BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

O. Chisini, C. F. Manara

# Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **3** (1948), n.1, p. 6–8.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_6_0>

# Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli.

Nota di O. Chisini e C. F. Manara (a Milano).

**Sunto.** - *Si enuncia una caratterizzazione delle curve di diramazione di una classe di piani tripli più ampia di altra già trattata.*

Gli autori estendono ai piani tripli la cui curva di diramazione sia costituita *per intero* dal discriminante di un' equazione cubica

$$az^3 + 3bz^2 + 3cz + d = 0 \tag{1}$$

(dove i coefficienti $a$, $b$, $c$, $d$ sono polinomi in $x$, $y$ i cui gradi devono essere in progressione aritmetica) una caratterizzazione già sviluppata [1] in un caso meno generale; e precisamente:

Si riconosce anzitutto il fatto ovvio che la curva di diramazione $\varphi$ di un piano siffatto soddisfa alle seguenti condizioni:

1° - Detto $m$ l'ordine di $\varphi$ e $k$ il numero delle sue cuspidi

[1] O. Chisini e C. F. Manara, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli.* « Annali di Mat. ». Serie IV, tomo XXV.

esiste un intero (positivo o nullo) $h$ tale che sussiste la relazione

$$3m^2 - 16k = 12h^2 \text{ (}^2\text{)}.$$

2° - Il gruppo $K$ delle cuspidi di $\varphi$ è contenuto nella serie completa di tutti i gruppi secati su $\varphi$ stessa dalle curve di ordine $(m - 2h)/4$; ossia esiste un gruppo di punti $T$ tale che

$$K + T \equiv \frac{m - 2h}{4} R$$

(dove $R$ rappresenta un gruppo di punti allineati di $\varphi$).

3° - Esiste almeno un gruppo effettivo $T'$, non avente alcun punto in comune con $T$ ed equivalente a $T + hR$.

Si dimostra poi che

TEOREMA 1° - Le condizioni suddette sono caratteristiche per la curva $\varphi$;

TEOREMA 2° - Tutti i piani tripli aventi una siffatta curva di diramazione sono birazionalmente identici.

Si dà qui un cenno della trattazione che verrà pubblicata per disteso negli « Annali di Matematica ».

La dimostrazione del Teorema 1° viene ottenuta in due tempi fondamentali: anzitutto viene acquisita l'esistenza di una curva $d$ di ordine $(m + 6h)/4$ pluritangente alla $\varphi$ nei punti del gruppo $T'$ (o di un gruppo ad esso equivalente). Per dimostrare questo punto fondamentale non v'è che ripetere, con lievi ed ovvie modificazioni, i ragionamenti svolti dalla prof. G. MASOTTI BIGGIOGERO in una sua recente ricerca (3) per dimostrare lo stesso fatto per le curve di diramazione dei piani tripli del « caso semplice ».

In un secondo tempo si dimostra l'esistenza di due curve $p' = 0$ e $q' = 0$ tali che la $d^2\varphi$ si possa scrivere nella forma

$$d^2\varphi = 4\,\{p'\}^3 + \{q'\}^2 = 0$$

e ciò si ottiene utilizzando risultati di recente ottenuti da C. F. MANARA (4) per la caratterizzazione delle curve che si possono rappresentare nella forma $p^3 + q^2 = 0$.

(2) Come si verifica facilmente, gli ordini dei polinomi $a$, $b$, $c$, $d$, che compaiono nella (1) espressi in funzione di $m$ ed $h$ risultano essere rispettivamente $(m - 6h)/4$, $(m - 2h)/4$, $(m + 2h)/4$, $(m + 6h)/4$.

(3) G. MASOTTI BIGGIOGERO, *La caratterizzazione della curva di diramazione dei piani tripli ottenuta mediante sistemi di curve pluritangenti.* « Rend. Ist. Lomb. ». Vol. LXXX.

(4) C. F. MANARA, *Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*, di prossima pubblicazione in questo « Bollettino ».

Assodati questi due fatti fondamentali, la dimostrazione del teorema segue subito provando che la curva $d$ non ha alcuna parte comune contemporaneamente con la $p' = 0$ e $q' = 0$.

Acquisita così l'esistenza di (almeno) un piano triplo diramato dalla $\varphi$ che soddisfa alle ipotesi del Teorema 1°, il Teorema 2° viene dimostrato sostanzialmente facendo vedere che, nelle ipotesi poste, la curva $\varphi$ può farsi tendere ad una forma limite costituita da due parti doppie. Il che basta perchè alla $\varphi$ si possa applicare un noto teorema del CHISINI [5].