e tra loro corrispondenti, viene fatta supponendo esplicitamente che il contorno del campo A' sia semplice e intendendosi (per quanto l'A. non ne faccia esplicito cenno) che il contorno di B' assicuri la validità della formula di GREEN. Ciò premesso il lettore si domanda se la suddivisione in parti più piccole (senza aggiungere alcuna precisazione) effettuata dal GOURSAT nel campo B possa essere fatta in modo che tra ciascuna di queste parti e la propria corrispondente nel campo A sussista la relazione (b) ([4]).

Ho redatto per i nostri studenti una dimostrazione che utilizza sia le formule di GAUSS sia l'idea, che è alla base delle dimostrazioni del tipo I), di effettuare il cambiamento di variabili per gradi. Questa dimostrazione è valida sotto condizioni molto ampie e non richiede alcuna ipotesi estranea alla natura del problema; essa riduce alla forma più semplice la questione rilevata a proposito della dimostrazione originale di GOURSAT. Non deve sorprendere se tale dimostrazione che espongo nelle seguenti righe (le quali hanno un obbiettivo puramente didattico), tralasciando alcuni par ticolari di tipo ben noto, si presenta nella sua redazione completa un po' lunga: ciò dipende dalla natura delle cose.

1. **Preliminari.** – Ricordiamo che, se $\varphi(y)$, $\psi(y)$ sono due funzioni continue nell'intervallo (c, d) e soddisfacenti alla disuguaglianza $\varphi(y) \leq \psi(y)$, il campo D costituito dai punti (x, y) soddisfacenti alle disuguaglia

$$\varphi(y) \leq x \leq \psi(y), \qquad c \leq y \leq d$$

si chiama *semplice rispetto alle parallele all' asse* x.

Se D è un campo semplice rispetto alle parallele all'asse x (e quindi quadrabile) e se $B(x, y)$ è una funzione continua in D assieme alla propria derivata parziale $\frac{\partial B}{\partial x}$, vale la *formula di*

([4]) Questo ordine di considerazioni è tenuto presente, per esempio, nella profonda dimostrazione di M. PICONE: *Lezioni di Analisi infinitesimale*, « Circolo matematico » di Catania, Vol. I, parte II, Cap. VI, n. 130, pp. 661-670. Vedi in particolare teorema V alla pag. 665, e pag. 667.

GAUSS

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x}\, dxdy = \int\limits_{\gamma} B(x, y) dy,$$

ove al secondo membro figura l'integrale curvilineo esteso al contorno γ del campo D percorso nel senso positivo (cioè quello in cui si percorre la curva γ lasciando alla propria sinistra i punti interni a D, quando si intenda che gli assi cartesiani (x, y) [5] siano orientati in senso sinistrorso).

Non ci indugiamo a ricordare la definizione di campo semplice rispetto alle parallele all'asse y e l'altra formula di GAUSS.

2. **Teorema.** - *Sia* A *un campo limitato, chiuso e quadrabile del piano* (x, y), *sia* f(x, y) *una funzione continua nel campo* A, *e siano*

$$x = X(u, v), \qquad y = Y(u, v) \tag{1}$$

due funzioni continue assieme alle loro derivate parziali del primo ordine in un campo B *limitato, chiuso e quadrabile del piano* (u, v), *e supponiamo che in ogni punto di* B *sia*

$$J\binom{XY}{uv} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

e che inoltre le equazioni (1) *pongano una corrispondenza biunivoca tra i punti di* A *e quelli di* B.

Sotto queste ipotesi vale la formula

$$\iint\limits_{A} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{B} f(X(u, v), Y(u, v)) \left| J\binom{XY}{uv} \right| dudv. \tag{3}$$

a) Per dimostrare il teorema enunciato cominciamo a considerare nel presente capoverso un caso particolarissimo: sia $f(x, y) \equiv 1$; il campo A del piano (x, y) sia un rettangolo a lati paralleli agli assi coordinati di vertici opposti (a, c), (b, d); e la sostituzione (1) abbia la forma

$$\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = v, \end{cases} \tag{4}$$

ove supponiamo che sia sempre $\dfrac{\partial X}{\partial u} \neq 0$.

[5] Si intende che noi consideriamo sempre assi ortogonali.

Allora, per ogni v fissato, possiamo ricavare dalla prima delle (4) u come funzione inversa di x

$$u = u(x, v),$$

e tenendo conto della seconda delle (4) si conclude immediatamente che al rettangolo A del piano (x, y) corrisponde nel piano (u, v) un campo B semplice rispetto alle parallele all'asse u. Pertanto, utilizzando la formula di GAUSS ricordata al n. 1 e tenendo presente che se $u = U(t)$, $v = V(t)$, $(t_0 \leq t \leq t_1)$, (ove il parametro t va scelto in modo opportuno) sono le equazioni parametriche del contorno di B, quelle del contorno di A risultano $x = X(U(t), V(t))$, $y = V(t)$, $(t_0 \leq t \leq t_1)$, si ottiene in modo ben noto

$$\iint_A dxdy = \iint_B \left| \frac{\partial X}{\partial u} \right| dudv. \tag{5}$$

b) Nel presente capoverso dimostriamo il teorema enunciato supponendo che, come in *a*), il campo A del piano (x, y) sia un rettangolo a lati paralleli agli assi coordinati e che inoltre per la sostituzione (1) sia verificata in ogni punto di B, oltre alla disuguaglianza (2), anche la seguente

$$\frac{\partial Y}{\partial v} \neq 0. \tag{6}$$

Poniamo

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = Y(u, v), \end{cases} \tag{7}$$

osservando che in virtù della (6), per ogni u fissato, dalla seconda delle (7) possiamo ricavare v come funzione inversa di y'

$$v = v(u, y');$$

e quindi, posto

$$\begin{cases} x = X(x', v(x', y')) \\ y = y' \end{cases}, \tag{8}$$

per eseguire la sostituzione (1) basta eseguire prima la (8) e poi la (7). Siccome $X(x', v(x', y'))$ è funzione composta di x', abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

ove abbiamo tenuto presente che per la prima delle (7) è $\dfrac{du}{dx'} = 1$, e quindi anche $\dfrac{\partial v}{\partial x'} = \dfrac{\partial v}{\partial u}$; e tenendo conto della (6) in virtù del teorema delle funzioni implicite risulta

$$(9) \qquad \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial v}\,\frac{\dfrac{\partial Y}{\partial u}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}},$$

ove per la (2) è sicuramente $\frac{\partial x}{\partial x'} \neq 0$ in tutto il campo B.

Ciò premesso, suddiviso il rettangolo A in un numero finito di rettangoli A_r, $(r = 1, 2, 3, \ldots, n)$ a lati paralleli agli assi coordinati e indicato con A_r' il campo del piano (x', y') che in virtù delle (8) corrisponde ad A_r, per il risultato raggiunto in a) abbiamo

$$\iint\limits_{A_r} dxdy = \iint\limits_{A_r'} \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy'.$$

Quindi, indicati con m_r e M_r il minimo e il massimo di $f(x, y)$ n A_r (cioè di $f(X(x', v(x', y')), y')$ in A_r'), essendo

$$m_r \iint\limits_{A_r'} \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy' \leq \iint\limits_{A_r'} f(\ldots) \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy' \leq M_r \iint\limits_{A_r'} \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy',$$

[ove, qui e nel seguito, è $f(\ldots) = f(X(x', v(x', y')), y')$] risulta (indicando con A_r anche l'area del rettangolo A_r)

$$m_r A_r \leq \iint\limits_{A_r'} f(\ldots) \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy' \leq M_r A_r,$$

e anche sommando rispetto a r da 1 a n

$$\sum_{r=1}^{n} m_r A_r \leq \iint\limits_{A'} f(\ldots) \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy' \leq \sum_{r=1}^{n} M_r A_r,$$

ove A' è il campo che le (8) fanno corrispondere nel piano (x', y') al rettangolo A del piano (x, y). Passando al limite facendo tendere a zero le diagonali di ciascuno dei rettangoli A_r risulta

$$(10) \qquad \iint\limits_{A} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{A'} f(\ldots) \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy'.$$

Tracciati nel piano (x', y') due sistemi di rette parallele agli assi coordinati e tra loro equidistanti, siano B_s', $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$ quelli tra i quadrati così ottenuti che sono tutti costituiti di punti di A'; eseguiamo sull'integrale

$$\iint\limits_{B_s'} f(\ldots) \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy'$$

la sostituzione (7) osservando che per la (6) ci troviamo in condizioni del tutto analoghe a quella della prima parte del presente capoverso, e quindi, indicando con B_s il campo del piano (u, v) che le (7) fanno corrispondere al quadrato B_s', abbiamo

$$\iint_{B_s'} f(\ldots)\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy' = \iint_{B_s} f(X(u, v),\ Y(u, v))\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\left|\frac{\partial Y}{\partial v}\right| dudv.$$

Pertanto, siccome in virtù della (9) è

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\left|\frac{\partial Y}{\partial v}\right| = \left|J\begin{pmatrix}XY\\uv\end{pmatrix}\right|,$$

sommando rispetto a s da 1 a μ, si ottiene

$$\sum_{s=1}^{\mu}\iint_{B_s'} f(\ldots)\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dx'dy' = \sum_{s=1}^{\mu}\iint_{B_s} f(X(u, v),\ Y(u, v))\left|J\begin{pmatrix}XY\\uv\end{pmatrix}\right| dudv.$$

Facendo tendere a zero l'equidistanza tra le rette parallele di ciascuno dei sistemi tracciati nel piano (x', y'), l'area complessiva dei quadrati B_1', B_2', .., B_μ' tende all'area del campo A', e siccome usufruendo di questo risultato si prova, con considerazioni che tralasciamo, che anche l'area complessiva dei campi B_s, $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$ tende all' area del campo B, risulta

$$\iint_{A'} f(\ldots)\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| dxdy = \iint_{B} f(X(u, v),\ Y(u, v))\left|J\begin{pmatrix}XY\\uv\end{pmatrix}\right| du\,dv,$$

e in virtù della (10) la (3) è così provata sotto le ipotesi fatte all'inizio del presente capoverso.

È evidente che il risultato raggiunto nel presente capoverso è valido anche quando, in luogo della (6), è verificata in tutto B la disuguaglianza

$$(11) \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} \neq 0.$$

c) Per stabilire la (3) in tutta la sua generalità ricordiamo che in virtù della (2) l'insieme dei punti del campo B in cui si annulla la derivata parziale $\frac{\partial Y}{\partial u}$, e quello dei punti in cui si annulla la derivata parziale $\frac{\partial Y}{\partial v}$ hanno una minima distanza $\delta_1 > 0$: infatti in caso contrario, siccome tali derivate parziali sono per ipotesi continue, ci sarebbe almeno un punto di B in cui entrambe tali derivate parziali sarebbero nulle e quindi in tale punto risulterebbe $J\binom{XY}{uv} = 0$, contrariamente alla (2). Pertanto si può determinare in modo noto un $\delta > 0$ tale che a ogni quadrato del campo A, la cui diagonale ha lunghezza minore di δ, corrisponda nel piano (u, v) un campo (i cui punti hanno una massima distanza inferiore a δ_1) nel quale è verificata o la (6) o la (11), e quindi è valido il risultato raggiunto in b).

Ciò premesso, tracciamo nel piano (x, y) due sistemi di rette parallele agli assi coordinati in modo che l'equidistanza tra le rette di ciascuno dei due sistemi sia minore di $\delta : \sqrt{2}$; siano Q_j, $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ quelli tra i quadrati così ottenuti che sono tutti costituiti di punti appartenenti al campo A. Se P_j è il campo del piano (u, v) che le (1) fanno corrispondere al quadrato Q_j, per il risultato raggiunto in b) abbiamo

$$\iint_{Q_j} f(x, y)dxdy = \iint_{P_j} f(X(u, v), Y(u, v)) \left| J\binom{XY}{uv} \right| dudv ,$$

e perciò, sommando rispetto a j da 1 a ν e passando al limite facendo tendere a zero l'equidistanza tra le rette parallele di ciascuno dei due sistemi, si ottiene la (3) che è così provata in tutta la sua generalità.

3. **Osservazione.** – È evidente che la dimostrazione del n. 2 può essere sviluppata con qualche modificazione anche in condizioni più ampie di quelle in cui, per semplicità, noi ci siamo posti.