Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Similitudine dei triangoli ed uguaglianza dei triangoli e dei triedri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 49–66.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_49_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Similitudine dei triangoli ed uguaglianza dei triangoli e dei triedri.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Si danno notizie storiche del 4° Crit. di uguaglianza dei triangoli e notizie storiche e varie dimostrazioni del 4° Crit. di similitudine dei triangoli e del 5° di uguaglianza dei triedri.*

PRIMA PARTE.

Introduzione e Notizie Storicò-Bibliografiche.

CAPITOLO 1°.

I criteri di uguaglianza e di similitudine dei triangoli.

Si sa che la similitudine di due triangoli importa in generale due condizioni che consistono in uguaglianza di angoli ed in proporzioni di lati omologhi; se poi si aggiunge alle due condizioni un'altra, l'uguaglianza di due lati corrispondenti. si ha l'uguaglianza dei triangoli. Quindi ad ogni Criterio di similitudine di triangoli corrisponde uno d'uguaglianza. Analogamente, viceversa, ad ogni Crit. d'uguaglianza corrisponde uno di similitudine dei triangoli.

Quali sono i possibili Crit. di similitudine?

Indichiamo con a_i ed α_i, $(i = 1, 2, 3)$, rispettivamente i lati e gli angoli ad essi opposti di un triangolo e con a_i' ed α_i' gli analoghi del secondo. I casi possibili sono [1]

$$\alpha_i = \alpha_i', \qquad (i = 1, 2), \qquad 1^\circ \text{ Crit.}$$

$$a_1 : a_1' = a_2 : a_2', \qquad \alpha_3 = \alpha_3', \qquad 2^\circ \text{ »}$$

[1] In alcuni testi quale 4° Crit. di uguaglianza si enuncia il seguente: *due triangoli sono uguali quando hanno uguali due angoli ed il lato op-*

$$a_1 : a_1' = a_2 : a_2' = a_3 : a_3' \qquad 3^\circ \text{ Crit.}$$
$$a_1 : a_1' = a_2 : a_2', \quad \alpha_1 = \alpha_1', \quad (\text{oppure} \quad \alpha_2 = \alpha_2'), \quad \text{caso ambiguo};$$

l'ultimo dei quali è un caso ambiguo cui corrisponde un 4° Crit. di similitudine, se si aggiunge la condizione che α_2 ed α_2' (oppure α_1 ed α_1') siano di ugual specie, (entrambi acuti, od ottusi: se fossero entrambi retti i triangoli sarebbero simili per il 1° Crit. e sarebbe perciò un di più postulare la proporzionalità di due lati). Tale 4° Crit. fu considerato, insieme con i primi tre dallo stesso EUCLIDE [2].

Se aggiungiamo alle condizioni dei casi precedenti l'uguaglianza di un lato, si hanno i corrispondenti casi di uguaglianza ed il caso ambiguo seguenti:

$$\alpha_i = \alpha_i', \; i = 1, 2, \; a_1 = a_1' \text{ oppure } a_2 = a_2', \text{ onde anche } a_3 = a_3', \quad 2^\circ \text{ Crit.}$$
$$\alpha_3 = \alpha_3', \; a_1 = a_1' \text{ e quindi } a_2 = a_2', \quad 1^\circ \text{ »}$$
$$a_1 = a_1', \text{ e quindi } a_2 = a_2', \; a_3 = a_3', \quad 3^\circ \text{ »}$$
$$\alpha_1 = \alpha_1', \; (\text{oppure } \alpha_2 = \alpha_2'), \; a_1 = a_1' \text{ e quindi } a_2 = a_2' \text{ caso ambiguo.}$$

posto ad uno di essi. Invece, poichè quest'ultimo ed il 2° Crit. possono unirsi in un solo enunciato, (come in I, 26 di EUCLIDE ed in diversi trattati moderni): *due triangoli sono uguali quando hanno un lato e due angoli ordinatamente uguali,* noi riteniamo come 4° Crit. il seguente: *due triangoli sono uguali, se hanno due angoli l'uno uguale e l'altro della stessa specie ed uguali i lati ad essi opposti.*

Precisiamo incidentalmente, che l'ordine dei Crit. di uguaglianza e di similitudine dei triangoli e di uguaglianza dei triedri cui ci riferiamo in questo nostro Lavoro, è il seguente:

Due triangoli sono uguali se hanno: 1° due lati e l'angolo compreso uguali; 2° un lato e due angoli ordinatamente uguali; 3° tre lati uguali; 4° due angoli l'uno uguale e l'altro della stessa specie ed uguali i lati ad essi opposti.

Due triangoli sono simili se hanno: 1° due angoli uguali; 2° due lati proporzionali e l'angolo compreso uguale; 3° tre lati proporzionali; 4° due angoli l'uno uguale e l'altro della stessa specie e proporzionali i lati ad essi opposti.

Due triedri sono uguali direttamente od inversamente se hanno: 1° due facce ed il diedro compreso uguali; 2° due diedri e la faccia comune uguali; 3° tre facce uguali; 4° tre diedri uguali; 5° due driedri l'uno uguale e l'altro della stessa specie ed uguali le facce ad essi opposte, purchè non entrambi angoli retti; 6° due facce l'una uguale e l'altra della stessa specie ed uguali i diedri ad esse opposti, purchè non entrambi retti,

(2) Libro VII, prop. 4, 5, 6, 7. Recentemente si è avuta un'altra dimostrazione di questo 4° Crit. di simil.: Cfr. A. NATUCCI, *Un quarto Criterio di similitudine*, « Period. di Mat. », serie IV, vol. XVII, (1937), pp. 225-9.

Se anche ora nel caso ambiguo si aggiunge la condizione che α_2 ed α_2', (oppure α_1 ed α_1'), siano di ugual specie, si ha un 4° Crit. di uguaglianza.

Ora, contrariamente a quanto forse ognuno si aspetterebbe, per il fatto che in EUCLIDE vi sono tutti e quattro i Crit. di similitudine, non si trovano negli *Elementi* che i primi tre Crit. di uguaglianza [3] e vi manca il 4°.

Ma il 4° Crit. di similitudine ed il 4° di uguaglianza dei triangoli hanno subito nei trattati di geometria elementare che seguirono gli *Elementi* delle vicende curiose: il 4° Crit. di similitudine, nella forma generale in cui lo troviamo in EUCLIDE scompare, almeno così sembra, in tutti i trattati posteriori, sia nei classici che nei moderni [4]; mentre il 4° di uguaglianza, che manca in EUCLIDE, fa capolino invece in buona parte dei detti trattati posteriori, se non altro nell'importante caso particolare in cui entrambi gli angoli uguali siano retti [5].

(3) Libro I, prop. 4, 8, 26.

(4) In BALTZER, *Elemente der Mathematik*, vol. 2°, (1883), p. 34 e p. 37; oppure Idem, *Elementi di matematica*, (traduzione del CREMONA), *Planimetria*, p. 58 e p. 126, abbiamo trovato un caso particolare del 4° Crit. di simil. insieme con il corrispondente 4° Crit. di uguaglianza: *due triangoli sono simili (uguali) se hanno due lati proporzionali (uguali) ed uguale l'angolo opposto al lato maggiore.* Il 4° Crit. di similitudine sia nella forma generale del testo, o della nota (1), che in quella particolare precedente del BALTZER non si trova per es. nei testi classici dei seguenti Autori: WOLFF, L. BERTRAND, LEGENDRE, LACROIX, AMIOT, ROUCHÈ e DE COMBEROUSSE, SANNIA e D'OVIDIO ed in nessuno dei nostri recenti trattati.

(5) Esso per es. si trova in SANNIA e D'OVIDIO. *Elementi di geometria*, 1ª Ed., (1869), p. 22 ed in S. CHERUBINO, *Elementi di geometria*, parte 1ª, (1939), pp. 70-71, per citare fra i tanti soltanto due.

Ma quando questo 4° Crit. di uguaglianza viene esaurientemente esaminato per la prima volta? In L. BERTRAND, *Dévéloppement nouveau de la partie élémentaire des Mathematiques*, vol. II, Génève, (1778), p. 40, vi è il teorema: « *Due triangoli possono convenire se hanno due lati ed un angolo non compreso uguale, purchè il secondo angolo non compreso dell'uno sia dello stesso nome del secondo non compreso dell'altro* ». Ma il BERTRAND perviene alla dimostrazione del teorema con procedimento lungo ed elaborato. Più semplice invece è la dimostrazione del 4° Crit. di uguaglianza data da MARIE nelle sue *Lezioni elementari di matematica*, (trad. di CANOVAI e DEL RICCO), Firenze, (1781), (e quindi di poco posteriore al libro di L. BERTRAND), c. p. 276. Poi, (Cfr. F. ENRIQUES, *Gli Elementi* di EUCLIDE e la *Critica antica e moderna*, Libro I, a cura di F. ENRIQUES e M. T. ZAPELLONI, p. 99), il CRELLE, nella 2ª Ed. della traduzione tedesca degli *Elementi di Geometria* del LEGENDRE. (LEGENDRE che però

Capitolo 2°.

Il 5° Criterio di uguaglianza dei triedri.

Occupiamoci ora dell'uguaglianza dei triedri. Se ora ci riferiamo ad una terna di assi cartesiani e teniamo presente che l'equazione di un piano dipende da tre parametri, gli otto triedri che tre piani determinano, verrebbero ad essere funzione di 9 parametri. Ma, poichè per noi non ha importanza la posizione del triedro rispetto agli assi e poichè d'altra parte tale posizione verrebbe a dipendere da 6 parametri, così l'uguaglianza, congruenza o simmetria, di due triedri verrebbe a dipendere da $9 - 6 = 3$ parametri solamente.

Per stabilire però i casi possibili dell'uguaglianza, diretta od inversa, di due triedri si deve tener presente: 1° che la somma degli angoli diedri di un triedro non ha un valore costante come lo ha la somma degli angoli di un triangolo, sapendosi soltanto che è compresa fra due e sei retti; 2° che non esistono triedri simili che non siano uguali [6]. Pertanto i casi possibili sono i se-

aveva trattato il caso ambiguo, soltanto nel caso particolare dei triangoli rettangoli), aggiunge in una nota la trattazione completa del caso ambiguo. Poichè la 1ª Ed. degli *Elementi di Geometria* del Legendre risale al 1794, è evidente la priorità di L. Bertrand nei riguardi del Crelle. Ma non è improbabile che lo stesso L. Bertrand sia stato preceduto alla sua volta da altri nella trattazione completa del caso ambiguo.

Difatti, ai quattro Crit. di uguaglianza dei triangoli corrispondono altresì i problemi della risoluzione di un triangolo qualsiasi nei quattro casi fondamentali. Ora dalla univocità della soluzione di essi, (sotto determinate condizioni per il caso ambiguo), emerge evidente la verità dei corrispondenti Crit. di uguaglianza dei triangoli.

L'ambiguità che si ha nella determinazione, dati di un triangolo due lati e l'angolo opposto ad uno di essi, dell'angolo opposto all'altro, quando il problema è possibile, non fu notata dagli Arabi e dagli Autori del Rinascimento. Sembra, (Cfr. A. Agostini, *Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche-Trigonometria piana e sferica*. « Enciclopedia delle Mat. elem. », a cura di Berzolari, ecc. vol. II, parte 1ª, p. 580), invece che essa sia stata notata da J. Tonski nel 1640, (Cfr. S. Dickstein, « Bibl. Math. », (2), 8, (1894), p. 24). È quindi ovvio pensare che da un tale esame dal caso ambiguo della risoluzione dei triangoli, all'enunciazione del corrispondente Crit. di uguaglianza, possa essere stato assai breve il passo, e supporre perciò, come si era congetturato più in alto, che tale 4° Crit. possa essere apparso in pubblicazioni anche anteriori a quella citata di L. Bertrand.

(6) Pertanto se ad ogni Crit. di uguaglianza dei triangoli corrisponde uno per i triedri, ad ognuno dei triedri non corrisponde uno dei triangoli. Per questo ed altri motivi la trattazione parallela del Veronese dei Crit.

guenti, se indichiamo rispettivamente con a_i, α_i, $(i = 1, 2, 3)$ le facce ed i diedri ad esse opposti di un triedro e con a_i', α_i', $(i = 1, 2, 3)$, gli elementi corrispondenti dell'altro

$$\begin{array}{llll}
\alpha_i' = \alpha_i', & i = 1, 2, 3, & & 4^{\circ} \text{ Crit.} \\
\alpha_i = \alpha_i', & i = 1, 2 \left\{ \begin{array}{l} a_3 = a_3' \\ a_1 = a_1', \end{array} \right. & \begin{array}{l} \\ (\text{oppure } a_2 = a_2'), \end{array} & \begin{array}{l} 2^{\circ} \text{ »} \\ \text{caso ambiguo,} \end{array} \\
\alpha_1 = \alpha_1' & \left\{ \begin{array}{ll} a_i = a_i', & i = 2, 3, \\ a_i = a_i', & i = 1, 2, \end{array} \right. & \begin{array}{l} \\ (\text{oppure } i = 1, 3), \end{array} & \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ Crit.} \\ \text{caso ambiguo} \end{array} \\
a_i = a_i', & i = 1, 2, 3, & & 3^{\circ} \text{ Crit.}
\end{array}$$

Come si vede si hanno ora due casi ambigui che danno due altri Crit. di uguaglianza se si aggiunge rispettivamente la condizione che a_2, a_2' (oppure a_1, a_1'); e α_2, α_2' (oppure α_3, α_3') siano di ugual specie, purchè non entrambi retti. Tali Crit., come si è detto in (1) li distingueremo rispettivamente con i numeri d'ordine 6° e 5°.

Quali sono state le vicende storiche di questi Crit.?

Innanzi tutto osserviamo che, se i simboli precedenti anzichè facce e diedri di un triedro indicano lati ed angoli di un triangolo sferico, dai precedenti casi di uguaglianza dei triedri si hanno i corrispondenti dei triangoli sferici, perchè si sa che da ogni teorema relativo ai triedri si ottiene uno per i triangoli sferici sostituendo alle parole *faccia, angolo diedro* del triedro, rispettivamente *lato ed angolo* del triangolo sferico e viceversa. E ciò perchè ad ogni triangolo sferico (di EULERO) è associato un triedro (convesso) avente il vertice nel centro della sfera cui appartiene il triangolo sferico e gli spigoli passanti per i vertici di quest'ultimo.

Poichè, con le costruzioni di un triedro date le sue tre facce soddisfacenti alle note condizioni e di un triedro uguale ad un altro dato, eseguite da EUCLIDE, nelle prop. 23 e 26 del libro XI, si perviene in ciascuno dei due casi ad un unico triedro ben determinato, bisogna pensare che, se anche il 3° Crit. di uguaglianza non fu da EUCLIDE esplicitamente enunciato e dimostrato, esso però dovette essere presente chiaramente nella sua mente. Connessa con questo argomento è l'autenticità e l'esattezza della 10ª def. del libro XI, che ha dato luogo a tante critiche e discussioni,

di uguaglianza dei triangoli e dei triedri dà luogo a difficoltà Cfr. A. FRAJESE, *La teoria dell'uguaglianza dei triedri nel suo sviluppo storico*, « Period. di Mat. », serie IV, vol. XIV, (1934), pp. 211-34 ed E. GUARDUCCI, *Della Congruenza e del movimento*, « Quest. riguardanti le mat. elem » di F. ENRIQUES, parte I, vol. 1°, pp. 139-40.

per le quali rimandiamo il lettore desideroso di minute e profonde informazioni, alle numerose pubblicazioni che vi si riferiscono (7).

A. AGOSTINI (8) poi ha formulata l'ipotesi che la XI, 35, con lievi aggiunte conclusive potendo dimostrare il nostro Crit., poteva, così completata, essere stata anteposta alle proposizioni cui occorreva, rendendo così inutile la 10ª def. stessa.

MENELAO nel I sec. dopo CRISTO considerava tutti e sei i casi di uguaglianza dei triangoli sferici stabilendo anche le condizioni che si devono verificare affinchè valgono il 5° ed il 6° Crit. (9).

Quale esempio riportiamo gli enunciati dei due seguenti Crit. di uguaglianza nella forma ad essi data da MENELAO (10).

1° *Se in due triangoli sferici due lati e gli angoli compresi sono uguali, anche i terzi lati sono uguali*;

2° *Se due triangoli sferici hanno tutti e tre i lati uguali sono uguali anche gli angoli.*

E non si può non notare anche di sfuggita che uno dei meriti di MENELAO fu proprio quello di non confondere fra loro la congruenza e la simmetria come fecero molti secoli dopo di lui Autori di fama indiscussa (11). È vero che esplicitamente MENELAO

(7) Cfr. F. ENRIQUES, l. c. in (5) libro XI a cura di A. AGOSTINI e la interessante *letteratura euclidea* anteposta al libro I, in cui sono date estese notizie bibliografiche. Cfr. inoltre A. FRAJESE. l. c. in (6) ed A. AGOSTINI, *L'uguaglianza dei triedri* in EUCLIDE, « Period. di Mat. », serie IV, vol. VIII, (1928), pp. 185-91.

(8) Cfr. l. c. in (7).

(9) Cfr. A. AGOSTINI, l. c. in (5) p. 587 ed il lavoro ivi citato: A. von BRAUNMUHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonom.*, 1, Lipsia, (1900), p. 112.

(10) Cfr. A. FRAJESE, l. c. in (6).

(11) Fra questi vogliamo citare soltanto due, uno straniero il WOLFF, (*Elementa Matheseos universae*, Genevae, 1746), e, sembra, (Cfr. A. FRAJESE, l. c, p. 219), anche uno nostro il CAVALIERI, (*Directorium generale uranometricum*, Bononiae, (1632), p. 316 e seg.). E la cosa sembra alquanto strana per il CAVALIERI che si interessò di triangoli sferici. È difatti, lo notiamo incidentalmente, a lui per es. dovuto il teorema che dà l'area di un triangolo sferico (*Directorium ecc.*, p. 316). Tale teorema dimostrato in maniera rigorosa ha reso celebre l'opera in cui è apparso. (Cfr. GABRIO PIOLA, *Elogio di* B. CAVALIERI *con note, postille matematiche, ecc.*, Milano, (1844), p. 50, nota 19), sebbene già il GIRARD avesse, qualche anno prima, nel 1629, (in *Invenction nouvelle en algèbre*, Amsterdam 1629; ed. D. BIERENS DE HAAN, Leida, 1884, p. 270), dimostrato lo stesso teorema ma in maniera laboriosa ed oscura. Il MONTUCLA però (*Hist. de Math.*, t. 2°, p. 28) ammette come molto probabile, data la difficoltà delle comunicazioni dell'epoca, che il CAVALIERI avesse ignorato la proposizione stabilita da GI-

non precisò quando si ha la uguaglianza diretta od inversa, ma nel suo spirito dovette essere chiara la possibilità di triedri con tutti gli elementi uguali ma non congruenti. E ciò si desume dagli enunciati dei due teoremi riportati innanzi, in cui è manifesta la cura posta dall'Autore di asserire come tesi non l'uguaglianza dei triedri ma l'uguaglianza soltanto di alcuni elementi di essi, e dalla dimostrazione del 1° di quei teoremi che, certamente per evitare la ovvia ed immediata dimostrazione per sovrapposizione, che poteva anche non verificarsi, è alquanto lunga ed elaborata ([12]). È merito del SEGNER di aver per la prima volta precisata in maniera chiara ed esplicita, in occasione di una famosa disputa con il WOLFF, la differenza fra uguaglianza diretta ed inversa ([13]).

Quali le ulteriori vicende storiche dei Crit. di uguaglianza dei triedri e dei triangoli sferici? Il 5° ed il 6° Crit. di uguaglianza dei triedri, (che si riduce al 5° a mezzo dei triedri polari ([14])), scompaiono quasi del tutto nei trattati classici posteriori di geometria. Invano essi si cercano difatti per es. nei trattati di WOLFF, LEGENDRE, LACROIX, ROUCHÉ DE COMBEROUSSE, ecc. Li abbiamo rinvenuti soltanto in SANNIA e D'OVIDIO ([15]) in cui, sebbene non enunciati del tutto correttamente sono però dimostrati in maniera esauriente ([16]).

RARD. Però la regola per il calcolo dell'area di un triangolo sferico doveva essere nota al REGIOMONTANO, (1436-1476), poco meno di due secoli prima, (Cfr. A. AGOSTINI, l. c., in ([5]), p 588, nota ([111]). A. AGOSTINI gentilmente ci ha scritto di giustificare le omissioni rilevate sull'argomento nel CAVALIERI con la fretta che egli dovette avere di pubblicare la c. sua opera onde avere la conferma della lettura di matematica nell'Università di Bologna per l'anno 1632-33. Per il verso dei triedri cfr. U. CASSINA, *Trasformazioni geometriche razionali* in « Enc. Mat. elem. » di BERZOLARI ecc., vol. II, parte I, p. 419 e le pubblicazioni cui in questo art. rimanda. Cfr. inoltre in questa stessa Encicl. la nota ([194]) (dell'articolo *Proprietà elementari delle figure del piano e dello spazio* di ARTOM) del vol. II, parte I, p. 109. In EUCLIDE non vi è però alcuna precisazione esplicita della uguaglianza diretta ed inversa. Cfr. anche A. FRAJESE, l. c., ecc.

([12]) Cfr. A. FRAJESE, l. c.

([13]) Id.

([14]) Per notizie storiche relative ai triedri polari cfr. per es. A. FRAJESE, l. c. e E. CARRUCCIO, *Applicazione della legge di dualità sulla sfera alla teoria degli isoperimetri*, « Per. di Mat. », serie IV, vol. XII, (1932), pp. 150-8.

([15]) *Elementi di geometria*, 1ª Ed., 1869, II parte, pp. 341-2.

([16]) Non è dichiarata nell'enunciato del 5° la condizione che le facce uguali non debbono essere entrambi angoli retti ed in quello del 6° l'analoga per i diedri uguali. Però dalle dimostrazioni emerge che quelle con-

Però in molti degli Autori classici vengono risolti i triangoli sferici qualunque nei sei casi corrispondenti ai sei Crit. di uguaglianza, sebbene non da tutti completamente quelli in cui si hanno ambiguità [17].

E come abbiamo rilevato a proposito dei triangoli piani, la soluzione univoca nella risoluzione dei triangoli sferici, (e nei casi ambigui sotto determinate condizioni aggiuntive), avrebbe dovuto far nascere spontanea l'idea della validità dei sei Crit. di uguaglianza dei triangoli sferici e quindi anche dei triedri.

Per la notata rarità con cui si è trattato il 4° Crit. di similitudine dei triangoli ed il 5° di uguaglianza dei triedri, e poichè questa nostra Nota ha una duplice finalità, storico-didattica, esporremo nella 2ª Parte varie, (per l' alto valore formativo che hanno le dimostrazioni differenti di una stessa verità), dimostrazioni nuove, crediamo tutte, ad eccezione di quella di EUCLIDE, del 4° Crit. di similitudine dei triangoli e del 5° di uguaglianza dei triedri.

SECONDA PARTE.

Dimostrazioni varie del 4° Crit. di similitudine dei triangoli e del 5° di uguaglianza dei triedri.

CAPITOLO 1°.

Il 4° Crit. di similitudine dei triangoli.

1. Ecco innanzi tutto nei suoi termini precisi l'enunciato del 4° Crit. di Similitudine: *Due triangoli sono simili se hanno due*

dizioni debbono essere verificate per la validità dei teoremi, come si è detto nel testo.

(17) Una trattazione sistematica dei sei casi di risoluzione dei triangoli sferici qualunque non si ebbe presso i Greci. Invece una prima parziale sistemazione si ebbe per la prima volta verso la fine della Civiltà araba per opera di NASIR-EDDIN, (1201-74), che si occupò dei sei casi, senza però notare l'ambiguità del 5° e del 6° caso. Il RETICO, (1514-76), sembra il primo che si sia occupato della detta ambiguità considerando, per rimuoverla, innumerevoli casi particolari. Però un contributo notevole allo studio di questo argomento si deve prima al VIETE, (*Variorum de rebus mathematicis responsorum,* libri VIII, Tours, 1593), e a J. H. LAMBERT, (*Beitrage zum Gebrauch der Mathematik,* 1, p. 390) ed a EULERO, (« Hist. Ac. Berlin », 9, (1753)), poi Cfr. A. AGOSTINI, l. c. in (5), pp. 597-8.

Ma quando l'esauriente esame dei casi ambigui entrò nei testi elementari di trigonometria? In L. BERTRAND, l. c. in (5), vol. II, (1778), sez. V, *trig. sphérique,* nelle pp. 598-604 vi si fa un esame alquanto accurato dei casi ambigui servendosi dei risultati relativi alla determinazione univoca o no di un triedro dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi ed alla *angoli l'uno uguale e l'altro della stessa specie, acuto od ottuso* [18] *e proporzionali i lati ad essi opposti.*

Come si è detto in EUCLIDE [19] è dimostrato il 4° Crit. di simil. dei triangoli. Tale dimostrazione è fatta per assurdo in maniera assai semplice nel modo seguente.

questione duale. Ma tale esame non è nè esauriente e nè privo di mende. Invece in A. CAGNOLI, (*Trigonometria piana e sferica*, edita la prima volta in Italiano a Parigi nel 1786 ed in questo stesso anno tradotta in francese da CHOMPRÊ), trattato prima, senza distinzione del verso, il 5° Crit. di uguaglianza dei triangoli sferici nel seguente caso particolare: *due triangoli sferici sono uguali quando hanno due lati e i due angoli opposti rispettivamente uguali*, vi si risolvono poi i triangoli sferici qualunque. Dei casi ambigui, nella risoluzione dei triangoli sferici qualunque, l'Autore si occupa nelle pp. 264-71 della ediz. italiana e nelle pp. 274-81 di quella francese. E se neanche qui l'analisi dei casi possibili è completa, vi sono però nella discussione fatta, molte utili osservazioni. LACROIX nel suo *Trattato elem. di trig. rettil. e sferica ed applicazione dell'Alg. alla geom.*, (1ª versione di BUBINI, sulla 5ª di Parigi), Firenze, 1828, pp. 76-7, rimanda per maggiori particolari relativi ai casi ambigui della risoluzione dei triangoli sferici qualunque a L. BERTRAND, l. c. in (5), vol. II, Sez. V. Nelle *Leçons nouvelles de Trig.* di BIOT e BOUQUET, 3ª Ed., Parigi, (1858), pp. 127-35, se l'esame dei casi dubbi non è svolto in tutti i dettagli, vi sono però i concetti fondamentali della discussione. Il detto esame è esauriente e svolto in ogni particolare nelle diverse, crediamo in tutte, le edizioni del *Trattato di Trig.* del SERRET e nella *Trig. sferica* di I. TODHUNTER, (tradotta da VITO EUGENIO), Napoli, (1875), pp. 55-9.

Quando invece la discussione completa appare nei trattati italiani? L'esame completo dei casi ambigui è fatto in modo assai chiaro nei *Trattato di Trig.* dell'AMANTE cui rimanda il RUBINI nella sua traduzione, (sulla 20ª di Parigi) del *Trattato di Trig.* del LEGENDRE, apparsa in Napoli nel 1844, perchè nel detto « *eccellente* » trattato dell'AMANTE è stato ormai « *completato l'analisi dei casi dubbi della trigonometria sferica* », cosa invece che non aveva fatto il LEGENDRE che aveva esaminato ma non completamente i casi ambigui nelle pp. 62-7 del l. c. E il DE LUCA in *Nuovo sistema di studi geometrici*, Napoli, 1847, notata l'ambiguità dei casi dubbi della risoluzione dei triangoli sferici rimanda anche egli alla « *bella* trigonometria del prof. F. AMANTE ». La discussione esauriente infine dei casi ambigui nella risoluzione dei triangoli sferici qualunque nei moderni trattati di trigon. italiani è fatta, crediamo, soltanto da PESCI, (*Trattato elementare di Trigonometria piana e sferica*), Livorno, e da A. AGOSTINI (*Trigonometria piana e sferica*, II Ediz., (1941), Livorno, pp. 188-95.

(18) Come è ovvio si è escluso il caso che l'angolo di ugual specie sia retto in entrambi i triangoli, come naturalmente fa anche EUCLIDE, perchè in tal caso i triangoli avendo due angoli uguali sono simili per il 1° Crit. ed è perciò superflua la postulata proporzionalità dei due lati.

(19) Cfr. l. c. in (2).

Dalle ipotesi, (fig. 1)

(1) $$AC : A'C' = AB : A'B'$$

(2) $$\widehat{C} = \widehat{C}', \qquad \widehat{B} \text{ e } \widehat{B}' \text{ della stessa specie,}$$

se non si avesse anche $\widehat{A} = \widehat{A}'$, costruito

$$C\widehat{A}B'' = \widehat{A}',$$

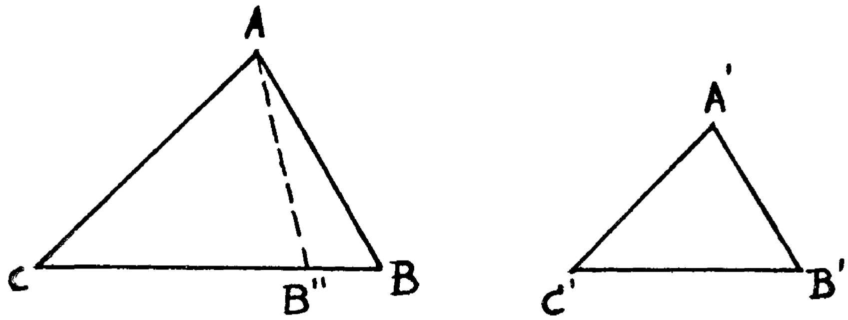

Fig. 1.

essendo simili i triangoli CAB'', $C'A'B'$ si avrebbe

$$AC : A'C' = AB'' : A'B',$$

che con il confronto con la (1) darebbe

$$AB'' = AB.$$

Pertanto dovrebbe essere

$$A\widehat{B''}C = \widehat{B}', \qquad A\widehat{B''}B = \widehat{B},$$

e ciò è assurdo sia nel caso in cui $\widehat{B}$ e $\widehat{B}'$ sono entrambi acuti che quando sono entrambi ottusi.

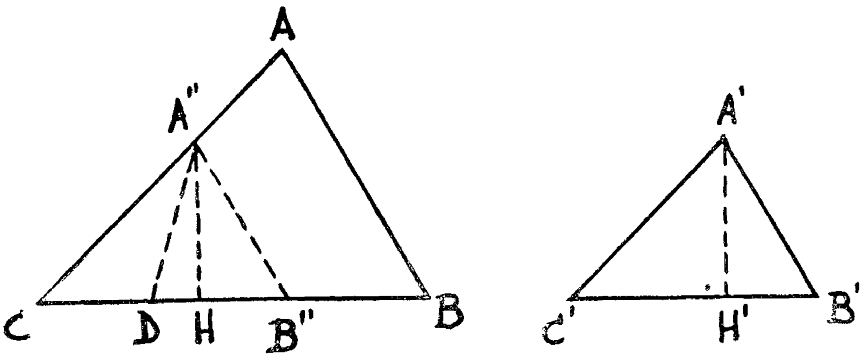

Fig. 2.

Dimostrazioni pure per assurdo sono quella del Natucci ([20]) e le seguenti nostre.

([20]) Cfr. l. c. in ([2]).

Sussistano ancora le (1) e (2), fig. (2).

Qualunque sia la specie di $\widehat{C}$, $\widehat{C'}$, la dimostrazione è sostanzialmente identica.

Supponiamo $AC \neq A'C'$, perchè altrimenti i triangoli sarebbero uguali e quindi simili.

Si faccia $CA'' = C'A'$ e si conducano $A''H$ ed $A'H'$ perpendicolari rispettivamente a CB, $C'B'$.

I triangoli rettangoli $A''HC$, $A'H'C'$, essendo uguali hanno $A''H = A'H'$. Ma è $A'H' < A'B'$, quindi l'arco di circonferenza con centro in A'' e raggio uguale ad $A'B'$ incontra la retta CB in due punti. Sia B'' quello dei due che congiunto con A'' dà un angolo, $A''\widehat{B''}C$, della stessa specie di $\widehat{B}$. Diciamo che è $A''B'' \parallel AB$.

Se difatti, per assurdo, anzicchè $A''B''$, fosse $A''D$ parallela ad AB, avremmo

$$AC : A''C = AB : A''D$$

e dal confronto di quest'ultima con la (1), si avrebbe

$$A''D = A'B' = A''B''.$$

Perciò nel triangolo isoscele $A''B''D$ gli angoli alla base, dovrebbero essere della stessa specie di $\widehat{B}$ al pari di $A''\widehat{D}C$, (perchè $A''\widehat{D}C$, $\widehat{B}$ sarebbero uguali come corrispondenti), e ciò è assurdo. Quindi è $A''B'' \parallel AB$ e i triangoli $A''B''C$, $A'B'C'$ sono simili e da ciò segue subito la tesi.

2. Un'altra dimostrazione per assurdo più semplice della precedente è la seguente analoga a quella di Euclide.

Valgano ancora le (1) e (2) e supponiamo che $\widehat{B}$ e $\widehat{B'}$, (fig. 1), siano entrambi acuti od ottusi. Se non fosse anche

$$AC : A'C' = CB : C'B',$$

dovrebbe esserci sulla semiretta CB un punto B'' tale da aversi

$$AC : A'C' = CB'' : C'B'.$$

Tale punto B'' congiunto con A darebbe il triangolo ACB'' simile, per il 2° Crit., ad ACB e si avrebbe

$$AC : A'C' = AB'' : A'B',$$

da cui seguirebbero subito le conclusioni della dimostrazione di Euclide.

3. Ma le più semplici e dirette dimostrazioni del 4° Crit. sono le due seguenti che nonostante la loro grande semplicità, sembra, non siano state ancora notate.

Valgano le (1) e (2).

Se fosse, (fig. 3), $AC = A'C'$, per la (1) sarebbe $AB = A'B'$ ed i triangoli dati sarebbero uguali per il 4° Crit. di uguaglianza e quindi simili.

Se invece è $AC \neq A'C'$, costruiamo sulla retta di uno di questi lati a partire da uno dei vertici un segmento uguale all'altro lato. Si faccia per es.

$$AC'' = A'C'$$

e si tiri poi $C''B''$ parallela a CB. Dai triangoli simili ACB, $AC''B''$, si ha

$$AC : AC'' = AB : AB''. \tag{3}$$

Il confronto di (1) e (3) dà $AB'' = A'B'$. Ma è $A\widehat{C''}B'' = \widehat{C} = \widehat{C'}$ ed $A\widehat{B''}C''$, uguale a $\widehat{B}$, è della stessa specie di $\widehat{B'}$, quindi i trian-

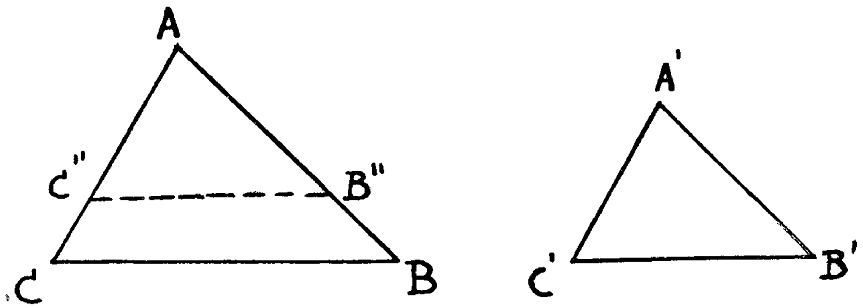

Fig. 3.

goli $AB''C''$, $A'B'C'$ sono uguali per il 4° Crit. di uguagl. ed è pertanto $A'B'C'$ simile ad ABC.

4. Si è osservato che la dimostrazione precedente è del tutto analoga ad una di quelle che solitamente oggi si fanno degli altri Crit. di similitudine. E come questi il 4° può anche dimostrarsi costruendo

$$AC'' = A'C', \qquad AB'' = A'B'$$

e congiungendo C'' con B''.

5. Un'altra dimostrazione del 4° Crit. può aversi a mezzo della 2ª legge delle inverse, con il 2° Crit. di simil. e con il seguente teorema.

Teorema. – *Se due triangoli hanno due angoli l'uno uguale e l'altro di uguale specie, acuto od ottuso, rispetto al rapporto dei lati opposti a questo ultimo, i due rapporti delle altre due coppie di lati sono entrambi maggiori o minori se l'angolo di ugual specie è acuto, l'uno maggiore e l'altro minore se invece l'angolo di uguale specie è in entrambi ottuso.*

Cioè se è, (fig. 4)

(4) $$\widehat{A} = \widehat{A}'; \qquad \widehat{C},\ \widehat{C}' \text{ entrambi acuti}$$

a seconda che è

(5) $$AC : A'C' \gtrless AB : A'B'$$

si ha anche rispettivamente

(6) $$BC : B'C' \gtrless AB : A'B';$$

se invece è

$$\widehat{A} = \widehat{A}'; \qquad \widehat{C},\ \widehat{C}' \quad \text{entrambi ottusi,}$$

a seconda che è

$$AC : A'C' \gtrless AB : A'B',$$

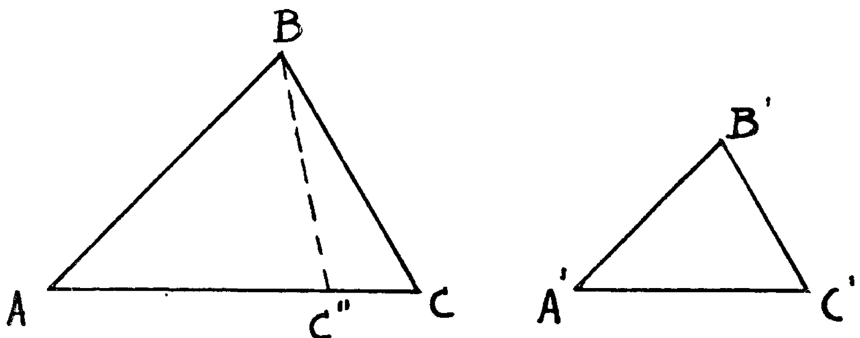

Fig. 4.

si ha anche rispettivamente

$$BC : B'C' \lessgtr AB : A'B'.$$

Dimostriamo la 1ª parte, analoga è la dimostrazione della 2ª.

Si prenda su AC, C'' in modo da aversi

$$AC'' : A'C' = AB : A'B'$$

e si congiunga B con C''. Dai due triangoli simili, per il 2° Crit., ABC'', $A'B'C'$, si ha

(7) $$BC'' : B'C' = AB : A'B', \qquad \widehat{BC''A} = \widehat{C}'.$$

Nell'ipotesi di

$$AC : A'C' > AB : A'B',$$

il punto C'' è interno ad AC e perciò per la 2ª delle (7), e per essere $\widehat{C}$ e $\widehat{C}'$ entrambi acuti, è $\widehat{BC''C}$ ottuso e quindi $BC > BC''$. Pertanto è

$$BC : B'C' > BC'' : B'C' = AB : A'B'.$$

Analoga è la conclusione se si suppone

$$AC : A'C' < AB : A'B',$$

e quindi il teor. è dimostrato.

Naturalmente per la 2ª legge delle inverse sussiste anche l'inverso del teor. dimostrato e cioè: se valgono le (4) e la (6), vale anche la (5) e l'analogo per il caso di $\widehat{C}$, $\widehat{C}'$ ottusi ([21]).

Come è ovvio inoltre il 4° Crit, di uguagl. potrebbe dedursi, con la 2ª legge delle inverse, dal 1° Crit. di uguagl. e da una proposizione analoga alla precedente.

6. Un'altra dimostrazione del 4° Crit. di simil., il cui sviluppo lo lasciamo alla cura del lettore, si può avere, quando, stabilito un ordinamento logico opportuno, però alquanto differente dagli usuali di oggi, si siano dimostrati i seguenti teoremi.

a) *Triangoli che hanno un angolo uguale sono proporzionali al prodotto dei lati che lo comprendono;*

b) *(inverso del precedente). Due triangoli proporzionali al prodotto di due lati hanno uguale l'angolo fra essi compreso, purchè per ipotesi esso è di ugual specie in entrambi.*

Il teor. *b*) segue per assurdo da *a*).

Si deve notare che le dimostrazioni di tutti i teor. cui si è fatto cenno in questo numero sono indipendenti del teor. di Talete ([22]).

7. Dal 4° Crit. di simil. si deducono più o meno subito delle interessanti proposizioni: Eccone alcune:

Due triangoli sono simili se hanno due lati proporzionali ed uguale, ottuso o retto, l'angolo opposto ad uno di essi.

Due triangoli che hanno un lato, la mediana e l'altezza ad esso relative proporzionali, sono simili.

Due triangoli che hanno proporzionali un lato, la mediana, (o la bisettrice), e l'altezza uscenti da un medesimo vertice sono simili, purchè quei segmenti lato, mediana, (o bisettrice), ed altezza abbiano lo stesso ordine nei due triangoli.

Due poligoni sono simili se hanno i lati ordinatamente pro-

([21]) Incidentalmente notiamo che anche il 3° Crit. di simil. potrebbe dimostrarsi in modo analogo se parallelamente al teor.: *Se due triangoli hanno due lati uguali e l'angolo compreso disuguale, all'angolo maggiore si oppone il lato maggiore;* si stabilisse quest'altro, (la cui dimostrazione è analoga a quella del testo): *Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso disuguale, il rapporto fra il lato che si oppone all'angolo maggiore e quello che si oppone al minore è maggiore dei rapporti della detta proporzione.*

([22]) Una dimostrazione analoga del 1° Crit. si trova alla voce « *triangolo* » del *Dizionario delle scienze matem. pure ed applicate*, compilato da una Società di antichi allievi della Scuola Politecnica di Parigi, sotto la direzione di Montferrier, (traduz. di Gasbarri e François), vol. VIII, (1847).

porzionali e gli angoli ordinatamente uguali, ad eccezione di due angoli consecutivi e di un lato adiacente ad uno solo di essi su cui si fa la sola ipotesi che l'angolo dei due che è adiacente al lato sia della stessa specie nei due poligoni [23].

Ecc., ecc. Da tutte queste proposizioni seguono immediatamente delle altre relative all'uguaglianza di triangoli o poligoni.

Capitolo 2°.

Il 5° Crit. di uguaglianza dei triedri.

1. Ecco l'enunciato del 5° Crit. di uguaglianza dei triedri:

Se due triedri hanno due facce uguali e gli angoli driedri opposti l'uno uguale e l'altro della stessa specie, sono uguali direttamente od inversamente, purchè le facce uguali non siano angoli retti. (In questo caso escluso i triedri in generale non sono uguali).

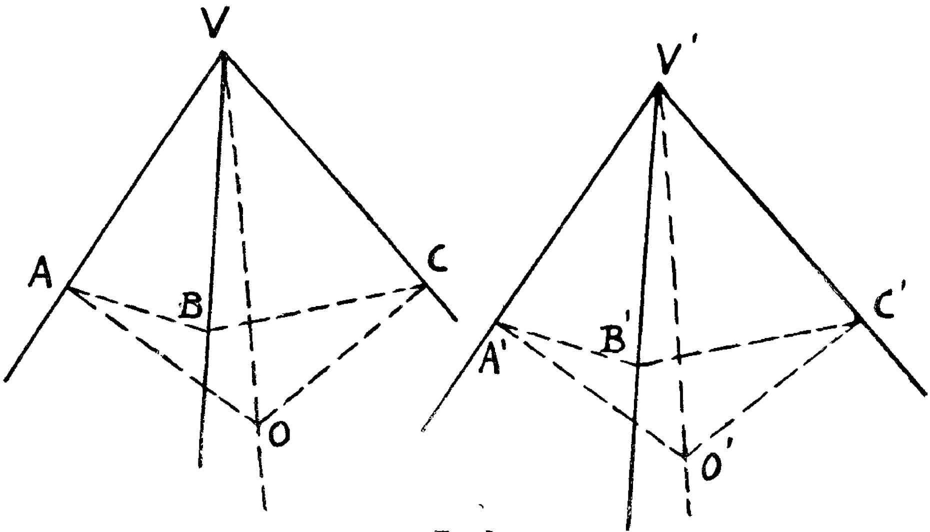

Fig. 5.

Al solito i triedri sono uguali direttamente od inversamente a seconda che gli elementi uguali sono rispettivamente disposti o no nello stesso ordine.

L'enunciato del 6° si ottiene dal precedente scambiando fra loro

[23] A proposito di criteri di simil. (di uguaglianza) dei poligoni convessi, notiamo incidentalmente che il Crit.: *Due poligoni convessi sono simili (uguali), se hanno i lati ordinatamente proporzionali (uguali) e gli angoli ordinatamente uguali ad eccezione di tre di questi consecutivi su cui non si fa alcuna ipotesi, sussiste anche se gli angoli, su cui non si fa alcuna ipotesi, anzichè essere consecutivi sono comunque messi, purchè nello stesso ordine nei due poligoni.*

le espressioni *faccia* ed *angolo diedro*. Esso si dimostra come si sa a mezzo dei triedri polari riducendolo al 5°.

Una dimostrazione diversa di quella del SANNIA e D'OVIDIO del 5° è la seguente ([24]), (fig. 5).

Si abbia per ipotesi

$$A\widehat{V}B = A'\widehat{V'}B', \quad B\widehat{V}C = B'\widehat{V'}C'. \quad \widehat{VA} = \widehat{V'A'}$$

e $\widehat{VC}$, $\widehat{V'C'}$ della stessa specie.

Si faccia $VB = V'B'$ e si conducano da B due piani perpendicolari agli spigoli VA, VC, si hanno così le sezioni normali $\widehat{BAO}$, $\widehat{BCO}$ dei diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{VC}$; analoga costruzione si esegua nel triedro V'.

Se $\widehat{VC}$, $\widehat{V'C'}$ sono entrambi acuti ed acuti pure sono i driedri $\widehat{VA}$, $\widehat{V'A'}$, i punti O, O', (piedi delle perpendicolari da B, B' alle facce $A\widehat{V}C$, $A'\widehat{V'}C'$ rispettivamente), sono interni alle rispettive facce $A\widehat{V}C$, $A'\widehat{V'}C'$, per cui è, congiunto V con O e V' con O'

$$(1) \qquad A\widehat{V}C = A\widehat{V}O + O\widehat{V}C, \qquad A'\widehat{V'}C' = A'\widehat{V'}O' + O'\widehat{V'}C'.$$

Ora si dimostrano successivamente e subito che sono uguali i triangoli rettangoli delle seguenti coppie

$$AVB,\ A'V'B';\quad BVC,\ B'V'C';\quad BAO,\ B'A'O';\quad BCO,\ B'C'O';$$
$$AVO,\ A'V'O';\quad OVC,\ O'V'C'.$$

e dalle uguaglianze dei triangoli delle due ultime coppie segue per le (1) che

$$A\widehat{V}C = A'\widehat{V'}C'.$$

Pertanto i due triedri hanno le tre facce uguali e sono perciò uguali direttamente od inversamente.

In modo analogo si dimostra il teor. nelle varie altre ipotesi possibili nei riguardi della specie dei diedri $\widehat{VC}$, $\widehat{VA}$ e dei loro omologhi. Fa eccezione il caso in cui le due facce uguali. e quindi i diedri ad essi opposti, sono angoli retti; e si deve considerare a parte il caso in cui $\widehat{VC}$, $\widehat{V'C'}$ sono retti.

2. In quest'ultimo caso si dimostra subito il seguente teorema:

TEOR. – *Due triedri sono direttamente uguali, quando hanno una faccia, un diedro ad essa adiacente ordinatamente uguali ed il diedro opposto retto, purchè lo spigolo del diedro su cui non si fa alcuna ipotesi, non sia perpendicolare al piano della faccia opposta.*

([24]) Essa è dello stesso tipo di quella con cui LEGENDRE nei suoi *Elementi* dimostra il 3° Crit. di uguagl. dei triedri che alla sua volta deriva dalla Propr., XI, 35 degli *Elementi* di EUCLIDE.

Sia, (fig. 5)

$$\widehat{AVB} = \widehat{A'V'B'}; \quad \widehat{VA} = \widehat{V'A'}; \quad \widehat{VC} \text{ e } \widehat{V'C'} \quad \text{entrambi retti};$$

e VB, $V'B'$ non perpendicolari rispettivamente ai piani AVC, $A'V'C'$.

Diciamo che è

$$\widehat{AVC} = \widehat{A'V'C'}$$

e cioè che i triedri sono uguali direttamente, supponendo come è nella fig. 6 che gli elementi uguali sono disposti nello stesso ordine.

Difatti se invece fosse una delle due facce $\widehat{AVC}$, $\widehat{A'V'C'}$ maggiore dell'altra e per es. fosse

$$\widehat{AVC} > \widehat{A'V'C'},$$

fatto su $\widehat{AVC}$, $\widehat{AVC''} = \widehat{A'V'C'}$, dai triedi $VBAC''$, $V'B'A'C'$, uguali, e dalla ipotesi seguirebbe che i due diedri $B\widehat{VC''}C$, $\widehat{VC}$ del triedro $VBCC''$ sarebbero retti e perciò che i piani BVC'', BVC sarebbero

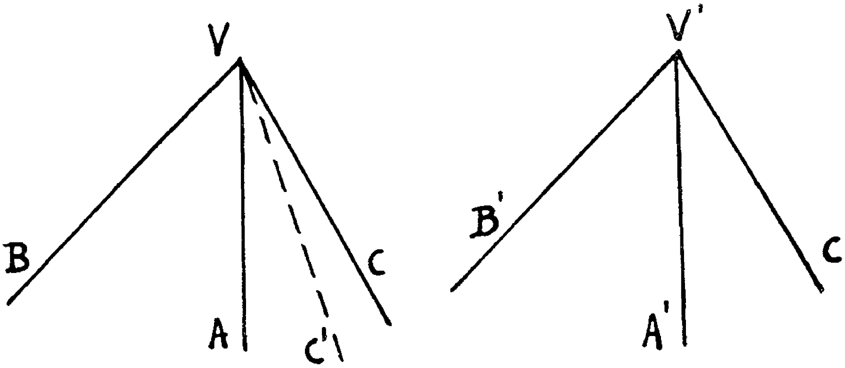

Fig. 6.

entrambi perpendicolari al piano AVC, cui sarebbe pertanto anche perpendicolare la loro intersezione VB, contro l'ipotesi fatta. Perciò i triedri sono uguali.

Si noti infine che nel 5° Crit. di uguaglianza dei triedri, quando l'angolo di ugual specie è retto, è un di più postulare l'uguaglianza della faccia opposta al diedro uguale, (come si rileva dalla precedente dimostrazione), purchè esso non sia anche retto, nel qual caso non sussiste il teorema.

3. Il 5° Crit. di uguaglianza dei triedri si può stabilire a mezzo della 2ª legge delle inverse, con una proposizione analoga alla 1ª del n. 5 del Cap. precedente, cioè a mezzo del

Teor. - *Se due triedri hanno un angolo uguale e le facce che lo comprendono una uguale e l'altra disuguale, hanno la terza faccia disuguale nello stesso senso od in senso contrario a seconda che l'an-*

golo che si oppone alla faccia uguale, di ugual specie nei due triedri, sia rispettivamente acuto od ottuso.

Come l'enunciato anche la dimostrazione di questo teorema si ottiene subito da quella del corrispondente teorema del Capitolo precedente, con semplici sostituzioni di parole.

4. Come applicazione del 5° Crit. di uguaglianza dei triedri si osservi che ai noti Crit. di uguagl. degli angoloidi potrebbe aggiungersi il seguente: *Due angoloidi convessi con* n *facce sono uguali se hanno ordinatamente* n — 2 *diedri ed* n — 1 *facce uguali. I due diedri, di cui non si dichiara l'uguaglianza sono consecutivi. e due di essi, similmente disposti, sono della stessa specie nei due angoloidi. L'* n-*ma faccia su cui non si fa alcuna ipotesi è adiacente a quest'ultimo angolo ma non anche all'altro,* e l'analogo che si dimostra a mezzo del 6° Crit. di uguaglianza ([25]).

In modo analogo, ai noti Crit. di uguaglianza (e di similitudine) dei tetraedri ([26]), potrebbe aggiungersi il 5° Crit., (ed un 6° duale), di uguaglianza (e di simil.) seguente: *Due tetraedri sono uguali, (simili), se hanno due facce ordinatamente uguali, (simili) e (nel triedro cui queste appartengono), uguale il diedro opposto ad una di esse, purchè il diedro opposto, (nello stesso triedro), all'altra faccia sia della stessa specie.*