GIUSEPPE ZWIRNER

Un criterio d'esistenza e d'unicità per gli integrali dell'equazione $y' = \lambda f(x, y)$ passanti per due punti assegnati.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.1, p. 15–18.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_1_15_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Un criterio d'esistenza e d'unicità per gli integrali dell'equazione $y' = \lambda f(x, y)$ passanti per due punti assegnati.

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (a Padova).

Sunto. - *Si dà un criterio d'esistenza e d'unicità per gli integrali dell'equazione* $y' = \lambda f(x, y)$ *passanti per due punti assegnati.*

In una Nota recente [1] ho dato un criterio d'esistenza e di unicità per le soluzioni del problema

$$\text{I)} \qquad \begin{cases} y'(x) = \lambda f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1, \end{cases}$$

[1] G. ZWIRNER, *Sull'equazione* $y' = \lambda f(x, y)$, [« Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. XV, (1946), pp. 33-39], pp. 36-38.

nelle incognite λ e $y(x)$, supponendo la $f(x, y)$ continua rispetto a y e misurabile rispetto a x nel rettangolo

$$R: x_0 \leq x \leq x_1, \qquad a \leq y \leq b$$

e soddisfacente ivi alla condizione

$$f(x, y) \geq \nu = \text{cost} > 0.$$

Mi sono allora proposto di vedere sotto quali ipotesi si possa ancora affermare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema I) se si suppone verificata soltanto la $f(x, y) \geq 0$.

In questa Nota espongo il risultato a cui sono pervenuto.

Teorema. - *Sia* $f(x, y)$ *una funzione definita nel rettangolo*

$$R: x_0 \leq x \leq x_1, \qquad a \leq y \leq b$$

e ivi continua assieme alla sua derivata parziale prima rispetto a y. *E siano* y_0, y_1 *due numeri compresi fra* a *e* b.

Il problema

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} y'(x) = \lambda f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, *con* $y_0(x)$ *continua in* $x_0 \leq x \leq x_1$, *se esistono due funzioni* $p_1(x)$, $p_2(x)[p_1(x) \leq p_2(x)]$ *non negative e sommabili in* $x_0 \leq x \leq x_1$, *tali da aversi*

$$\text{(2)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx > 0;$$

$$\text{(3)} \qquad p_1(x) \leq f(x, y) \leq p_2(x), \qquad \text{per } (x, y) \text{ in } R;$$

e

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} |y_1 - y_0| \int_{x_0}^{x_1} p_2(x)dx &< (b - y_0) \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx, \\ |y_1 - y_0| \int_{x_0}^{x_1} p_2(x)dx &< (y_0 - a) \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx. \end{aligned}$$

L'esistenza di almeno un valore λ_0 segue dal teorema del n. 1 della mia Nota citata. Evidentemente posto

$$K = \frac{|y_1 - y_0|}{\int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx}$$

risulta

$$|\lambda_0| \leq K.$$

Per provarne l'unicità osserviamo innanzi tutto che se è $|\lambda| \leq K$, l'integrale, $y(x;\lambda)$, dell'equazione

$$y(x;\lambda) = y_0 + \lambda \int_{x_0}^{x} f(t, y(t;\lambda))dt$$

si può definire in tutto l'intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$ in virtù delle (3) e (4), e risulta funzione continua e derivabile di λ, in virtù delle ipotesi fatte sulla $f(x, y)$ (²).

Supporremo sempre nel seguito che il parametro λ varii nell'intervallo chiuso $(-K, K)$.

Premesso ciò, posto

$$u(x;\lambda) = \frac{\partial y(x;\lambda)}{\partial \lambda},$$

è notorio (³) che la funzione $u(x;\lambda)$ è l'integrale dell'equazione

$$\frac{du}{dx} = \lambda f_y'(x, y(x;\lambda))u + f(x, y(x;\lambda)) \tag{5}$$

soddisfacente alla condizione

$$u(x_0;\ \lambda) = 0. \tag{6}$$

Dalle (5) e (6) si deduce

$$u(x;\lambda) = e^{\lambda \int_{x_0}^{x} f_y'(t, y(t;\lambda))dt} \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda \int_{x_0}^{t} f_y'(\sigma, y(\sigma;\lambda))d\sigma} f(t, y(t;\lambda))dt. \tag{7}$$

Ma per la (2) e la (3) e per il teorema della media risulta

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda \int_{x_0}^{t} f_y'(\sigma, y(\sigma;\lambda))d\sigma} \cdot f(t, y(t;\lambda))dt = e^{-\lambda \int_{x_0}^{\xi} f_y'(\sigma, y(\sigma;\lambda))d\sigma} \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t;\lambda))dt \geq$$

$$\geq e^{-\lambda \int_{x_0}^{\xi} f_y'(\sigma, y(\sigma;\lambda))d\sigma} \int_{x_0}^{x_1} p_1(t)dt > 0,$$

con ξ punto conveniente dell'intervallo (x_0, x_1); epperò dalla (7) segue facilmente

$$u(x_1;\lambda) > 0$$

per ogni valore di λ dell'intervallo chiuso $(-K, K)$.

(²) Cfr. G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale.* [Zanichelli, Bologna, Parte prima], pp. 27-32.

(³) Cfr. loc. cit. in (²), pp. 27-30.

La funzione $y(x_1; \lambda)$ è quindi una funzione crescente di λ e di qui segue senz'altro che il valore λ_0 è univocamente determinato, d'onde poi l'unicità della soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$ del problema (1).

Osservazione. - Dalla (7), con un ragionamento perfettamente analogo a quello testè fatto, si deduce, per ogni x fissato e per λ variabile nell'intervallo chiuso $(-K, K)$,

$$u(x; \lambda) \geq 0$$

e quindi $y(x; \lambda)$, per ogni x fissato, è una funzione non decrescente di λ nell'intervallo chiuso $(-K, K)$.