ODONE BELLUZZI

Lo studio delle strutture costituite da lastre curve

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.2, p. 97–105.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_97_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Lo studio delle strutture costituite da lastre curve.

Nota di ODONE BELLUZZI (a Bologna).

Sunto. - *Si espongono alcuni concetti che costituiscono il punto di partenza di una serie di metodi per calcolare le strutture formate da lastre curve, e in particolare i serbatoi, negli stessi modi semplici, rapidi e intuitivi che si usano per le strutture formate da travi.*

1. In una nota precedente [1] ricavai le espressioni dei *coefficienti elastici* che consentono di calcolare le deformazioni del contorno di una lastra a forma di calotta sferica (cupola) caricata soltanto lungo il contorno. Tali coefficienti rappresentano lo spostamento radiale ξ nel piano del contorno (cioè secondo il raggio r di questo) e la rotazione φ nei piani radiali, provocati da un insieme di forze radiali (cioè dirette secondo r) o di coppie radiali distribuite uniformemente lungo il contorno e di intensità $H = 1$ o $M = 1$ per unità di lunghezza del contorno stesso. Le loro espressioni, molto semplici, e tuttavia dotate di ottima approssimazione, sono

$$(1), (2), (3) \qquad \xi_h = \frac{2\alpha}{\beta}\,\text{sen}^2\,\theta_c, \quad \varphi_h = \xi_m = \frac{2\alpha^2}{\beta}\,\text{sen}\,\theta_c, \quad \varphi_m = \frac{4\alpha^3}{\beta},$$

dove

$$(4), (5) \qquad \alpha = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rs}} = \backsim \frac{1,3}{\sqrt{Rs}}, \qquad \beta = \frac{Es}{R^2},$$

essendo θ_c l'angolo che la tangente al meridiano in corrispondenza del contorno fa col piano di questo, R il raggio della sfera, s lo

[1] O. BELLUZZI, *Il calcolo semplificato delle lastre a doppia curvatura*, « Accademia delle Scienze », Bologna, 1945; « Il cemento armato », 1945, n. 4-10; « Atti del 13° Congresso di Meccanica applicata », Schenectady, N. Y., giugno, 1947.

spessore costante della lastra, E il modulo di elasticità e $\nu = 1/m$ il coefficiente di POISSON.

Quindi mostrai che gli stessi coefficienti si possono usare con buona approssimazione anche per le lastre curve di rivoluzione di altre forme (paraboliche, coniche, ecc.), sostituendo il raggio R suddetto col raggio di curvatura R_1 del meridiano in corrispondenza del contorno, ossia col raggio R della *lastra sferica equivalente* (tangente alla lastra data lungo il contorno stesso).

Con l'impiego di tali coefficienti, associato a quello delle sollecitazioni e delle deformazioni provocate dalle forze esterne agenti sulla superficie della lastra (che si possono sostituire con quelle più semplici che si hanno considerando la lastra come una membrana), si studia in modo molto semplice e rapido qualunque struttura costituita da una lastra di rivoluzione soggetta a forze simmetriche qualsiansi e comunque vincolata lungo il contorno, oppure costituita da più lastre solidali tra loro, con o senza anelli di cintura lungo il contorno comune.

Nella presente nota espongo le ulteriori semplificazioni che si conseguono nello studio di tali strutture estendendo alle lastre curve il concetto di rigidezza, considerando la rigidezza di più lastre collegate in parallelo, utilizzando il principio di equivalenza, e procedendo come nel calcolo dei sistemi di travi.

Per brevità, mi limito a riportare qui soltanto le espressioni finali dei vari elementi necessari per tale studio. e a indicare sommariamente in quali modi si possono studiare col loro mezzo i principali problemi, riservandomi di dimostrare tali espressioni e di applicarle in modo sistematico in alcune note che seguiranno la presente (2), e in modo più esteso nei prossimi capitoli XXVII e XXVIII del mio trattato di Scienza delle costruzioni.

2. Quando si studia una lastra curva di rivoluzione occorre anzi tutto determinare *gli sforzi* S_1 ed S_2 secondo i meridiani e secondo i paralleli, relativi a strisce di larghezza unitaria, provocati soltanto dalle forze esterne agenti sulla superficie della lastra, cioè senza tener conto delle reazioni al contorno (ciò che equivale a supporre che la lastra sia indefinita). Tali quantità si possono ottenere considerando le lastre come membrane, e usando le espressioni valide per queste ultime, che sono molto più semplici di quelle delle lastre, sopra tutto dal punto di vista concettuale; e l'approssimazione che in tal modo si consegue è ottima.

(2) Che saranno pubblicate prossimamente nel « Giornale del Genio Civile ».

In questo regime si hanno soltanto gli sforzi S_1 ed S_2, poichè si trascurano i momenti flettenti, che in realtà esistono ma sono molto piccoli (³). Com'è noto, tali sforzi sono definiti dalle relazioni

$$(6),\ (7) \qquad S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \operatorname{sen}\theta} = -\frac{Q}{2\pi R_2 \operatorname{sen}^2\theta}, \quad \frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = Z,$$

essendo Q la risultante, verticale, delle forze esterne agenti al disopra del parallelo per il punto che si considera, θ l'angolo d'inclinazione della tangente al meridiano, R_1 ed R_2 i raggi di curvatura del meridiano e della sezione fatta con un piano normale al meridiano, e Z la componente normale alla membrana delle forze esterne per unità di area (positiva se verso l'esterno).

3. Anche per *lo studio delle deformazioni* si possono considerare le lastre come membrane, con le stesse ottime approssimazioni.

Le deformazioni ξ e φ si ottengono estendendo l'usuale analisi cinematica della deformazione (che i trattatisti limitano, per le membrane, alla determinazione delle componenti u e w dello spostamento secondo la tangente al meridiano e la normale alla lastra).

Lo spostamento ξ è espresso da

$$(8) \qquad \xi = \frac{r}{Es}(S_2 - \nu S_1).$$

La rotazione φ si può esprimere in due modi diversi:

$$(9),\ (9_1) \qquad \varphi = \frac{1}{R_1}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\xi}{\operatorname{sen}\theta}\right) - \frac{f(\theta)}{\operatorname{tg}\theta}\right], \quad \varphi = \frac{1}{R_1 \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{d\xi}{d\theta} - R_1\varepsilon_1 \cos\theta\right),$$

dove $f(\theta) = (1/Es)[S_1(R_1 + \nu R_2) - S_2(R_2 + \nu R_1)]$.

Lo spostamento verticale η ha l'espressione

$$(10) \qquad \eta = \int \frac{f(\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta + C - \frac{\xi}{\operatorname{tg}\theta},$$

dove la costante C tiene conto di un eventuale spostamento verticale rigido.

Ad es., nel caso delle membrane sferiche soggette al peso proprio risulta (γ peso specifico)

$$\xi = \frac{\gamma R^2}{E} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}(1 - \cos\theta - \cos^2\theta + \nu)$$

(³) O. Zanaboni, *Sulla trascurabilità dei momenti interni e delle altre azioni iperstatiche, nelle lastre curve sottili*, « Accademia delle Scienze », Torino, 1938-39.

$$\varphi = (2 + \nu)\frac{\gamma R}{E}\operatorname{sen}\theta$$

$$\eta = \frac{(1+\nu)\gamma R^2}{E}\left[\log(1+\cos\theta) - \frac{1}{1+\cos\theta}\right] +$$
$$+ C - \frac{\gamma R^2}{E}\cdot\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}(1-\cos\theta-\cos^2\theta+\nu).$$

Come gli sforzi S_1 ed S_2 (n. 2), anche queste deformazioni sono relative alla membrana indefinita, cioè non vincolata al contorno, e quindi non tengono conto delle reazioni al contorno stesso.

4. *Le reazioni* H_c ed M_c al contorno di una cupola comunque vincolata si determinano come si fa per le travi, cioè tenendo conto delle condizioni che il vincolo impone alla deformazione o alle reazioni, e usando i coefficienti elastici (1), (2), (3), insieme con le espressioni delle deformazioni delle membrane (n. 3).

Se, ad es., la cupola è perfettamente incastrata, le condizioni al contorno sono $\xi = 0$ e $\varphi = 0$. Indicando con ξ_p e φ_p le deformazioni relative ai soli carichi, date dalle (8), (9), le equazioni che determinano le reazioni incognite H_c (positiva se in fuori) ed M_c sono

$$\xi_p + \xi_h H_c + \xi_m M_c = 0, \qquad \varphi_p + \varphi_h H_c + \varphi_m M_c = 0,$$

e la soluzione è

$$(11) \qquad H_c = \frac{\xi_m\varphi_p - \varphi_m\xi_p}{\xi_h\varphi_m - \varphi_h^2}, \qquad M_c = \frac{\varphi_h\xi_p - \xi_h\varphi_p}{\xi_h\varphi_m - \varphi_h^2}.$$

Ad es., nel caso di una cupola semisferica soggetta al solo peso proprio si ottiene (γ peso specifico)

$$\begin{cases} H = 2\alpha^2\dfrac{\gamma R s^3}{12(1-\nu^2)}[2\alpha(1+\nu)R - (2+\nu)] \\ M_c = 2\alpha\dfrac{\gamma R s^3}{12(1-\nu^2)}[\alpha(1+\nu)R - (2+\nu)]. \end{cases}$$

Per altre condizioni di vincolo si procede in modo analogo.

Nel caso di una variazione termica si procede come nel caso dei carichi.

Noti H_c ed M_c, è facile calcolare le sollecitazioni in altri punti, le quali, com'è noto, si smorzano molto rapidamente al crescere della distanza dal contorno.

5. *La freccia elastica* di una cupola comunque vincolata si ottiene nel modo più semplice aggiungendo all'abbassamento η_p del

vertice dovuto ai soli carichi, dato dalla (10), gli abbassamenti provocati dalle reazioni H_c ed M_c al contorno.

Questi ultimi si calcolano facendo uso degli abbassamenti η_h ed η_m del vertice provocati da $H_c = 1$ o da $M_c = 1$, che si ottengono calcolando invece lo spostamento ξ o la rotazione φ del contorno provocati da $P = 1 \cdot 2\pi r$ agente nel vertice (per il teorema di Betti). Ad es., nel caso delle cupole sferiche le loro espressioni risultano

$$\eta_h = \frac{(1+\nu)R}{Es} + \frac{2\alpha}{\beta} \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c \tag{12}$$

$$\eta_m = \frac{2\alpha^2}{\beta} \cos \theta_c . \tag{13}$$

Quindi, noti H_c ed M_c, la freccia è data da [4]

$$f = \eta_p + \eta_h H_c + \eta_m M_c . \tag{14}$$

6. Si ottengono facilmente anche *i coefficienti elastici* ξ_h, $\varphi_h = \xi_m$, φ_m *del bordo comune a due lastre* solidali tra loro. Indicando con gli indici 1 e 2 i coefficienti relativi alle lastre singole, espressi dalle (1), (2), (3), i coefficienti del complesso risultano

$$\begin{aligned} \xi_h &= (\xi_{h1}\xi_{h2}\varphi_{m1} + \xi_{h1}\xi_{h2}\varphi_{m2} - \xi_{h1}\varphi_{h2}^2 - \xi_{h2}\varphi_{h1}^2) : \Delta \\ \varphi_h &= (\varphi_{h1}\xi_{h2}\varphi_{m2} + \varphi_{h2}\xi_{h1}\varphi_{m1} - \varphi_{h1}^2\xi_{m2} - \varphi_{h2}^2\xi_{m1}) : \Delta = \xi_m \\ \varphi_m &= (\varphi_{m1}\varphi_{m2}\xi_{h1} + \varphi_{m1}\varphi_{m2}\xi_{h2} - \varphi_{m1}\xi^2_{m2} - \varphi_{m2}\xi^2_{m1}) : \Delta, \end{aligned} \tag{15}$$

dove

$$\Delta = (\xi_{h1} + \xi_{h2})(\varphi_{m1} + \varphi_{m2}) - (\varphi_{h1} + \varphi_{h2})^2 .$$

Se le due lastre sono al disopra del bordo comune (cupole), tutti i coefficienti parziali sono positivi. Se invece una delle due lastre (o entrambe) è al disotto del bordo comune (cupola rovescia), per essa è negativo il coefficiente parziale misto, ossia $\varphi_{h2} = \xi_{m2}$.

Nel caso in cui i coefficienti parziali siano uguali per le due lastre ($\xi_{h2} = \xi_{h1}$, $\varphi_{h2} = \varphi_{h1}$, φ_{m2} φ_{m1}), le (15) danno

$$\xi_h = \frac{\xi_{h1}}{2}, \quad \varphi_h = \frac{\varphi_{h1}}{2}, \quad \varphi_m = \frac{\varphi_{m1}}{2} . \tag{15$_1$}$$

Nel caso in cui la seconda cupola sia al disotto del bordo comune e i coefficienti parziali siano uguali per le due lastre

[4] Un esempio è svolto nella mia nota: *Il calcolo semplificato della freccia elastica nelle cupole comunque vincolate*, « Ingegneri e costruttori », Bologna, 1948, n. 4. L'approssimazione è di 0,3 % rispetto al risultato esatto che ottenni nella mia nota: *Il calcolo della freccia di deformazione delle cupole sferiche*, « Ricerche di Ingegneria », 1933, n. 5.

$(\xi_{h2} = \xi_{h1},\ \varphi_{h2} = -\varphi_{h1},\ \varphi_{m2} = \varphi_{m1})$, le (15) danno

$$(15_2) \qquad \xi_h = \frac{\xi_{h1}}{4}, \qquad \varphi_h = \xi_m = 0, \qquad \varphi_m = \frac{\varphi_{m1}}{4}.$$

7. *I coefficienti elastici di un parallelo generico* non molto vicino al bordo della lastra sono dati dalle (15_2), perchè le due parti della lastra separate dal parallelo hanno uguali i coefficienti (1), (2), (3).

Mediante i coefficienti del parallelo si calcolano immediatamente le deformazioni ξ e φ in corrispondenza del parallelo stesso provocate da forze H o da coppie M distribuite nei punti di esso. Quindi riesce facile studiare le strutture costituite dalla lastra data e da una seconda lastra piana o curva vincolata a tale parallelo della prima.

Osserviamo che la seconda delle (15_2) ci dice che le forze H non provocano alcuna rotazione φ del parallelo, e che le coppie M non provocano alcuno spostamento ξ (nell'ambito delle approssimazioni relative ai metodi in questione).

8. *La rigidezza* del bordo di una lastra si definisce come per le travi, quando il bordo stesso sia impedito di allargarsi o di restringersi ($\xi = 0$), e rappresenta il momento necessario per provocare la rotazione $\varphi = 1$. Per determinarla basta applicare una coppia M al contorno e cercare anzi tutto la forza H occorrente perchè si abbia $\xi = 0$, che risulta espressa da $H = \alpha M / \operatorname{sen} \theta_c$. Quindi si calcola la rotazione φ sommando quelle dovute a M e ad H, e si ottiene $\varphi = (2\alpha^3/\beta)M$. Ponendo poi $\varphi = 1$, si ricava il momento M, che è appunto la rigidezza cercata, e che ha l'espressione molto semplice

$$(16) \qquad W = \frac{\beta}{2\alpha^3}. \quad (\text{è indipendente da } \theta_c)$$

9. La rigidezza del bordo comune a due o più lastre solidali tra loro, quando al bordo stesso si abbia $\xi = 0$, è data semplicemente dalla somma delle singole rigidezze, ossia

$$(17) \qquad W = \Sigma\, W_i.$$

In particolare, la rigidezza di un parallelo generico di una lastra (non troppo vicino al contorno) è doppia di quella (16) di ciascuna delle due parti di lastra separate dal parallelo, ossia è $W = \beta/\alpha^3$, perchè le due parti hanno uguali rigidezze.

10. Anche per le *travi ad anello*, che spesso si dispongono lungo il bordo di una lastra piana o curva, o lungo il bordo comune a più lastre, si conoscono i coefficienti elastici e se ne può dedurre l'espressione della rigidezza.

I coefficienti sono dati da [5]

$$\xi_h = \frac{r^2}{EA}, \qquad \varphi_h = \xi_m = 0, \qquad \varphi_m = \frac{r^2}{EJ}, \tag{18}$$

dove A e J sono l'area della sezione della trave e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico passante per il centro dell'anello (cioè coincidente col raggio r).

Poichè le coppie M non provocano alcuno spostamento ξ, la rigidezza è data senz'altro da $W = 1/\varphi_m$, ossia è

$$W = \frac{EJ}{r^2}. \tag{19}$$

11. Nel caso di una *cupola con anello di cintura* le reazioni H_c de M_c che l'anello oppone alla cupola si determinano uguagliando lo spostamento ξ e la rotazione φ del contorno della cupola alle analoghe deformazioni che subisce l'anello. Indicando con ξ_{ha} e φ_{ma} i coefficienti elastici dell'anello, le equazioni risultano

$$\xi_p + \xi_h H_c + \xi_m M_c = \xi_{ha} H_c, \qquad \varphi_p + \varphi_h H_c + \varphi_m M_c = \varphi_{ma} M_c.$$

Qualora si ritenga di poter trascurare l'allargamento ξ dell'anello, il problema si risolve più rapidamente usando il principio di equivalenza [6]. Se $\overline{M}$ è il momento d'incastro perfetto della lastra, che si conosce per le più frequenti condizioni di carico, basta ripartire $\overline{M}$ proporzionalmente alle rigidezze $W_c = \beta / 2\alpha^3$ della cupola e $W_a = EJ/r^2$ dell'anello. Il momento d'incastro è quello trovato per l'anello, oppure è la somma algebrica di quello trovato per la cupola e di $\overline{M}$. Noto M_c, si ha anche (n. 8) $H_c = \alpha M_c / \operatorname{sen} \theta_c$.

12. Nelle *strutture costituite da due o più lastre curve* solidali tra loro lungo il bordo comune è facile determinare le reazioni H_c ed M_c al contorno di ciascuna lastra. Le equazioni determinatrici si ottengono uguagliando gli spostamenti ξ e le rotazioni φ del bordo delle varie lastre, che si esprimono facendo uso dei coefficienti elastici (1), (2), (3) per le parti provocate da H_c e da M_c, e aggiungendo le parti ξ_p e φ_p provocate dai carichi.

[5] O. Belluzzi, *Il calcolo del complesso elastico cupola — anello d'imposta — parete cilindrica, nota prima*, « Annali dei Lavori Pubblici », 1931, fasc. 1°.

[6] O. Belluzzi, *Scienza delle costruzioni*, volume secondo, n. 461, Bologna, Zanichelli.

Lo studio è molto più semplice nel caso in cui si possa ritenere nullo lo spostamento ξ del bordo comune. Usando il principio di equivalenza, si fa la somma algebrica dei momenti $\overline{M}$ d'incastro perfetto di tutte le lastre, si ripartisce $-\Sigma\overline{M}$ proporzionalmente alle rispettive rigidezze, poi si sommano algebricamente le parti trovate ai momenti $\overline{M}$. Questo procedimento è analogo a quello che si usa nel caso delle travi in parallelo; anzi è più semplice, poichè non si hanno le trasmissioni (in virtù dello smorzamento rapido a breve distanza dal bordo) (7).

13. *Il calcolo dei serbatoi*, costituiti da più lastre curve (parete e fondi) solidali tra loro lungo il bordo comune, che spesso è rinforzato da una trave ad anello di cintura, riesce molto semplice se si usano le rigidezze; ciò che è consentito dalla presenza dell'anello, che rende trascurabile lo spostamento ξ del bordo.

Il caso più complesso si ha nei serbatoi del tipo Intze, costituiti da una parete cilindrica, da un controfondo conico e da un fondo sferico, la prima solidale col secondo, e questo col terzo. Lungo i due paralleli comuni alle coppie di lastre esistono di solito anelli di cintura. Il calcolo di questa struttura, che condotto con metodi esatti mi richiese diversi mesi di lavoro (8), si eseguisce in poche ore se si fa uso dei coefficienti elastici; e in un tempo ancora più breve se si usano le rigidezze. Le espressioni dei momenti $\overline{M}$ d'incastro perfetto e delle deformazioni ξ e φ dei vari bordi, relativi al peso propio delle rispettive lastre e alla pressione idrostatica, necessarie per il calcolo suddetto, saranno ricavate nelle note successive.

14. Anche *le linee d'influenza* del momento d'incastro M_c e della spinta H_c in una cupola incastrata si possono ottenere in modo molto più semplice di quello che esposi in una nota precedente (9), usando ancora il teorema di LAND, ma calcolando gli spostamenti verticali η dei punti prossimi al contorno mediante la soluzione approssimata di GECKELER anzichè con quella di SCHWERIN, e uti-

(7) Un esempio è svolto nella mia nota: *Il calcolo semplificato delle strutture costituite da più lastre curve*, « Ingegneri e costruttori », Bologna, 1948, n. 3.

(8) O. BELLUZZI, *Il calcolo razionale dei serbatoi del tipo Intze*, « Annali dei Lavori Pubblici », 1933, fasc. 7°, 8°, 9°.

(9) O. BELLUZZI, *Le cupole resistenti alla flessione calcolate mediante linee d'influenza*, « Annali dei Lavori Pubblici », 1930, fasc. 9°, 10°.

lizzando le espressioni del tipo (12), (13) per ottenere l'abbassamento *pressochè costante* dei punti che appartengono a una calotta abbastanza distante dal contorno.

15. Vale la pena di ricordare che i risultati che si ottengono con i metodi semplificati suddetti sono dotati di approssimazione superiore alle esigenze degli ingegneri.