
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * Cesare Rimini, *Fondamenti di Analisi Matematica con applicazioni*, vol I, Zanichelli, Bologna, 1948 (A. Mambriani)
- * Pacifico Mazzoni, *Lezioni di Analisi Algebrica*, Macrì, Bari, 1947 (Silvio Minetti e risposta di Pacifico Mazzoni)
- * D. E. Rutherford, *Substitutional Analysis*, Edinburgh, 1948 (Giovanni Sansone)
- * C. A. Grover, *Hyperbolic functions - Their derivation and applications in vector algebra*, Classifax, Manchester, 1948 (Luigi Merli)
- * H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Methuen and Co., London, 1948 (Luigi Muracchini)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 4
(1949), n.2, p. 191–198.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_191_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

CESARE RIMINI: *Fondamenti di Analisi Matematica con applicazioni*
Vol. I, 1948, Bologna, N. Zanichelli, pp. XVIII+549.

Quest'Opera (divisa in due volumi al solo scopo di rendere materialmente più maneggevole l'Opera stessa) vuole presentarci l'intonazione che — secondo il pensiero del RIMINI — dovrebbe darsi all'insegnamento dell'Analisi Matematica, specialmente nei corsi propedeutici all'Ingegneria, alla Fisica, alla Chimica, ecc. E questo pensiero mi sembra vada ben meditato, in quanto — com'è ben noto — l'A. è un valente cultore delle applicazioni della Matematica. La materia viene raggruppata seguendo specialmente il punto di vista concettuale, ciò che ne facilita assai la consultazione. Alcune questioni sono trattate con particolare profondità: tali sono principalmente quelle relative agli infinitesimi, quelle relative ai differenziali, quelle sui vettori. L'A. si è sommanamente preoccupato del passaggio, tanto importante e sempre delicatissimo, dalla teoria alle applicazioni: in vari punti ha saputo mostrarci la grande fecondità di taluni procedimenti e la potenza strumentale di alcune teorie; procedimenti e teorie che in generale non sono valutati sufficientemente.

Passiamo ora in rassegna il contenuto dei vari Capitoli. Il Cap. I tratta dei numeri complessi e il Cap. II dei determinanti, delle equazioni lineari e delle forme lineari e quadratiche: vi è qui quanto solitamente figura su tali argomenti nei comuni trattati. Nel Cap. III, poste con laghezza le basi della teoria degli insiemi, l'A. passa a stabilire il concetto di funzione di una o più variabili e sviluppa i preliminari su tale concetto. Il Cap. IV s'occupa dei limiti delle successioni e delle funzioni, e va qui sottolineata la cura speciale dell'A. nel porre e nell'analizzare le definizioni; s'introduce il concetto di successione subordinata di una data successione e di funzione subordinata di una data funzione, concetto applicato sistematicamente nel seguito. Il Cap. V tratta della continuità delle funzioni e vengono applicati i concetti del Cap. precedente. Il Cap. VI si occupa degli infinitesimi e degli infiniti; viene stabilita la nozione di infinitesimi equivalenti e di infiniti equivalenti, e si insiste sulle eguaglianze fra infinitesimi o su quelle fra infiniti, ciascuna delle quali dà luogo a due altre eguaglianze (quella fra le parti principali e quella fra le altre due parti rimanenti). Nel Cap. VII si tratta delle derivate e dei differenziali delle funzioni di una o di più variabili; delle forme differenziali non vengono qui considerate soltanto quelle che sono parti principali di un incremento, ma più generalmente le parti principali dell'elemento infinitesimo di un tutto non ancora individuato. Il Cap. VIII si occupa di applicazioni analitiche, e cioè delle regole di L'Hospital e di Cesàro, della formula di Taylor che viene dedotta da quella generale della interpolazione, delle funzioni implicite (in cui si sottolinea come la dimostrazione stessa del teorema fondamentale ci dia il campo ove esiste la funzione implicita), dei mutamenti di variabili

(che acquistano chiarezza cristallina con l'uso dei differenziali), infine degli estremi relativi delle funzioni. Il Cap. IX s'occupa delle serie (il cui studio si snellisce notevolmente approfittando delle nozioni dei Capitoli precedenti) e poi vengono studiate le trascendenti elementari nel campo complesso. Il Cap. X tratta dei vettori, e vengono dati anche quei concetti che molto spesso nei trattati si attribuiscono alla Cinematica e alla Statica. Il Cap. XI tratta le applicazioni geometriche e cinematiche, ed i risultati sono ottenuti con l'uso opportuno di vettori e differenziali; si studiano dapprima le curve piane e in particolare si analizzano i punti doppi di tali curve, indi sono studiate le curve sghembe per le quali la trattazione vettoriale dona semplicità ed eleganza, si studiano le superficie analizzandone gli intorno del 1° e del 2° ordine, infine si danno le nozioni fondamentali di Cinematica ponendo in luce la grande utilità dei concetti generali. Nel Cap. XII (ed ultimo) figurano alcuni richiami di Analisi algebrica sulla divisibilità, sulle equazioni algebriche e nozioni ad esse collegate.

A completare poi vari punti degli argomenti trattati gioveranno i Complementi che l'A. ha posto alla fine del Vol. II di prossima pubblicazione.

Credo quindi che quest'Opera, profondamente meditata dal suo A., incontrerà il pieno favore degli studiosi: risulterà piana ed efficace per gli studenti, utilissima per i teorici e per i pratici.

A. MAMBRIANI

PACIFICO MAZZONI - *Lezioni di Analisi Algebrica* - Macri, Bari, 1947, pag. 250 in XI capitoli.

La veste è nitida e, salvo rarissime eccezioni, tipograficamente corretta. L'opposto accade, invece, pel testo. A pag. 9 (riga 9ª dal basso) si legge (1):

« Due classi di numeri razionali A e B si dicono contigue, quando siano « soddisfatte le seguenti condizioni: 1° ogni numero della prima classe sia « minore di ciascun numero della seconda; 2° dato un numero positivo ε , e « piccolo a piacere, si possa trovare un elemento a della prima classe e uno b « della seconda tali che la loro differenza sia minore di ε .

Cosicchè, io osservo, la classe (di numeri razionali):

..., $(-n)$, $(-n+1)$, ..., (-3) , (-2) , (-1) ; classe A

e l'altra

1, 2, 3, ..., n , ...; classe B (n intero positivo)

sarebbero, secondo l'Autore, « classi contigue »! Non vi si definisce neppur la nozione di intervallo (chiuso ovvero) « serrato » alla Severi od aperto (la sostituzione della parola serrato a quella di « chiuso » ha profonde ragioni topologiche, sulle quali non stimo opportuno intrattenermi). Per ciò, quasi tutti i teoremi sulle funzioni continue e sulle derivate perdono ogni validità. A pag. 131 (quarta riga dal basso), si legge: « Intorno di a significa un intervallo (2) comprendente il valore a . Sarà intorno destro se x si considera soltanto, per valori maggiori di a , etc. (3) ». Con ciò, io osservo, un intorno destro (o sinistro) non è più

(1) Riporto i passi del Prof. Mazzoni, come sempre farò in seguito.

(2) Che, poi, non si sa che cosa sia, perchè non è stato definito.

(3) Analogamente per l'intorno sinistro.

un intorno! (4). La teoria dei limiti è sviluppata senza neppur dare la nozione di « punto di accumulazione »! Ciò potrebbe anche passare per una Facoltà di Economia e Commercio, ma è da notare che il libro del Prof. Mazzoni serve di testo anche, e forse soprattutto, agli studenti della Facoltà di Ingegneria e di Scienze (Matematiche pure e Matematica e Fisica) dell'Università di Bari! Il concetto di limite è dall'Autore interpretato e « chiarito » così (pag. 132, righe 1^a, 2^a, 3^a, 4^a e 5^a dall'alto): « In altre parole *tutti* i valori della $f(x)$ in un intervallo $a - \sigma$, $a + \sigma$ abbastanza piccolo *comprendente il valore a* (5), devono scostarsi dal limite di una quantità $< \epsilon$ etc. ». Peggio: la paroletta « tutti », che, insieme alla dizione « comprendente il punto a », snatura la nozione, è ivi scritta *addirittura in corsivo!* A pag. 144 (righe 13 e 14) si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \log_e e = 1$, mentre della continuità si parla solo a pag. 149. A pag. 147 (righe 10^a e segg.), l'Autore senza essersi preoccupato di stabilire la così delicata nozione di lunghezza di un arco di curva, cerca il lim del peri-

metro di un poligono *regolare* inscritto in una circonferenza di raggio R ; trova $2\pi R$; e conchiude: « Dunque la misura della circonferenza è $2\pi R$! A pag. 151 (righe 17^a e 18^a dall'alto) si arriva a dire: « Se $f(x)$ è continua lo è $\log f(x)$ »! Si pensi ad $f(x) = \sin x$, o, più efficacemente, ad $f(x) \equiv 0$! Il teorema fondamentale sulle funzioni continue relativo all'esistenza del max e min (pag. 152) è, per almeno duplice motivo, indimostrato (6). In « tutto il libro », sul concetto dominante di *differenziale* si dice *solo* così (pag. 156 righe 11^a, 12^a e 13^a dall'alto): « il prodotto $f'(x)h$ lo si chiama differenziale della funzione! ». *Non vi è neppur segnalata, l'interpretazione geometrica del differenziale!* La continuità uniforme è saltata a piè pari (7).

• Mi limiterò, per finire, ad osservare che a pag. 184 si legge: « *Teorema di Cauchy.* - Considerate due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ il rapporto dei loro incrementi relativi ad un intervallo a, b è uguale al rapporto delle loro derivate calcolate in un certo punto intermedio. In formula $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ». E l'Autore si « illude » di « dimostrare » questa falsissima proposizione (8).

E dopo ciò « chiudo » e « non conchiudo ».

SILVIO MINETTI

(4) Già, perchè non comprende il valore a .

(5) L'Autore sente il bisogno, lo si noti bene, di dichiarare che l'intervallo comprende il punto a .

(6) Notando, altresì, che la definizione di max e min è data solo a pag. 179.

(7) E si ricordi che il libro è adottato anche nella Facoltà di Scienze fisiche matematiche e naturali dell'Università di Bari.

(8) Basti pensare ad una $f(x) = \text{cost.}$ e ad una $g(x) = \text{cost.}$, funzioni entrambe continue. E ho detto falsissima poichè, anche volendo concedere al Prof. Mazzoni che Egli reputi aprioristicamente che il primo membro della formula (59) da Lui scritta a pag. 184 del Suo libro « debba » aver senso, manca l'« essenziale » condizione secondo cui le due derivate f' e g' non siano contemporaneamente nulle e, quindi, in particolare, poichè del punto c si sa solo che esiste ma non si sa dove sia, che la $g'(x)$ sia ovunque diversa da zero. Ciò fu osservato dal nostro grande Dini, circa cento anni fa!

Risposta del prof. P. MAZZONI.

Rispondo alle più curiose osservazioni del Prof. Minetti.

Quanto alla definizione di classi contigue, mi è sfuggita la frase: *in valore assoluto*. Da tutta la trattazione s'intende chiaramente che la differenza va fatta in valore assoluto.

Il prof. Minetti s'indigna perchè ho scritto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_e \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \log_e e = 1$$

prima di aver parlato della continuità di una funzione. È notissimo che non è affatto necessario aver prima parlato della continuità (*).

Come esercizio ho cercato il $\lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \sin \frac{\pi}{n}$, ho mostrato che è $2\pi R$ ed ho

concluso: la misura della circonferenza rettificata di raggio R è $2\pi R$. Secondo lui avrei dovuto prima stabilire la delicata nozione di lunghezza di un arco di curva (che molti danno al secondo anno), non so se tirando fuori metodi di calcolo integrale o qualche altra diavoleria. Per il Prof. Minetti non è sufficiente quanto è scritto nei libri di Scuole secondarie intorno alla circonferenza rettificata, per concludere che i perimetri dei poligoni regolari inscritti tendono ad essa. Secondo lui una persona fa tanto più bella figura quanto più complica le cose.

Per quanto riguarda gl'insiemi, i punti di accumulazione, i differenziali e la continuità uniforme, ricordo che i miei Maestri ne trattavano diffusamente al secondo anno.

Ora vengo a quella che il prof. Minetti chiama falsissima proposizioni che io mi sarei illuso di dimostrare, cioè alla formola di Cauchy:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Qui egli fa una vera scoperta, cioè osserva che, nel caso sia $f(x) = \text{cost.}$ e $g(x) = \text{cost.}$, non la si può più scrivere. E dire che nessuno ci aveva pensato prima di lui! Qui non si tratta più di cercare i peli nell'uovo, ma di scoprire. Io non mi sono neanche degnato di dire: « *purchè la formula abbia significato* ».

Aprò il trattato del GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique*, ed. 1927, I vol., e a pag. 36 trovo la formula:

$$[\varphi(a) - \varphi(b)]f'(c) + [f(b) - f(a)]\varphi'(c) = 0$$

poi è scritto: *ou, en divisant par $\varphi'(c)[\varphi(a) - \varphi(b)]$:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

e non c'è altro. Sono dunque nella buona compagnia del Signor Goursat, la quale ritengo sia di gran lunga preferibile a quella del Prof. Minetti.

Ma andiamo un po' a fondo in questa faccenda. Il Dini, a pag. 52-53 delle sue Lezioni di Analisi Infinitesimale (Vol. I, Pisa, 1907), pone la condizione che la derivata $g'(x)$ del denominatore sia $\neq 0$, ma poi osserva che si può supporre, invece, che sia $f'(x) \neq 0$ e sia $g(a) \neq g(b)$. Il Sansone, a pag. 380 delle sue Lezioni di Analisi, pone soltanto la condizione che sia $g(a) \neq g(b)$ e che le due derivate $f'(x)$ e $g'(x)$ non si annullino mai simultaneamente. Invece il Prof. Mi-

netti non è contento che f' e g' non siano contemporaneamente nulle, ma dice che è « essenziale » che la $g'(x)$ sia ovunque diversa da zero. Dunque, poichè la legge è uguale per tutti, i suoi fulmini colpiscono anche il Dini e il Sansone; e qui egli ha torto marcio (*).

Dunque, mancava la frase: « purchè abbia significato ».

PACIFICO MAZZONI

E. T. WHITTAKER - G. ROBINSON: *The Calculus of Observations* - Blackie and Son limited, London, ninth impression, (Fourth edition 1944; reprinted 1946, 1948), pp. XVI+397; 27 s., 6 d.

Questo volume trae origine da un corso di lezioni impartite in diversi periodi, dal 1913 al 1923, da E. T. WHITTAKER al Laboratorio di Matematica dell'Università di Edimburgo, e riguarda la risoluzione numerica di alcuni problemi che si presentano ai fisici, agli astronomi, agli ingegneri e ai cultori di scienze statistiche e attuariali.

La prima edizione risale al 1924; con lievi modifiche e aggiunte bibliografiche il volume ha poi ricevuto complessivamente otto ristampe che ne provano l'indiscusso e meritato successo.

È ben vero che recentemente macchine calcolatrici meccaniche ed elettroniche sono fortunatamente intervenute in soccorso dei calcolatori, cui risparmiano tempo e fatiche, ma è altrettanto vero che i calcolatori non possono prescindere da un'indispensabile iniziazione che si consegue soltanto attraverso lo studio delle opere che analizzando i problemi più elementari suggeriscono la tecnica per arrivare ad approssimazioni delle quali può valutarsi l'errore: l'opera di E. T. WHITTAKER corrisponde appunto allo scopo ⁽¹⁾.

I primi quattro capitoli sono dedicati alle formule di interpolazione e al calcolo delle differenze finite: notevole la derivazione numerica del cap. 4°.

Il 5°, 6°, 7° capitolo sui determinanti e le equazioni lineari, sulla risoluzione numerica delle equazioni algebriche e trascendenti, e sull'integrazione numerica sono illuminati da esempi ben scelti.

I capitoli dall'8° al 13° sull'applicazione del metodo dei minimi quadrati alla teoria degli errori e sull'analisi armonica sono inquadrati nei loro fondamenti teorici e ampiamente illustrati.

Interessanti i modelli per l'analisi armonica dove il calcolatore col semplice riporto in una colonna dei dati relativi a 24 osservazioni equidistanti è materialmente condotto alla valutazione numerica dei primi 12 termini della corrispondente serie di FOURIER.

Complessivamente i primi 13 capitoli danno una compiuta trattazione della materia: precise le notizie bibliografiche spesso aggiornate con quelle sui più recenti lavori.

Sommaria è negli ultimi due capitoletti, il 14° e il 15°, la trattazione dei problemi pertinenti le equazioni differenziali ordinarie, le equazioni integrali, il calcolo di autovalori, il metodo di RAYLEIGH-RITZ.

(*) *N.d.R.* — Per ragioni di spazio si omette la giustificazione di questo fatto riportata dall'Autore.

⁽¹⁾ Per altre opere dedicate ai calcoli numerici cfr.: U. CASSINA, *Calcoli numerici*, (Bologna, 1928); G. CASSINIS, *Calcoli numerici, grafici e meccanici* (Pisa, 1928); A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis*, (Berlin, 1928); T. SCARBOROUGH, *Numerical Mathematical Analysis*, (Baltimora, 1930).

L'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo di M. PICONE in quest'ultimo ventennio ha dato significativi contributi di carattere teorico e pratico a tale materia, ed ha lumeggiato con numerose pubblicazioni la potenza dei metodi operazionali e variazionali; all'Estero altri Istituti di Calcolo e altre Scuole attendono alle stesse questioni e la ricchezza dei risultati conseguiti fa sperare che i trattatisti indichino ora i problemi tipici e più significativi e istruiscano il lettore per la loro effettiva risoluzione.

GIOVANNI SANSONE

D. E. RUTHERFORD: *Substitutional Analysis* - (Edinburgh, 1948), pp. XI+103, 25/—.

Il Volume fornisce un'esposizione ordinata ed esauriente dei metodi e dei risultati conseguiti da A. YOUNG, dal 1900 al 1935 in alcune sue memorie dedicate all'analisi del gruppo simmetrico (gruppo totale) e a certe equazioni sostituzionali connesse con la teoria degli invarianti.

La rappresentazione sotto forma irriducibile ed esplicita del gruppo simmetrico è ottenuta prendendo a fondamento le prime nozioni della teoria dei gruppi di sostituzioni: l'A. avverte che la sua trattazione alla luce dei risultati dell'Algebra astratta potrebbe essere abbreviata, ma per ragioni didattico-storiche Egli si è attenuto allo schema originale di YOUNG, perfezionandolo in parecchi punti.

La materia è suddivisa in sei capitoli: Il calcolo delle permutazioni - Il calcolo delle tabelle - La rappresentazione semi-normale - La rappresentazione ortogonale e naturale - I gruppi di caratteri - Le equazioni sostituzionali; ciascun capitolo è preceduto da un chiaro riassunto orientativo sia sulla natura dell'argomento trattato, sia sui risultati ai quali si vuol pervenire.

GIOVANNI SANSONE

C. A. GROVER - *Hyperbolic Functions - Their derivation and applications in vector algebra* - Classifax Publications, Manchester, 1948, pp. 40 — 4 shillings.

Questo utile libricino, scritto per gli elettrotecnici, raccoglie tutte le nozioni generali relative alle funzioni iperboliche e le loro inverse e fornisce tutti gli avvertimenti e accorgimenti necessari per lo spedito ed esatto calcolo numerico delle funzioni stesse.

Da notare la definizione e l'uso del gudermaniano di una variabile u definito dalla relazione

$$\theta = \operatorname{gd} u = \arccos \operatorname{sech} u$$

per il quale valgono le relazioni di GUDERMANN

$$\operatorname{gd} u = \arccos \operatorname{sech} u = \arctan \operatorname{senh} u = \operatorname{arcsec} \tanh u.$$

Il libretto si chiude con una tabella riassuntiva di tutte le formule date nel testo.

GIOVANNI SANSONE

GRÖBNER WOLFGANG und HOFREITER NIKOLAUS - *Integraltafel, Erster Teil: Unbestimmte Integrale* - Springer-Verlag, Wien und Innsbruck, 1949.

Queste tavole di integrali indefiniti sono una rielaborazione ed un ampliamento di un volume pubblicato dagli AA., con mezzi di fortuna, nell'immedia-

to dopo guerra (Braunschweig, 1944). Notevole cura hanno posto gli AA. nella loro compilazione, come risulta evidente, in primo luogo, dalla disposizione delle formule stesse, suddivise in modo da rendere agevole e pratica la ricerca degli integrali indefiniti dei quali si sono preoccupati di dare i più significativi e quelli che più comunemente vengono usati nella pratica, compatibilmente ad una ragionevole maneggevolezza dell'opera. Come risulta immediatamente dall'indice stesso, gli integrali indefiniti sono suddivisi in tre parti: integrali di funzioni razionali, integrali di funzioni irrazionali algebriche, integrali di funzioni trascendenti. Nella prima parte sono riportati i più comuni integrali di funzioni razionali. Nella seconda, dopo gli integrali delle funzioni razionali di x e di $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, dei quali vengono dati numerosi casi particolari, vengono riportate notevoli formule di trasformazione, sugli integrali ellittici nella forma canonica di LEGENDRE e sugli iperellittici, con notevoli casi particolari. La terza parte, dedicata agli integrali delle funzioni trascendenti, tratta in modo ampio degli integrali di funzioni esponenziali, logaritmiche, seni e coseni circolari ed iperbolici, con relative funzioni inverse, concludendo con formule sugli integrali delle funzioni ellittiche di WEIERSTRASS e di JACOBI.

Il volume è litografato, ma le formule sono chiare e nitide: efficace la scelta dei simboli.

LUIGI MERLI

H. S. M. COXETER: *Regular polytopes* - Methuen and Co., London, 1948, pp. XIX+321, numerose figure ed otto tavole fuori testo, 50 s. net.

Figure geometriche « regolari » a due e tre dimensioni si incontrano in natura sotto forma di cristalli e scheletri di piccoli animali. Se ne ebbe perciò conoscenza fin dai tempi più remoti. Lo studio geometrico di tali figure incominciò probabilmente non appena nacque la geometria come scienza vera e propria. I cinque poliedri convessi regolari furono costruiti da Platone (400 A.C.) e forse più anticamente dagli Etruschi ed è stato detto (Sir W. Thompson) che gli « Elementi » di Euclide furono scritti al solo scopo di illustrare le proprietà dei poliedri di Platone.

Certo è che tali figure si impongono all'attenzione per le loro proprietà di simmetria e le notevoli qualità estetiche. Una numerosa schiera di matematici se ne è interessata e quando furono introdotti nella matematica gli iperspazi, furono pure studiate le figure regolari appartenenti ad essi, chiamate « politopi regolari ». Con la fondamentale opera di F. KLEIN, « *Vorlesungen über das Ikosaeder* », la teoria dei poliedri venne collegata a quella dei gruppi finiti, e ciò ne accrebbe l'interesse. La odierna teoria dei poliedri e politopi regolari si ricollega a svariati campi della matematica moderna: dalla geometria elementare, alla geometria non-euclidea, alla teoria dei gruppi ed alla topologia.

Il libro del COXETER costituisce una novità nella letteratura sull'argomento in questione. È stato concepito e scritto in modo da poter essere letto anche da persone del tutto ignare dell'argomento; cionondimeno è completo, trattando anche delle parti più elevate della teoria nonché di vari argomenti collaterali quali la teoria dei gruppi generati da simmetrie, ed alcune questioni di natura topologica. Alcuni dei risultati esposti sono recentissimi od originali.

Il libro si differenzia dalle precedenti opere sullo stesso argomento per essere

queste in genere più ristrette e specializzate e sovente anche difficili da leggersi (come ad esempio l'eccellente « Die Polytope » dello SCHOUTE). La bibliografia che trovasi in fondo al volume non pare del tutto completa, non essendo citati, ad esempio, nè il notevole e completissimo articolo del BRUSOTTI nella *Enciclopedia delle matematiche elementari*, nè i lavori di L. BIANCHI e di G. SANSONE sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico. A questo proposito giova però rilevare che quest'ultimo argomento è stato omissso dall'Autore; esso tuttavia avrebbe potuto trovare posto nel volume senza difficoltà; accrescendone il pregio. Questa è l'unica, assai lieve, manchevolezza del libro, che peraltro è veramente eccellente da tutti i punti di vista: completezza, esposizione brillante ed assai attraente e notevole presentazione tipografica, corredata da numerose eleganti figure e tavole fuori testo.

Diamo un rapido cenno del contenuto. L'opera si divide in 14 Capitoli, ciascuno dei quali si chiude con un paragrafo dedicato a notizie storiche. I primi due capitoli trattano elementarmente dei poligoni e poliedri regolari e quasi-regolari dello spazio ordinario, della formula di Eulero, e vi sono pure cenni sulla teoria dei « reticolati piani ». Nel Cap. III si danno i primi elementi della teoria dei gruppi astratti e si studiano i gruppi di congruenze. Il Cap. IV è dedicato alle divisioni regolari e quasi-regolari del piano, dello spazio euclideo e della superficie sferica. Il Cap. V, intitolato « Il caleidoscopio », studia i gruppi di congruenze generati da simmetrie. Il Cap. VI chiude la parte del libro relativa allo spazio ordinario, trattando dei poliedri stellati ed accennando alla teoria delle superficie riemanniane. Col Cap. VII si passa agli iperspazi; in questo e nel successivo si trattano proprietà generali dei politopi regolari e delle divisioni regolari dello spazio euclideo e sferico, con particolare riguardo allo spazio a quattro dimensioni. Il Cap. IX, di carattere prevalentemente topologico, contiene l'estensione della formula di Eulero. Il Cap. X ha carattere algebrico e studia alcune proprietà delle forme quadratiche, in vista delle applicazioni alla teoria dei gruppi generati da simmetrie, argomento dei successivi due capitoli. Il Cap. XIII è dedicato alle varie rappresentazioni dei politopi mediante figure a due o tre dimensioni. L'ultimo capitolo tratta dei politopi stellati. Tutti i risultati trovansi riassunti in tavole schematiche poste alla fine del volume. L'Autore introduce sovente metodi originali di trattazione e dà più di una dimostrazione dei risultati più importanti.

LUIGI MURACCHINI