
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUCIO GAMBELLI

Le Concoidi nella risoluzione di problemi sul triangolo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 2
(1947), n.3, p. 239–244.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_239_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_3_239_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Le Concoidi nella risoluzione di problemi sul triangolo.

Nota di LUCIO GAMBELLI (a Volterra).

Sunto. - *Si risolvono alcuni problemi di costruzione di triangoli, dati in grandezza tre elementi, per mezzo delle Concoide di NICOMEDE e delle Lumache di PASCAL.*

a) Studiando i problemi sui triangoli, di cui siano dati in grandezza tre elementi, col metodo dei luoghi geometrici, ho trovato che molti di essi possono risolversi con la Concoide di NICOMEDE o con la Lumaca di PASCAL.

Con questo metodo sono giunto alla risoluzione di un migliaio di problemi distinti, riconducibili a circa centocinquanta costruzioni diverse.

Alcuni di questi problemi sono di secondo grado, moltissimi sono di quarto grado ed hanno quattro soluzioni che possono essere tutte reali oppure due reali e due immaginarie.

b) Premetto ora le seguenti proposizioni:

1^a) Data la Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2}m_a\right)$ rispetto ad M_a con intervallo a_{hb} (punteggiata), il luogo geometrico dei punti simmetrici della Lumaca rispetto ad M_a è la Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2}m_a\right)$ (simmetrico del precedente rispetto ad M_a) rispetto ad M_a con lo stesso intervallo a_{hb} (tratti corti).

2^a) Data la Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2}m_a\right)$ rispetto ad A con intervallo $\frac{1}{2}b_{ha}$ (tratto corto e punto), il luogo geometrico dei punti simmetrici della Lumaca rispetto ad M_a è la Lumaca del cerchio $\left(\bar{O}, \frac{1}{2}m_a\right)$ rispetto ad $\bar{A}$ con lo stesso intervallo $\frac{1}{2}b_{ha}$ (tratto corto e due punti). Vedi anche le due Lumache a tratto lungo e punto ed a tratto lungo e due punti).

3^a) Dato il cerchio $\left(O, \frac{1}{2}m_a\right)$ e con centro in un suo punto A il cerchio (A, c_{hb}) , una qualunque retta uscente da A interseca il primo cerchio in un punto Q ed il secondo in due punti P e P' ; se si riportano su tale retta i due segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q}$ dalla parte di Q si hanno i punti M ed M' : il luogo geometrico di questi punti

(è la Lumaca del cerchio (M_a, m_a) rispetto ad A con intervallo c_{hb} tratti lunghi). (Vedi anche la Lumaca a tratto lungo e tre punti).

c) Darò ora la risoluzione di alcuni interessanti problemi di quarto grado, riservandomi in una prossima nota di indicare la risoluzione di molti altri.

Posti per brevità i seguenti simboli:

$m_a (= \overline{AM}_a)$ mediana relativa al vertice A (opposto al lato a)

$a_{hb} (= \overline{CH}_a)$, $a_{hc} (= \overline{BH}_a)$ proiezioni ortogonali dei lati b e c sul lato a

$b_{ha} (= \overline{CH}_b)$, $b_{he} (= \overline{AH}_b)$ proiezioni ortogonali dei lati a e c sul lato b

$c_{ha} (= \overline{BH}_c)$, $c_{hb} (= \overline{AH}_c)$ proiezioni ortogonali dei lati a e b sul lato c

consideriamo i seguenti problemi:

d) DATI: m_a , a_{hb} , c_{hb} .

Fissato $\overline{AM}_a = m_a$, sia O il punto medio; sia $\overline{M_aA} = m_a$ e sia $\overline{O}$ il punto medio.

Essendo $\overline{CH}_a = a_{hb}$, il luogo geometrico dei vertici C è la Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_a\right)$ rispetto ad M_a con intervallo a_{hb} (punteggiata), e quindi, per la premessa 1^a, il luogo dei vertici B è la Lumaca del cerchio $\left(\overline{O}, \frac{1}{2} m_a\right)$ rispetto ad M_a con intervallo a_{hb} (tratti corti).

Essendo $\overline{BN}_c = \overline{N_cH}_c$ e $\overline{AH}_c = c_{hb}$, il luogo dei vertici B è, per la premessa 3^a, la Lumaca del cerchio (M_a, m_a) rispetto ad A con intervallo c_{hb} (tratti lunghi).

Queste ultime due Lumache si intersecano in due punti B e B' (come intersezioni si hanno anche i punti B_1 e B_1' , che però, essendo i simmetrici di B e B' rispetto alla retta AM_a , non danno luogo a soluzioni distinte dalle due precedenti. Questo fatto si intenderà sottinteso in tutti gli esercizi seguenti).

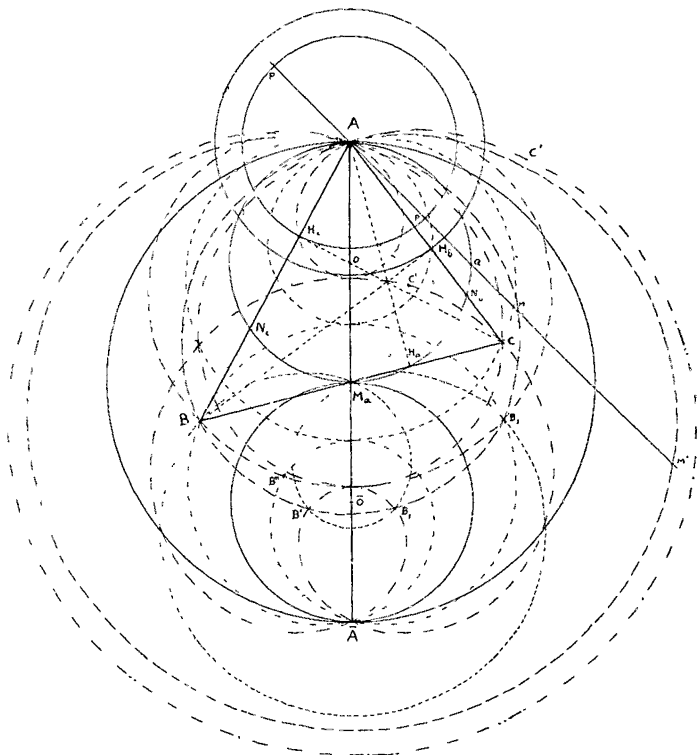
e) DATI: m_a , c_{ha} , b_{ha} .

Essendo $\overline{CN}_b = \overline{N_bH}_b = \frac{1}{2} b_{ha}$, il luogo dei vertici C è la Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_a\right)$ rispetto ad A con intervallo $\frac{1}{2} b_{ha}$ (tratto corto e punto), e quindi, per la premessa 2^a, il luogo dei vertici B è la Lumaca del cerchio $\left(\overline{O}, \frac{1}{2} m_a\right)$ rispetto ad $\overline{A}$ con intervallo $\frac{1}{2} b_{ha}$ (tratto corto e due punti).

Essendo $\overline{BN}_c = \overline{N_cH}_c = \frac{1}{2} c_{ha}$, il luogo dei vertici B è anche la

Lumaca del cerchio $\left(0, \frac{1}{2} m_a\right)$ rispetto ad A con intervallo $\frac{1}{2} c_{ha}$ (tratto lungo e punto).

Queste ultime due Lumache si intersecano in due punti B e B'' . Osserviamo che delle sedici intersezioni delle due Lumache dei



due esercizi precedenti, otto sono nei due punti ciclici (in ciascuno dei quali una Lumaca ha una cuspidè) e quattro sono immaginarie.

f) DATI: m_a, a_{hb}, b_{hc} .

Essendo $\overline{CN_b} = \overline{N_bH_b}$ e $\overline{AH_b} = b_{hc}$, il luogo dei vertici C è, per la premessa 3^a, la Lumaca del cerchio (M_a, m_a) rispetto ad A con intervallo b_{hc} (tratto lungo e tre punti).

Essendo $\overline{CH_a} = a_{hb}$, il luogo dei vertici C è anche la Lumaca del cerchio $\left(0, \frac{1}{2} m_a\right)$ rispetto ad M_a con intervallo a_{hb} (punteggiata).

Queste due Lumache si intersecano in quattro punti C (in figura si hanno solo C e C' , ma si possono modificare i dati in modo da averne quattro).

g) DATI: m_a, a_{hb}, c_{ha} .

Essendo $\overline{BN_c} = \overline{N_cH_c} = \frac{1}{2}c_{ha}$, il luogo dei vertici B è la Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2}m_a\right)$ rispetto ad A con intervallo $\frac{1}{2}c_{ha}$ (tratto lungo e punto), e quindi, per la premessa 2^a, il luogo dei vertici C è la Lumaca del cerchio $\left(\bar{O}, \frac{1}{2}m_a\right)$ rispetto ad $\bar{A}$ con intervallo $\frac{1}{2}c_{ha}$ (tratto lungo e due punti).

Essendo $\overline{CH_a} = a_{hb}$, il luogo dei vertici C è anche la Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2}m_a\right)$ rispetto ad M_a con intervallo a_{hb} (punteggiata).

Queste ultime due Lumache si intersecano in quattro punti C (in figura si hanno solo C e C'' , ma si possono modificare i dati in modo da averne quattro).

h) DATI: m_a, b_{ha}, c_{hb} .

Essendo $\overline{CN_b} = \overline{N_bH_b} = \frac{1}{2}b_{ha}$, il luogo dei vertici C è la Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2}m_a\right)$ rispetto ad A con intervallo $\frac{1}{2}b_{ha}$ (tratto corto e punto), e quindi, per la premessa 2^a, il luogo dei vertici B è la Lumaca del cerchio $\left(\bar{O}, \frac{1}{2}m_a\right)$ rispetto ad $\bar{A}$ con intervallo $\frac{1}{2}b_{ha}$ (tratto corto e due punti).

Essendo $\overline{BN_c} = \overline{N_cH_c}$ e $\overline{AH_c} = c_{hb}$, il luogo dei vertici B è, per la premessa 3^a, la Lumaca del cerchio (M_a, m_a) rispetto ad A con intervallo c_{hb} (tratti lunghi).

Queste ultime due Lumache si intersecano in quattro punti B (in figura si hanno solo B e B' , ma si possono modificare i dati in modo da averne quattro).

i) Se $h_a (= \overline{AH_a})$ è l'altezza relativa al lato $a (= \overline{BC})$ ed $m_b (= \overline{BM_b})$ è la mediana relativa al lato $b (= \overline{AC})$, ecco le soluzioni di altri sei problemi di quarto grado risolubili con una Concoide di NICOMEDE o con una Lumaca di PASCAL (le figure sono facilmente costruibili).

l) DATI: h_a, m_a, b_{ha} .

Fissato $\overline{AH_a} = h_a$ e per H_a la perpendicolare $\overline{BC}$, il cerchio (A, m_a) dà il punto M_a ; sia O il punto medio di AM_a .

La Concoide della retta BC rispetto ad A con intervallo $\frac{1}{2}b_{ha}$ interseca il cerchio $\left(O, \frac{1}{2}m_a\right)$ in quattro punti N_b ; le AN_b danno quattro punti C , i cui simmetrici rispetto ad M_a sono i punti B .

La Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_a \right)$ rispetto ad A con intervallo $\frac{1}{2} b_{ha}$ interseca la retta BC in quattro punti C , i cui simmetrici rispetto ad M_a sono i punti B .

m) DATI: h_a, m_a, b_{hc} .

Trovato come sopra il punto M_a , sia $\overline{M_a A} = m_a$; costruito il cerchio (M_a, m_a) ed intersecato con la retta AC nel punto K_b , osserviamo che è $\overline{A H_b} = \overline{C K_b} = b_{hc}$.

La Concoide della retta BC rispetto ad A con intervallo b_{hc} interseca il cerchio (M_a, m_a) in quattro punti K_b e le rette $A K_b$ danno i quattro punti C .

La Lumaca del cerchio (M_a, m_a) rispetto ad A con intervallo b_{hc} interseca la retta BC in quattro punti C .

n) DATI: h_a, m_b, b_{ha} .

Fissate due rette BC e AB' parallele a distanza h_a ed il punto B sull'una, il cerchio $(B, 2m_b)$ dà sull'altra il punto B' . Il punto medio di $\overline{BB'}$ è il punto M_b . Sia O il punto medio di $\overline{B M_b}$.

La Concoide della retta BC rispetto ad M_b con intervallo b_{ha} interseca il cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_b \right)$ in quattro punti H_b e le $M_b H_b$ danno sulla BC quattro punti C e sulla AB' quattro punti A .

La Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_b \right)$ rispetto ad M_b con intervallo b_{ha} interseca la retta BC in quattro punti C , i cui simmetrici rispetto a M_b sono i punti A .

o) DATI: h_a, m_b, b_{hc} .

La Concoide della retta AB' rispetto ad M_b con intervallo b_{hc} interseca il cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_b \right)$ in quattro punti H_b .

La Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_b \right)$ rispetto ad M_b con intervallo b_{hc} interseca la retta AB' in quattro punti A .

p) DATI: h_a, m_b, c_{ha} .

Trovato come sopra il punto M_b , costruito il cerchio (M_b, m_b) ed intersecato con la retta AB nel punto K_c , osserviamo che è $\overline{B H_c} = \overline{A K_c} = c_{ha}$.

La Concoide della retta AB' rispetto a B con intervallo c_{ha} interseca il cerchio (M_b, m_b) in quattro punti K_c e le rette $B K_c$ danno i quattro punti A .

La Lumaca del cerchio (M_b, m_b) rispetto a B con intervallo c_{ha} interseca la retta AB' in quattro punti A .

q) DATI: h_a, m_b, c_{hb} .

Osserviamo che se M_bN è la perpendicolare da M_b alla AB , N è il punto medio di $\overline{AH_c}$ e che quindi è $\overline{AN} = \overline{NH_c} = \frac{1}{2} c_{hb}$.

La Concoide della retta AB' rispetto a B con intervallo $\frac{1}{2} c_{hb}$ interseca il cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_b\right)$ in quattro punti N e le BN danno i quattro punti A .

La Lumaca del cerchio $\left(O, \frac{1}{2} m_b\right)$ rispetto a B con intervallo $\frac{1}{2} c_{hb}$ interseca la retta AB' in quattro punti A .

Osserviamo che delle otto intersezioni di una Concoide di NRICOMEDE con un cerchio, due sono nei due punti ciclici per i quali passano semplicemente sia le Concoide che i cerchi e due sono nel punto doppio della Concoide che non soddisfa al problema.