Bollettino Unione Matematica Italiana

Ettore Carruccio

I fini dei “Calculus ratiocinator” di Leibniz, e la logica matematica del nostro tempo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.2, p. 148–161.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_148_0>

I fini dei "Calculus ratiocinator" di Leibniz, e la logica matematica del nostro tempo.

Nota di ETTORE CARRUCCIO (a Modena).

Sunto. - *Ci si propone d'indagare quanto del sogno di* LEIBNIZ *relativo all'impiego d'un simbolismo atto a dirimere ogni controversia umana, sia stato attuato dalla logica matematica contemporanea. Riassunti i principi del calcolo delle proposizioni di* HILBERT *si mostra come in questo campo siano stati risolti l'*entscheindungsproblem *di* HILBERT *e quindi il problema posto in sostanza da* LEIBNIZ. *Si dimostra che quest'ultimo problema può essere pienamente risolto nel campo della logica tradizionale, mentre però è impossibile risolvere in generale l'*entscheindungsproblem *ed il problema di* LEIBNIZ.

§ 1. - L'uso d'un adeguato simbolismo (*characteristica universalis*) atto ad esprimere le relazioni logiche, avrebbe dovuto, secondo il sogno di LEIBNIZ, costituire la base di un algebra logica (*calculus ratiocinator*) applicabile a tutti gli ordini di conoscenza razionale (1). Delle controversie umane la *characteristica* avrebbe dovuto divenire giudice, i nostri errori si sarebbero ridotti ad errori di calcolo, facilmente correggibili con un attento esame (2). Quando due filosofi avessero avuto da risolvere una controversia avrebbe dovuto bastare a questo fine un calcolo (3).

Ora sorge spontanea la domanda: con i progressi della logica matematica del nostro tempo. quanto del sogno di LEIBNIZ è diventato realtà? Prima di rispondere sarà opportuno dare una formulazione più chiara e precisa. secondo l'attuale linguaggio, del problema posto da LEIBNIZ.

Consideriamo un sistema di premesse A, B, $C \dots L$, sulle quali concordano i due che discutono. È facile comprendere che senza questa base comune nessun « *calculus ratiocinator* » potrebbe avere

(1) V. L. COUTURAT: *La logique de Leibniz d'après des documents inédits.* Paris 1901, cap. IV, specialmente pag. 96 e 97.

(2) In un progetto d'Enciclopedia LEIBNIZ scrive: « De judice controversiarum humanarum, seu Methodo infallibilitatis, et quomodo effici possit, ut omnes nostri errores sint tantum errores calculi, et per examina quaedam facile possint justificari », (cfr. L. COUTURAT: op. cit., pag. 98).

(3) « Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abbacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: Calculemus! ». (cfr. L. COUTURAT op. cit. pag. 98).

successo. Sia X l'affermazione da cimentare. Vi sono due possibilità: X è una conseguenza logica di $A, B, C \dots L$, X non è una conseguenza logica di $A, B, C \dots L$. Questa seconda possibilità dà luogo a sua volta a due casi: X è incompatibile con $A, B, C \dots L$ cioè da dette premesse si ricava la negazione di X, oppure X è indipendente da $A, B, C \dots L$. Si presentano dunque in tutto tre casi possibili.

Ora, date le premesse $A, B, C \dots L$ e l'affermazione da cimentare X, chiameremo *problema di Leibniz* il problema di trovare un criterio per stabilire quale dei tre casi indicati effettivamente si verifica. Il problema proposto è stato risolto per estese classi di premesse $A, B, C \dots L$ e di affermazioni X da cimentare, come vedremo nel prossimo paragrafo.

§ 2. – Alla base della logica matematica di HILBERT, troviamo il calcolo delle proposizioni ([4]).

Il concetto di proposizione (Aussage) viene dapprima introdotto da HILBERT senza un'analisi della sua struttura, ma si dice semplicemente che una proposizione è un'affermazione (Satz) per la quale ha un senso ([5]) dire che è vera o falsa: sono ad esempio proposizioni: « la matematica è una scienza », « la neve è nera... ». Indichiamo le proposizioni con le lettere $A, B, C \dots L \dots X, Y, Z$.

Le operazioni fondamentali della logica hilbertiana, che trovano applicazione nei successivi sviluppi della presente nota sono le seguenti:

$\overline{X}$ si legge « non X » indica la contradditoria di X, la proposizione cioè che è vera se X è falsa, ed è falsa se X è vera. $X \,\&\, Y$, si legge « Xe Y » indica la proposizione che è vera quando e soltanto quando X e Y sono entrambe vere, si suole chiamare somma logica.

$X \vee Y$ si scrive anche XY, si legge « X o Y » indica la proposizione che è vera quando e soltanto quando almeno una delle due proposizioni X e Y è vera, si suol chiamare, prodotto logico. Si

([4]) Nella presente rapida esposizione dei principali elementi del calcolo delle proposizioni seguiremo l'opera D. HILBERT e W. ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin 1928, cap. I.

([5]) La delicata nozione dell'« aver senso » ivi non viene analizzata da HILBERT. Sull'argomento v. per es. L. GEYMONAT: *Studi per un nuovo razionalismo*. Torino 1945, pagg. 17, 18, 81, 82; E. CARRUCCIO: *Considerazioni sulla compatibilità di un sistema di postulati e sulla dimostrabilità delle formule matematiche*. (« Pontificia Academia Scientiarum », Acta X, N. 2).

noti che questa operazione non deve confondersi con l'« o » nel senso latino di « aut ... aut », ma corrisponde piuttosto al « vel ».

$X \rightarrow Y$, si legge « X implica Y » indica la proposizione che è falsa quando e soltanto quando X è vera e Y è falsa.

$X \backsim Y$, si legge « X equivale ad Y » indica la proposizione che è vera quando e soltanto quando X ed Y sono entrambe vere o entrambe false.

Applicando le operazioni ora definite a date proposizioni fondamentali si possono formare nuove proposizioni. Per esempio a partire dalle proposizioni fondamentali XYZ si può formare la proposizione $(X \rightarrow Y) \,\&\, (Y \rightarrow Z) \,\&\, (X \vee Y)$.

X äq Y si legge « X ed Y hanno lo stesso significato ».

Esistono ora combinazioni di simboli aventi uguale significato, di particolare interesse ai nostri fini.

(1) $$\overline{\overline{X}} \text{ äq } X.$$

(La negazione della negazione di una proposizione X afferma la proposizione X stessa)

(2) $$X \,\&\, Y \text{ äq } Y \,\&\, X.$$

(La somma logica gode della proprietà commutativa)

(3) $$X \,\&\, (Y \,\&\, Z) \text{ äq } (X \,\&\, Y) \,\&\, Z.$$

(La somma logica gode della proprietà associativa)

(4) $$X \vee Y \text{ äq } Y \vee X.$$

(Il prodotto logico gode della proprietà commutativa)

(5) $$X \vee (Y \vee Z) \text{ äq } (X \vee Y) \vee Z.$$

(Il prodotto logico gode della proprietà associativa)

(6) $$X \vee (Y \,\&\, Z) \text{ äq } (X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z).$$

(Il prodotto logico gode della proprietà distributiva rispetto alla somma logica).

Esempio della (6): « l'altezza di un triangolo cade su di un punto della base, oppure detta altezza cade fuori della base ed il triangolo considerato è ottusangolo » significa « l'altezza di un triangolo cade su di un punto della base oppure detta altezza cade fuori della base, e l'altezza di un triangolo cade su di un punto della base oppure il triangolo considerato è ottusangolo ».

Le prime 5 di queste uguaglianze di significato sono evidenti, tuttavia si possono dimostrare, come pure la (6), in base al seguente principio dato come evidente da HILBERT:

due combinazioni di proposizioni fondamentali relative a XYZ, sono di ugual significato quando e soltanto quando per ogni sostituzione di proposizioni vere o false in luogo di XYZ ambedue le proposizioni, che costituiscono i due membri dell'uguaglianza di significato, sono entrambe vere o entrambe false.

Lasciando al lettore la verifica delle prime 5 uguaglianze di significato in base al principio enunciato, ci limitiamo, per brevità a considerare la dimostrazione della (6).

Indichiamo con R una proposizione vera e con F una proposizione falsa, e sostituiamo per es. ad XYZ rispettivamente RFF.

Se la (6) è vera potremo avere:

$$R \vee (F \,\&\, F) \backsim (R \vee F) \,\&\, (R \vee F).$$

Ora nel primo membro $F \& F \backsim F, R \vee F \backsim R$, quindi $R \vee (F \& F) \backsim R$: nel secondo $R \vee F \backsim R$, $R \,\&\, R \backsim R$, quindi $(R \vee F) \,\&\, (R \vee F) \backsim R$.

I due membri sono dunque entrambi veri. Analogamente si esegue la verifica per tutte le possibili attribuzioni dei valori di verità e di falsità ad XYZ.

È possibile esprimere i segni $\rightarrow$ e $\backsim$ mediante ed & in virtù delle seguenti uguaglianze di significato:

$$(7) \qquad X \rightarrow Y \ \text{äq} \ \overline{X \,\&\, \overline{Y}}$$

$$X \backsim Y \ \text{äq} \ (X \rightarrow Y) \,\&\, (Y \rightarrow X).$$

La prima delle (7) ci dice che la proposizione $X \rightarrow Y$ significa (per definizione) che non può essere contemporaneamente X vero ed Y falso. La seconda delle (7) ci dice che la proposizione $X \backsim Y$ significa che X implica Y ed Y implica X, cioè non può essere X vero ed Y falso, essendo contemporaneamente Y vero ed X falso.

Per gli ulteriori sviluppi sono anche importanti le seguenti relazioni:

$$(8) \qquad \overline{X \,\&\, Y} \ \text{äq} \ \overline{X} \vee \overline{Y}$$

(negare la validità simultanea di X e Y significa negare X o negare Y).

Analogamente si ha:

$$(9) \qquad \overline{X \vee Y} \ \text{äq} \ \overline{X} \,\&\, \overline{Y}$$

(negare la validità di almeno una delle due proposizioni X ed Y, significa negare X e negare Y).

Le uguaglianze di significato indicate permettono di porre una espressione qualsiasi formata a partire dalle proposizioni fondamentali XYZ.... mediante quante si vogliono applicazioni delle operazioni $\overline{}$ & $\vee$ $\rightarrow$ $\backsim$, sotto una determinata *forma normale*, in cui compaiono soltanto somme di prodotti logici nei quali ogni fattore è una proposizione fondamentale o la negazione di una di queste.

Questo risultato è di particolare importanza ai fini della risoluzione del problema di LEIBNIZ nel caso del calcolo delle proposizioni. A questo scopo si procede nel modo seguente.

Si eliminano innanzi tutto i segni $\rightarrow$ e $\backsim$ mediante le formule (7).

Applicando poi le formule (8) e (9) è sempre possibile ottenere che il segno di negazione più ampio si spezzi in segni meno ampi, e finalmente rimanga soltanto sopra le proposizioni fondamentali.

Si eseguono quindi i prodotti logici analogamente a quanto si fa in algebra, applicando la proprietà distributiva.

Si ricorda. ove occorre, la (1).

Per es dalla formula

$$\overline{(XY \,\&\, \overline{Y}) \vee (Z \,\&\, Y)}$$

si ottiene in primo luogo mediante la (9)

$$\overline{XY \,\&\, \overline{Y})} \quad \& \quad \overline{(Z \,\&\, Y)}$$

e applicando la (8):

$$\overline{XY} \vee \overline{\overline{\overline{Y}}} \quad \& \quad \overline{Z} \vee Y$$

e applicando ancora la (9)

$$(X \,\&\, Y) \vee \overline{\overline{\overline{Y}}} \,\&\, \overline{Z}\,\overline{Y}.$$

Eseguendo il prodotto come in algebra si ottiene:

$$\overline{X}\,\overline{\overline{\overline{Y}}} \,\&\, \overline{Y}\,\overline{Y} \,\&\, \overline{Z}\,\overline{Y}.$$

Ricordando la (1) si ha in fine:

$$\overline{X}\,Y \,\&\, \overline{Y}\,Y \,\&\, \overline{Z}\,\overline{Y}.$$

Passiamo ora all'esame di un problema dalla risoluzione del quale deriva in modo pressoché immediato la risoluzione del problema di LEIBNIZ: si tratta di trovare quelle combinazioni di proposizioni che sono sempre valide, indipendentemente dalla verità o falsità delle proposizioni fondamentali. Per es. gode manifestamente di questa proprietà la formula

$$X \backsim X.$$

Dato che ogni espressione logica si può sempre porre sotto forma normale, basterà stabilire quando è che un'espressione sotto forma normale, rappresenta sempre una combinazione vera di proposizioni.

Il problema si risolve tenendo presente le seguenti regole:

1) $X\overline{X}$ è sempre vera.

2) Se X è vera e Y indica una proposizione qualsiasi anche XY è vera.

3) Se X è vera e Y è vera, allora anche $X \& Y$ è vera.

Queste regole vanno intese nel senso che in luogo di X e Y si può sostituire qualsiasi proposizione o combinazione di proposizioni. In base a queste regole, e tenendo presenti le proprietà formali del calcolo logico già esposte, si può dimostrare il seguente *criterio di validità generale.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un' espressione posta sotto forma normale sia sempre vera, è che in ogni suo prodotto logico compaia almeno una delle proposizioni fondamentali insieme con la sua negazione.

La sufficienza della condizione si ricava immediatamente. Infatti se la condizione è soddisfatta ogni prodotto logico dell' espressione normale risulta vero, per le regole 1 e 2, e la somma logica dei prodotti considerati risulta vera per la regola 3.

Che la condizione è necessaria risulta dimostrando che se la condizione non è soddisfatta l' espressione considerata non è sempre vera. Infatti: consideriamo un prodotto logico che sia un termine (addendo logico) di un' espressione sotto forma normale. In questo prodotto compaia X ma non $\overline{X}$, oppure $\overline{X}$ ma non X, dove X è una proposizione fondamentale. Per rendere falso questo prodotto basterà sostituire una proposizione falsa ad ogni proposizione non negata, ed una proposizione vera ad ogni proposizione negata.

Essendo falso un termine della somma logica, sarà falsa tutta l' espressione, indipendentemente dal valore di verità degli altri termini. È ormai facile risolvere il problema di LEIBNIZ nel caso del calcolo delle proposizioni.

Siano $A\ B\ C \dots L$ le premesse accettate come vere e sia X la proposizione da cimentare.

Se

$$(A \& B \& C \dots \& L) \rightarrow X$$

è una proposizione sempre vera, X è una conseguenza logica di A; B, $C \dots L$. Se ciò invece non accade. mentre invece

$$(A \& B \& C \dots \& L) \rightarrow \overline{X}$$

è una proposizione sempre vera, X è incompatibile con A, B. $C \dots L$.

Se invece nessuna delle due proposizioni

$$(A \& B \& C \dots \& L) \rightarrow X$$
$$(A \& B \& C \dots \& L) \rightarrow \overline{X}$$

è sempre vera, allora X è indipendente da A, B, $C \dots L$.

Il problema di LEIBNIZ è così pienamente risolto nel campo del calcolo delle proposizioni di HILBERT.

§ 3. - Nel precedente paragrafo il problema di LEIBNIZ è stato risolto nel caso in cui le proposizioni fondamentali si presentano come oggetti del pensiero indivisibili, nei quali non compaiono esplicitamente gli elementi di cui è costituita la proposizione stessa (soggetto copula e predicato).

Nel campo del calcolo delle proposizioni, come è stato finora considerato, non trovano quindi posto nozioni fondamentali della logica formale tradizionale, quali le regole per la conversione e del sillogismo, in cui entrano essenzialmente gli elementi di cui è costituita la proposizione. HILBERT mediante nuove interpretazioni del calcolo delle proposizioni (calcolo dei predicati, calcolo delle classi, calcolo combinato) riesce a ritrovare (in modo alquanto faticoso) 15 delle 19 forme del sillogismo aristotelico, ritrova cioè quelle forme di sillogismo valide senza una supplementare ipotesi esistenziale ([6]).

Invece di seguire il cammino percorso da HILBERT, mi propongo ora di mostrare con un altro procedimento come i problemi della logica formale tradizionale sono formulabili mediante il simbolismo del calcolo delle proposizioni, e trattabili pertanto con i semplici e potenti mezzi offerti da detto calcolo.

Otterremo il nostro intento esprimendo mediante opportune proposizioni fondamentali indivisibili le proposizioni tipiche della logica formale tradizionale, le quali come è noto si riducono alle seguenti quattro forme:

tutti gli A sono B.
nessun A è B.
qualche A è B,
qualche A non è B.

Essendo x un individuo generico, avremo per ciascuna delle forme considerate. le seguenti espressioni.

Tutti gli A *sono* B può esprimersi nel modo seguente :

$$(x \text{ è } A) \rightarrow (x \text{ è } B) \quad ([7])$$

Nessun A *è* B può esprimersi nel modo seguente

$$(x \text{ è } A) \rightarrow \overline{x \text{ è } B}.$$

([6]) V. HILBERT e ACKERMANN, op. cit, cap. II. Le forme di sillogismo che non si trovano con il metodo seguito da HILBERT sono quelle in *darapti, bamalip, felapton, fesapo,* perchè queste forme per essere valide richiedono che quando si dice « tutti gli A sono B » esista qualche oggetto che sia A.

([7]) Cfr. A. N. WHITEHEAD e B. RUSSEL, *Principia Mathematica.* Vol. I, Cambridge 1910, pag. 47.

Qualche A *è* B è la negazione di « nessun A è B » la sua espressione è pertanto

$$\overline{(x \text{ è } A) \;\rightarrow\; \overline{x \text{ è } \overline{B}}}.$$

Qualche A ***non*** *è* B e la negazione di « tutti gli A sono B » la sua espressione è pertanto

$$\overline{(x \text{ è } A) \;\rightarrow\; (x \text{ è } B)}$$

Trasformando mediante questo procedimento le proposizioni tipiche della logica formale tradizionale, e applicando i metodi del calcolo delle proposizioni del paragrafo precedente, è possibile verificare semplicemente le regole aristoteliche della conversione e del sillogismo.

Diamo alcuni esempi di verifica di dette regole.

Secondo una delle regole della conversione:

se « nessun numero irrazionale è un decimale periodíco » allora « nessun decimale periodico è un numero irrazionale ».

Indichiamo « x è un numero irrazionale » con I

« x è un numero periodico » con P.

Il nostro esempio di conversione diventa:

$$(I \rightarrow \overline{P}) \;\rightarrow\; (P \rightarrow I).$$

Si tratta di verificare se questa proposizione è sempre vera.

Applichiamo il consueto procedimento di calcolo logico.

$$\begin{array}{ccc}
\overline{I \,\&\, P} & \rightarrow & \overline{P \,\&\, I} \\
\hline
\overline{I \,\&\, P} & \& & (P \,\&\, I) \\
(I \,\&\, P) & \vee & \overline{P \,\&\, I} \\
(I \,\&\, P) & \vee & \overline{P} \vee \overline{I} \\
I\,\overline{P}\,\overline{I} & \& & P\,\overline{P}\,\overline{I}.
\end{array}$$

Dall' ultimo passaggio risulta che l'espressione considerata è sempre vera.

Secondo un' altra regola per la conversione

se « ogni triangolo è un poligono »

allora « qualche poligono è un triangolo »

indichiamo « x è un triangolo » con T

« x è un poligono » con P.

Il nostro esempio di conversione diventa

$$(T \rightarrow P) \;\rightarrow\; \overline{P \rightarrow \overline{T}}.$$

Si tratta di vedere se questa proposizione è sempre vera. Applichiamo il consueto calcolo logico:

$$\overline{T \& P} \rightarrow P \& T$$

$$\overline{\overline{(T \& P)} \;\&\; \overline{(P \& T)}}$$

$$(T \& \overline{P}) \;\vee\; (P \& T)$$

$$TP \& PP \;\&\; TT \& PT$$

In base a questo risultato troviamo che la verifica non è riuscita.

Ma osserviamo che la regola di conversione applicata è valida solo se esiste qualche triangolo. Tenuto conto di questa ipotesi esistenziale « x è un triangolo » che abbiamo indicato con I, la proposizione della quale dobbiamo verificare la validità generale diventa:

$$[(T \rightarrow P) \& T] \rightarrow \overline{P \rightarrow \overline{T}}.$$

Cioè

$$\overline{(T \& \overline{P}} \& T) \rightarrow (P \& T)$$

$$\overline{\overline{(T \& \overline{P}} \& T) \;\&\; \overline{P \& T}}$$

$$\overline{\overline{T \& \overline{P}} \& T} \;\vee\; (P \& T)$$

$$(T \& \overline{P}) \vee \overline{T} \;\vee\; (P \& T)$$

$$T\,\overline{T}\,P \,\&\, \overline{P}\,\overline{T}\,P \,\&\, T\,\overline{T}\,T \,\&\, P\,T\,T.$$

Ciò che dimostra la validità generale della formula in questione.

Eseguiamo ora una verifica relativa alla regola per un sillogismo in *barbara*.

Tutti gli uomini sono mortali
Pietro è un uomo
dunque Pietro è mortale.

Questo sillogismo si traduce nel modo seguente:

$$\{[(x \text{ è un uomo}) \rightarrow (x \text{ è mortale})] \& [(x \text{ è Pietro}) \rightarrow (x \text{ è un uomo})]\} \rightarrow$$
$$\rightarrow [(x \text{ è Pietro}) \rightarrow (x \text{ è mortale})].$$

Si tratta di verificare che questa proposizione è di validità generale.

Indichiamo « x è un uomo » con U
« x è mortale » con M
« x è Pietro » con P.

La proposizione di cui si vuole verificare la validità generale diventa:

$$[(U \rightarrow M) \& (P \rightarrow U)] \rightarrow (P \rightarrow M).$$

Cioè

$$\left(\overline{U \,\&\, \overline{M}} \,\&\, \overline{P \,\&\, \overline{U}}\right) \to \overline{P \,\&\, \overline{M}}$$

$$\overline{\left(\overline{U \,\&\, \overline{M}} \,\&\, \overline{P \,\&\, \overline{U}}\right) \,\&\, P \,\&\, \overline{M}}$$

$$(U \,\&\, \overline{M}) \vee (P \,\&\, U) \vee P \vee M$$

$$U P \bar{I} M \;\&\; \overline{M} P P M \;\&\; U U P M \;\&\; \overline{M}\,\overline{U}\,\overline{P} M.$$

Risulta che la proposizione in questione è sempre vera.

Applichiamo ora il nostro procedimento ad un sillogismo in *darapti*:

Ogni pipistrello è un volatile
ogni pipistrello è un mammifero
dunque qualche mammifero è un volatile.

Questo sillogismo si traduce nel modo seguente:

$$\{[(x \text{ è un pipistrello}) \to (x \text{ è un volatile})] \,\&\, [(x \text{ è un pipistrello}) \to (x \text{ è un mammifero})]\} \to \overline{(x \text{ è un mammifero}) \to \overline{(x \text{ è un volatile})}}.$$

Indichiamo « x è un pipistrello » con P
« x è un volatile » con V
« x è un mammifero » con M.

Lo schema del nostro sillogismo diventa:

$$[(P \to V) \;\&\; (P \to M)] \to \overline{M \to \overline{V}}.$$

Cioè:

$$\overline{(P \,\&\, \overline{V}} \,\&\, \overline{P \,\&\, \overline{M})} \to (M \,\&\, V)$$

$$\overline{\overline{P \,\&\, \overline{V}} \,\&\, \overline{P \,\&\, \overline{M}} \,\&\, \overline{M \,\&\, V}}$$

$$(P \,\&\, \overline{V}) \vee (P \,\&\, \overline{M}) \vee (M \,\&\, V)$$

$$(PP \,\&\, \overline{V}P \,\&\, P\overline{M} \,\&\, \overline{V}M)(M \,\&\, V)$$

$$PPM \,\&\, \overline{V}PM \,\&\, PMM \,\&\, V\overline{M}M \,\&\, PPV \,\&\, \overline{V}PV \,\&\, P\overline{M}V \,\&\, \overline{V}\,\overline{M}V$$

Dunque la proposizione considerata non è sempre vera. Ciò dipende dal fatto che per la validità di questa forma di sillogismo si richiede il verificarsi di un' ipotesi [8]: l' esistenza di almeno un pipistrello, « x è un pipistrello » che abbiamo indicato con P.

[8] La necessità di aggiungere un' ipotesi esistenziale perchè il sillogismo in *darapti* sia valido risulta chiaramente da quest' altro esempio:
ogni sirena è provvista di coda di pesce,

Lo schema del sillogismo diventa allora:

$$[(P\to V)\ \&\ (P\to M)\ \&\ P]\to\overline{M\to\overline{V}}.$$

Cioè:

$$\left(\overline{P\ \&\ \overline{V}}\ \&\ \overline{P\ \&\ \overline{M}}\ \&\ P\right)\to(M\ \&\ V)$$

$$\overline{\overline{P\ \&\ \overline{V}}\ \&\ \overline{P\ \&\ M}\ \&\ P\ \&\ \overline{M\ \&\ V}}$$

$$(P\ \&\ \overline{V})\vee(P\ \&\ \overline{M})\vee\overline{P}\vee(M\ \&\ V)$$

$$(PP\overline{P}\ \&\ \overline{V}P\overline{P}\ \&\ P\overline{M}P\ \&\ \overline{V}\,\overline{M}\,\overline{P})(M\ \&\ V)$$

$$PP\overline{P}M\ \&\ \overline{V}P\overline{P}M\ \&\ PM\overline{P}M\ \&\ \overline{V}\,\overline{M}\,\overline{P}M\ \&\ PP\overline{P}V\ \&\ \overline{V}P\overline{P}V\ \&\ P\overline{M}PV\ \&\ \overline{V}\,\overline{M}\,\overline{P}V.$$

Quest' ultima espressione risulta sempre vera.

Applicando i procedimenti indicati, dato un certo numero qualsiasi purchè finito di proposizioni della forma « tutti gli A sono B », « nessun A è B », « qualche A è B ». « qualche A non è B, ed una proposizione X qualsiasi della stessa forma è sempre possibile stabilire se X è una conseguenza delle proposizioni date oppure è incompatibile o è indipendente da esse.

Cioè il problema di LEIBNIZ è risolto pienamente nel campo della logica tradizionale.

§ **4.** - Il risultato ottenuto nel paragrafo precedente non deve però essere sopravalutato in quanto non tutte le affermazioni (anche nel campo della matematica) si possono porre sotto le forme tipiche studiate nella logica tradizionale ed esprimibili secondo il formalismo del calcolo delle proposizioni.

HILBERT afferma che nel campo della logica tradizionale non si potrebbero dimostrare proposizioni del tipo « se B giace tra A e C, allora B giace tra C ed A », oppure del tipo « se vi è un effetto vi è anche una causa ». Dalle quali osservazioni preliminari HILBERT parte per intraprendere una sistemazione di carattere più generale delle relazioni logiche: il calcolo delle funzioni logiche (9).

Nella trattazione di HILBERT quello che noi abbiamo chiamato il problema di LEIBNIZ si presenta come applicazione del problema della decisione (Entscheindungsproblem) che comprende i problemi della validità generale e della soddisfabilità.

ogni sirena è una valente cantante,
dunque qualche valente cantante è provvista di coda di pesce.

La conclusione non è valida dato che non esistono sirene.

(9) V. HILBERT e ACKERMANN, op. cit., cap. III, cap. IV.

Il problema della validità generale consiste nello stabilire per una qualsiasi espressione logica proposta che non contiene alcun segno individuale ([10]) se l'espressione rappresenta sempre un'affermazione vera o no, per qualunque espressione sostituita alle variabili che vi compaiono. Il problema della soddisfabilità riguarda la questione se esiste in generale una sostituzione per le variabili, tale che l'espressione data possa rappresentare un'affermazione vera.

I due problemi sono intimamente legati: se un'espressione non è valida in generale allora la sua contraddittoria è soddisfabile: se un'espressione non è soddisfabile allora la sua contraddittoria è valida in generale. Pertanto risolto uno dei due problemi per espressioni logiche di un certo tipo si può risolvere l'altro per espressioni dello stesso tipo, come il lettore può constatare agevolmente.

Il problema della decisione viene considerato da HILBERT come il problema principale della logica matematica.

Una volta risolto il problema della validità generale, per affermazioni di un dato tipo, come abbiamo visto nel caso del calcolo delle proposizioni, è facile risolvere il problema di LEIBNIZ.

Mentre nel caso del calcolo delle proposizioni il problema della decisione è stato pienamente risolto, nel caso generale (calcolo di funzioni logiche) il problema considerato, come osservava HILBERT, è un problema insoluto pur essendo stati raggiunti sull'argomento interessanti risultati particolari ([11]).

Si presenta quindi alla nostra mente la questione: è possibile risolvere in generale il problema della decisione? Rispondo mediante il seguente

TEOREMA. – *Il problema della decisione di Hilbert non è risolubile in generale.*

Questo risultato si ricava come conseguenza del teorema del GÖDEL che afferma l'impossibilità di dimostrare la non contraddittorietà di un sistema ipotetico deduttivo S non contraddittorio con mezzi offerti dal sistema stesso; dal quale teorema si deduce

([10]) Questa restrizione relativa all'esclusione di segni individuali non limita la portata della questione ai fini della risoluzione del problema di LEIBNIZ, dove non deve avere influenza l'eventuale significato individuale dei termini, ma soltanto il loro legame logico.

([11]) V. HILBERT e ACHERMANN, op. cit., cap. III, § 11 e § 12 (pp. 72-81); K. GÖDEL, *Zum Entscheindungsproblem des logischen Funkionenkalkuls*, « Monatshefte für Mathematik und Physik », 40 band. Leipzig 1933, pp. 433-443.

più in generale che la dimostrazione della non contradditorietà di S in senso assoluto è impossibile ([12]).

Infatti: dimostriamo che l'ipotesi della risolubilità in ogni caso del problema della decisione di HILBERT conduce all'assurdo.

Siano A, B, C ... L le premesse di un sistema ipotetico deduttivo S non contradditorio. Consideriamo la proposizione:

$$(1) \qquad (A \;\&\; B \;\&\; C \;\& \dots \&L) \rightarrow \overline{S \text{ è contradditorio}}$$

È possibile dimostrare la validità generale di questa proposizione? Evidentemente no, perchè se fosse possibile si sarebbe con ciò dimostrato la non contradditorietà di S contro il Teorema del GÖDEL. Allora sempre nell'ipotesi che il problema della decisione sia risolubile in generale dovremo trovare che la (1) non è una proposizione di validità generale.

Consideriamo ora la proposizione:

$$(2) \qquad (A \;\&\; B \;\&\; C \;\& \dots \&L) \rightarrow S \text{ è contradditorio.}$$

Per l'ipotesi relativa ad S non si potrà dimostrare la validità generale della (2) perchè in tal caso si dimostrerebbe che S è contradditorio contro l'ipotesi. Allora si dovrà trovare che nemmeno la (2) gode della validità generale.

Ma allora se nè la (1) nè la (2) godono della validità generale, la proposizione « S è contradditorio » è indipendente dalle premesse A, B, C ... L, ed è pertanto indimostrabile a partire da A, B, C ... L. Ma se « S è contradditorio » non è dimostrabile, ciò significa che non è vero, perchè se fosse vero sarebbe dimostrabile, in quanto se un sistema S è contradditorio ciò deve risultare dopo un numero finito di deduzioni. Si sarebbe così dimostrato che S non è contradditorio, mentre tale dimostrazione è impossibile per il teorema di GÖDEL.

Si conclude che il problema della decisione non è risolubile in generale.

È ormai facile dimostrare con procedimento analogo che anche *il problema di Leibniz non è risolubile in generale.*

Ragioniamo per assurdo.

Siano A, B, C ... L le premesse di un sistema ipotetico deduttivo S non contradditorio.

([12]) V. K. GÖDEL, *Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, (« Monatshefte für Mathematik und Physik ». Leipzig 1931, pp. 173-198): E. CARRUCCIO, nota citata.

Supponiamo che sia possibile risolvere in ogni caso il problema di LEIBNIZ. Si potrà allora stabilire quale dei tre casi si verifica nei riguardi della proposizione

« S è contradditorio »:

1°) è una conseguenza di $A, B, C \ldots L$;
2°) è incompatibile con $A, B, C \ldots L$;
3°) è indipendente da $A, B, C \ldots L$;

Ma il primo caso non si può verificare perchè abbiamo supposto S non contradditorio, il 2° non si può dimostrare per il teorema di GÖDEL. Vediamo allora cosa accade se si ottiene il terzo caso. Ciò significa che si è riusciti a dimostrare che tra le conseguenze di $A, B, C \ldots L$, nessuna compare delle due proposizioni:

« S è contradditorio », « $\overline{S \text{ è contradditorio}}$ ».

Ma siccome se S è contradditorio ciò deve essere dimostrabile con un numero finito di passaggi, dimostrare che non si può dimostrare che S è contradditorio, equivale a dimostrare che S non è contradditorio, ciò che però non si può dimostrare per il teorema del GÖDEL.

Ammettere la possibilità di risolvere in ogni caso il problema di LEIBNIZ conduce quindi all'assurdo. c. v. d.

Si conclude pertanto che il sogno di LEIBNIZ in parte è stato attuato e potrà esserlo in seguito in modo più perfetto, mai però potrà completamente tradursi in realtà.