

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

UGO CASSINA

## Sul numero delle operazioni elementari necessarie per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3*  
(1948), n.2, p. 142–147.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1948\\_3\\_3\\_2\\_142\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_142_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## SEZIONE · STORICO-DIDATTICA

### Sul numero delle operazioni elementari necessarie per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

Nota di UGO CASSINA (a Napoli).

**Sunto.** - *Calcolo delle operazioni elementari necessarie per la risoluzione di un sistema di equazioni lineari quando si fa uso di uno dei seguenti procedimenti: 1) metodo delle eliminazioni successive, 2) metodo di BANACHIEWICZ, 3) metodo del confronto, 4) metodo dei determinanti siano questi calcolati mediante la definizione o mediante la regola di CHIÒ*

Recentemente T. BANACHIEWICZ <sup>(1)</sup>, come applicazione dei suoi « cracoviani », ha proposto un nuovo metodo per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Tale metodo è particolarmente opportuno nelle applicazioni pratiche <sup>(2)</sup>.

Secondo il computo di T. BANACHIEWICZ, riportato anche da G. CASSINIS <sup>(3)</sup>, per la risoluzione di un sistema di  $n$  equazioni lineari in  $n$  incognite col metodo delle eliminazioni successive occorre calcolare  $n(n+1)(2n+1)/6$  quantità; invece col metodo di BANACHIEWICZ occorre calcolare  $n^2$  quantità.

Il metodo di BANACHIEWICZ appare perciò straordinariamente meno faticoso di quello delle eliminazioni successive. (Per es., per  $n=5$ , si hanno da calcolare rispettivamente 25 e 55 numeri, e, per  $n=10$ , 100 e 385 numeri).

<sup>(1)</sup> T. BANACHIEWICZ, *Méthode de résolution numérique des équations linéaires*, etc., « Bull. Ac. Polon. », A. 1938, p. 393. Ripubblicato in *Études d'analyse pratique*, Reprint 22, « Cracow Observatory », Cracovie 1938.

<sup>(2)</sup> Cfr. O. BELLUZZI, *Scienza delle costruzioni*. Bologna 1945, § 439.

<sup>(3)</sup> G. CASSINIS, *Risoluzione dei sistemi di equazioni algebriche lineari*, « Rend. Sem. mat. fis. Milano », 17, (1946), p. 62.

Tuttavia, ho osservato che, se si fa il computo delle operazioni « elementari » (addizione o sottrazione di due numeri, moltiplicazione di due numeri, divisione di due numeri) necessarie per il calcolo di dette quantità e per la risoluzione completa del sistema, si trova nei due metodi *esattamente* lo stesso numero di operazioni, cioè:  $n(n+1)/2$  divisioni,  $(n-1)n(2n+5)/6$  moltiplicazioni ed altrettante:  $(n-1)n(2n+5)/6$  addizioni (o sottrazioni).

Cosicchè il vantaggio, che indubbiamente presenta in pratica il metodo di BANACHIEWICZ, consiste nell'eliminazione della necessità di conservare i numeri derivati dalle singole operazioni elementari e non nell'eliminazione effettiva di queste operazioni.

Nei primi due paragrafi dimostro per disteso quanto sopra; nei due paragrafi successivi riporto il numero delle operazioni elementari necessarie per la risoluzione di un sistema di equazioni lineari col metodo del confronto e col metodo dei determinanti siano questi calcolati mediante la definizione o mediante la regola di CHIO.

**1. Eliminazioni successive.** – Riferiamoci al sistema:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1} = 0. \end{array} \right.$$

L'eliminazione successiva delle incognite si suol fare comunemente col metodo di « sostituzione » dell'algebra elementare; quindi si ricava dalla prima equazione il valore della prima incognita  $x_1$  in funzione delle  $n - 1$  incognite residue (1<sup>a</sup> equazione risolvente) e si sostituisce nelle rimanenti  $n - 1$  equazioni ottenendo così un sistema di  $n - 1$  equazioni nelle  $n - 1$  incognite  $x_2, x_3, \dots, x_n$  (1° sistema ridotto). Sul quale si opera nello stesso modo, deducendone le successive equazioni risolventi ed i successivi sistemi ridotti fino a giungere ad una sola equazione nell'ultima incognita  $x_n$  (ultima risolvente) dalla quale si ricava  $x_n$  e di qui risalendo attraverso le  $n - 1$  risolventi si ottengono i valori di  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ .

Ogni coefficiente della 1<sup>a</sup> risolvante si trova perciò mediante una divisione, ed ogni coefficiente del 1° sistema ridotto mediante una moltiplicazione ed una addizione (algebraica). Quindi, in totale, per la 1<sup>a</sup> risolvante occorrono  $n$  divisioni e per il 1° sistema ridotto  $n(n-1)$  moltiplicazioni ed altrettante addizioni.

Analogamente per la 2<sup>a</sup> risolvante occorrono  $n - 1$  divisioni e per il 2° sistema ridotto  $(n - 1)(n - 2)$  moltiplicazioni ed altrettante addizioni. Ecc. Per l' $n - 1$ -esimo sistema ridotto (ultimo) occorrono  $2 \cdot 1$  moltiplicazioni ed altrettante addizioni. E per la  $n$ -esima ri-



Gli elementi delle matrici  $b$  e  $c$  possono perciò essere calcolati nel seguente ordine:

1<sup>a</sup> linea di  $c$ :

$$c_{11} = a_{11}, c_{12} = a_{21}, \dots, c_{1n} = a_{n1} \quad (0 \text{ operazioni}).$$

1<sup>a</sup> linea di  $b$ :

$$b_{12} = a_{12}/c_{11}, \dots, b_{1, n+1} = a_{1, n+1}/c_{11} \quad (n \text{ divisioni}).$$

2<sup>a</sup> linea di  $c$ :

$$\left\{ \begin{array}{lll} c_{22} = a_{22} & - b_{12} & c_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{2n} = a_{2n} & - b_{12} & c_{1n} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1 \text{ multipl., } 1 \text{ addiz.} \\ n - 1 \text{ volte.} \end{array}$$

3<sup>a</sup> colonna di  $b$ :

$$b_{23} = (a_{23} - b_{13} c_{12})/c_{22}, \quad 1 \text{ multipl., } 1 \text{ addiz., } 1 \text{ divis.}$$

3<sup>a</sup> linea di  $c$ :

$$\left\{ \begin{array}{lll} c_{33} = a_{33} & - b_{13} c_{12} & - b_{23} c_{22} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{3n} = a_{3n} & - b_{13} c_{1n} & - b_{23} c_{2n} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2 \text{ multipl., } 2 \text{ addiz.} \\ n - 2 \text{ volte.} \end{array}$$

4<sup>a</sup> colonna di  $b$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{24} = (a_{24} - b_{14} c_{12} - b_{24} c_{22})/c_{33} \\ b_{34} = (a_{34} - b_{14} c_{13} - b_{24} c_{23} - b_{34} c_{33})/c_{44} \end{array} \right. \quad (1 + 2) \text{ multipl., } (1 + 2) \text{ addiz., } 2 \text{ divis.}$$

Ecc.

$n$ -esima linea di  $c$ :

$$c_{nn} = a_{nn} - b_{1n} c_{1n} - b_{2n} c_{2n} - \dots - b_{n-1, n} c_{n-1, n}, \quad n - 1 \text{ multipl., } n - 1 \text{ sottraz., } 1 \text{ volta.}$$

$n + 1$ -esima colonna di  $b$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{2, n+1} = (a_{2, n+1} - b_{1, n+1} c_{12})/c_{22} \\ \dots \\ b_{n, n+1} = (a_{n, n+1} - b_{1, n+1} c_{1n} - b_{2, n+1} c_{2n} - \dots - b_{n-1, n+1} c_{n-1, n})/c_{nn}, \end{array} \right. \quad 1 + 2 + \dots + (n - 1) \text{ multipl., } 1 + 2 + \dots + (n - 1) \text{ addiz., } (n - 1) \text{ divis.}$$

Per il calcolo di  $c$  sono perciò necessarie le seguenti operazioni elementari:

$$\begin{aligned} & 1(n - 1) + 2(n - 2) + \dots + (n - 1)[n - (n - 1)] = \\ & = n + 2n + \dots + (n - 1)n - 1^2 - 2^2 - \dots - (n - 1)^2 = \\ & = n(n - 1)n/2 - (n - 1)n(2n - 1)/6 = (n - 1)n(n + 1)/6 \end{aligned}$$

moltiplicazioni ed altrettante addizioni.

Per il calcolo di  $b$  sono necessarie le seguenti operazioni elementari:

$$n + 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n + 1)/2 \text{ divisioni,}$$

$$1 + 3 + 6 + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} = (n + 1)n(n - 1)/6 \text{ moltiplicazioni,}$$

ed altrettante addizioni.

Per la risoluzione del sistema (3) è poi necessario (come nel metodo delle eliminazioni successive) fare le seguenti operazioni elementari:  $(n - 1)n/2$  moltiplicazioni ed altrettante addizioni.

Cosicchè il numero totale delle operazioni elementari da eseguire per risolvere il sistema (1) col metodo di BANACHIEWICZ è:

$$\begin{aligned} \text{moltiplicazioni: } (n - 1)n(n + 1)/6 + (n - 1)n(n + 1)/6 + (n - 1)n/2 = \\ = (n - 1)n(2n + 5)/6, \end{aligned}$$

addizioni: altrettante,

divisioni:  $n(n + 1)/2$ .

**3. Metodo del confronto.** — L'eliminazione successiva delle incognite, nel sistema (1), si può fare anche col metodo del « confronto » dell'algebra elementare. Cioè eliminare  $x_1$  fra la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup> equazione (moltiplicandole rispettivamente per  $a_{21}$  ed  $a_{11}$  e facendone la differenza), fra la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup>, ecc. fra la  $n - 1$ -esima e la  $n$ -esima. Si ottiene così un sistema di  $n - 1$  equazioni nelle  $n - 1$  incognite  $x_2, x_3, \dots, x_n$  (1° sistema ridotto). Sul quale si procede nello stesso modo fino ad avere una sola equazione nella sola incognita  $x_n$  ( $n - 1$ -esimo sistema ridotto). Determinato  $x_n$ , mediante risoluzione dell'ultima equazione, sostituendo il valore di  $x_n$  in una delle equazioni del sistema ridotto precedente si ottiene  $x_{n-1}$ , e così via fino a determinare  $x_1$ .

Il numero delle operazioni elementari da eseguire col metodo di confronto è il seguente:

$$\begin{aligned} \text{divisioni: } n, \quad \text{moltiplicazioni: } (n - 1)n(4n + 7)/6, \\ \text{addizioni: } (n - 1)n(2n + 5)/6. \end{aligned}$$

**4 Metodo dei determinanti.** — Calcolando un determinante di ordine  $n$  secondo la definizione si devono eseguire le seguenti operazioni elementari:  $n!(n - 1)$  moltiplicazioni ed  $n! - 1$  addizioni.

Si deve a F. CHIO <sup>(4)</sup> una regola che riconduce il calcolo di un determinante di ordine  $n$  ad uno di ordine  $n - 1$ . Secondo la re-

<sup>(4)</sup> F. CHIO, *Mémoire sur les fonctions connues sous le nom de resultantes ou de determinants*. Turin 1853. cfr. E. T. WHITTAKER e G. ROBINSON, *The calculus of observations*, 2<sup>a</sup> ed., London e Glasgow 1926, p. 71.

gola di CHIO si ha per esempio:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & -\alpha_{13} & a_{21} & a_{12} & -\alpha_{13} & a_{22} \\ a_{31} & -\alpha_{33} & a_{21} & a_{32} & -\alpha_{33} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ove  $a_{23}$  è l'elemento fissato come « perno » e

$$\alpha_{13} = a_{13} / a_{23}, \quad \alpha_{33} = a_{33} / a_{23}.$$

Ne risulta che seguendo la regola di CHIO, per il calcolo di un determinante di ordine  $n$ , si devono eseguire le seguenti operazioni elementari:

$(n-1)n(2n-1)/6 + (n-1)$  moltiplicazioni,

$(n-1)n(2n-1)/6$  addizioni,

ed  $(n-1)n/2$  divisioni.

Quindi la regola di CHIO è conveniente per  $n > 3$ .

Per la risoluzione del sistema di equazioni lineari (1), facendo uso della regola di LEIBNIZ-CRAMER, calcolando dapprima i determinanti  $A_i$ , con la regola di CHIO e mediante essi i determinanti  $A_1, A_2, \dots, A_n, A$  che figurano nelle formole:  $x_i = A_i / A$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), si devono fare le seguenti operazioni elementari:

moltiplicazioni:  $n^2[(n-2)(n-1)(2n-3)/6 + (n-2)] + n(n+1)$ ,

addizioni:  $n^2[(n-2)(n-1)(2n-3)/6] + (n-1)(n+1)$ ,

divisioni:  $n^2[(n-2)(n-1)/2] + n$ .

Se invece si calcolano i determinanti  $A_{ii}$ , secondo la definizione si devono fare le seguenti operazioni elementari:

moltiplicazioni:  $n^2[(n-1)!(n-2)] + n(n+1)$ ,

addizioni:  $n^2[(n-1)! - 1] + (n-1)(n+1)$ ,

divisioni:  $n$ .

5. *Esempio.* - Per la risoluzione di un sistema di 5 equazioni lineari in 5 incognite secondo i metodi esaminati si devono fare le seguenti operazioni elementari:

1) eliminazioni successive e metodo di BANACHIEWICZ:

50 moltiplicazioni, 50 addizioni, 15 divisioni (totale 115 oper.).

2) metodo del confronto:

90 multipl., 50 addiz., 5 divisioni (totale 145 oper.).

3) metodo dei determinanti calcolati con la regola di CHIO:

455 multipl., 374 addiz., 155 divisioni (totale 984 oper.).

4) metodo dei determinati calcolati secondo la definizione:

1830 multipl., 599 addiz., 5 divisioni (totale 2434 oper.).