Bollettino Unione Matematica Italiana

Gabriella Lovrecich

Sulle singolarità della curva Hessiana

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 129–132.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_129_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Sulle singolarità della curva Hessiana.

Nota di GABRIELLA LOVRECICH (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente perchè la Hessiana* H *di una curva piana algebrica* F *abbia un punto triplo in un punto semplice* 0 *di* F.

Si dà anche una condizione sufficiente perché 0 *sia un punto quadruplo di* H.

1. Data una curva piana algebrica F di ordine $n(n > 2)$, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la Hessiana H di F abbia in un punto semplice 0 di F la multiplicità $\tau\,[0 \leq \tau \leq 3(n-2)]$ sono state determinate dal VILLA, il quale ha anzi risolto il problema in due modi diversi (1).

Per $\tau = 2$ il DEL PEZZO (2) aveva osservato che, affinchè il punto 0 fosse doppio per H era necessario che fosse un flesso di 2ª specie (3).

Il VILLA, per $\tau = 2$ diede forma esplicita al suo teorema generale (4).

La CORRADI (5) diede alla condizione del VILLA la forma seguente:

Affinché un punto 0, *semplice per una curva piana algebrica* F, *sia doppio per la Hessiana* H *di* F, *occorre e basta che* 0 *sia un*

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

Ringrazio il prof. VILLA per i suggerimenti datimi nel corso del presente lavoro.

(1) VILLA, *Sulla multiplicità e sulle tangenti della curva Hessiana*, « Rendiconti dell'Istituto Lombardo ». Vol. 65, p. 625, 1932.

Il VILLA ha anzi risolto un problema assai più generale Si veda: VILLA, *Sulle singolarità della Jacobiana di* r + 1 *ipersuperficie dello spazio ad* r *dimensioni*, « Memorie dell'Istituto Lombardo ». Vol. 22, p. 79, 1931.

(2) DEL PEZZO: *Sulla curva Hessiana*, « Rendiconti dell'Accademia di Napoli ». Vol. 22, p. 203, 1883.

(3) Punto d'ondulazione secondo la terminologia di DEL PEZZO, cioè punto in cui la tangente ha incontro quadripunto con la curva.

(4) VILLA, *Sulle singolarità della forma Hessiana*, « Rendiconti dell'Istituto Lombardo ». Serie 2ª, vol. 65, p. 129, 1932; VILLA, il primo dei lavori cit., p. 636.

(5) CORRADI, *Sulle singolarità della curva Hessiana*. Questo « Bollettino », Serie 2ª, vol. 3, p. 215, 1941.

flesso di 2^a *specie e che la conica* γ *in cui si decompone la cubica polare di* 0 *rispetto ad* F *sia tangente alla tangente* t *in* 0 *ad* F [6].

Nella presente Nota esplicito il teorema generale del VILLA per $\tau = 3$ (n. 2) e dò inoltre una condizione sufficiente per $\tau = 4$ (n. 3).

2. - Sussiste il teorema:

Affinchè un punto 0, *semplice per una curva piana algebrica* F, *sia triplo per la Hessiana* H *di* F, *occorre e basta che* 0 *sia un flesso di* 3^a *specie per* F, *e che la cubica* γ *in cui si decompone la quartica polare di* 0 *rispetto ad* F, *abbia nel punto d'intersezione della polare armonica con la tangente inflessionale un punto doppio.*

Per la dimostrazione possiamo supporre (n. 1) che 0 sia un flesso di 2^a specie (almeno).

Allora la conica polare di 0 rispetto ad F è degenere e si spezza nella tangente t in 0 ad F e in un'altra retta non passante per 0 (la polare armonica).

In un sistema proiettivo di riferimento x_1, x_2, x_3, assumiamo 0 come vertice $(0, 0, 1)$, la tangente t in 0 ad F come retta $x_2 = 0$, e la polare armonica come retta $x_3 = 0$.

Allora l'equazione della curva F si può porre sotto la forma:

$$x_2x_3^{n-1} + (a_{21}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_2^2)x_2x_3^{n-3} + (a_{40}x_1^4 + a_{31}x_1^3x_2 + \\ + a_{22}x_1^2x_2^2 + a_{13}x_1x_2^3 + a_{04}x_2^4)x_3^{n-4} + \ldots = 0,$$

le a essendo costanti.

La Hessiana H di F ha l'equazione:

$$2(n-1)^2a_{21}x_2x_3^{3n-7} + (n-1)^2(12a_{40}x_1^2 + 6a_{31}x_1x_2 + \\ + 2a_{22}x_2^2)x_3^{3n-8} + \ldots = 0.$$

Affinchè H abbia in 0 punto triplo è necessario e sufficiente che sia:

$$(1) \qquad a_{21} = a_{40} = a_{31} = a_{22} = 0.$$

Notiamo subito che la condizione $a_{40} = 0$ impone che 0 sia un flesso di 3^a specie per F.

D'altra parte la quartica polare di 0 rispetto ad F è:

$$\binom{n-1}{3}x_2x_3^3 + (n-3)(a_{21}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_2^2)x_2x_3 + (a_{40}x_1^4 + \\ + a_{31}x_1^3x_2 + a_{22}x_1^2x_2^2 + a_{13}x_1x_2^3 + a_{04}x_2^4) = 0$$

e quando $a_{40} = 0$ si spezza nella tangente inflessionale $x_2 = 0$ e

[6] Per $n = 4$, si veda VAONA, *Sui flessi di specie superiore delle curve piane*, questo stesso fascicolo.

nella cubica γ di equazione:

$$a_{31}x_1^3 + [(n-3)a_{21}x_3 + a_{22}x_2]x_1^2 + [(n-3)a_{12}x_3 + ax_3 + \\ + a_{13}x_2]x_1x_2 + \binom{n-1}{3}x_3^3 + a_{04}x_2^3 = 0 .$$

Affinchè il punto $(1, 0, 0)$ sia doppio per γ deve essere

$$a_{31} = a_{21} = a_{22} = 0$$

e si ritrovano così le condizioni (1).

OSSERVAZIONE: Dovendo essere 0 un flesso di 3ª specie per F, si dovrà avere $n \geq 5$ affinchè F non sia degenere (7).

3. - Si ha:

Un punto 0, semplice per una curva piana, algebrica F, *è quadruplo per la Hessiana* H *di* F, *quando oltre alle condizioni che si debbono verificare perchè 0 sia triplo per la Hessiana* H, *0 è un flesso di 4ª specie per* F (8), *e la quartica in cui si decompone la quintica polare di 0 rispetto ad* F, *ha nel punto d'intersezione della polare armonica con la tangente inflessionale un punto triplo, con due delle tre tangenti coincidenti con la tangente inflessionale* (9).

Infatti l'equazione di F è:

$$x_2x_3^{n-1} + (a_{12}x_1 + a_{03}x_2)x_2^2x_3^{n-3} + (a_{13}x_1 + a_{04}x_2)x_2^3x_3^{n-4} + (a_{50}x_1^5 + \\ + a_{41}x_1^4x_2 + a_{32}x_1^3x_2^2 + a_{23}x_1^2x_2^3 + a_{14}x_1x_2^4 + a_{05}x_2^5)x_3^{n-5} + \ldots = 0.$$

L'equazione della Hessiana è:

$$(n-1)\{(n-1)a_{51}x_1^3 + (n-1)\cdot 12a_{41}x_1^2x_2 + (n-1)\cdot 6a_{32}x_1x_2^2 + \\ + 2[(n-1)a_{23} + 2a^2_{12}]x_2^3\}\, x_3^{3n-9} + \ldots = 0.$$

Perchè la Hessiana abbia in 0 un punto quadruplo deve essere:

$$a_{50} = a_{41} = a_{32} = (n-1)a_{23} + 2a^2_{12} = 0.$$

La condizione $a_{50} = 0$ impone che 0 sia un flesso di 4ª specie per F.

(7) La coppia delle tangenti a γ nel punto doppio $(1, 0, 0)$ è

$$x_2[(n-3)a_{12}x_3 + a_{13}x_2] = 0.$$

Per quanto segue conviene osservare che $(1, 0, 0)$ è una cuspide quando (e solo quando) $a_{12} = 0$.

(8) Questa condizione è anche necessaria.

(9) Si noti che la condizione: che due delle tre tangenti alla quartica suddetta coincidano con la tangente inflessionale, equivale alla condizione che la cubica in cui si spezza la quartica polare di 0 rispetto ad F abbia nel punto d'intersezione della polare armonica con la tangente inflessionale una cuspide, la tangente cuspidale essendo la tangente inflessionale.

D' altra parte la quintica polare di 0 rispetto ad F è:

$$\binom{n-1}{4}x_2x_3^4+\binom{n-3}{2}(a_{12}x_1+a_{03}x_2)x_2^2x_3^2+(n-4)(a_{13}x_1+$$
$$+a_{04}x_2)x_2^3x_3+(a_{50}x_1^5+a_{41}x_1^4x_2+a_{32}x_1^3x_2^2+a_{23}x_1^2x_2^3+$$
$$+a_{14}x_1x_2^4+a_{05}x_2^5)=0.$$

e quando $a_{50}=0$ si spezza nella tangente inflessionale $x_2=0$ e nella quartica

$$\binom{n-1}{4}x_3^4+\binom{n-3}{2}(a_{12}x_1+a_{03}x_2)x_2x_3^2+(n-4)(a_{13}x_1+$$
$$+a_{04}x_2)x_2^2x_3+(a_{41}x_1^4+a_{32}x_1^3x_2+a_{23}x_1^2x_2^2+a_{14}x_1x_2^3+a_{05}x_2^4)=0.$$

Se il punto $(1, 0, 0)$ è triplo per la quartica deve essere:

$$a_{41}=a_{32}=a_{23}=0.$$

La terna delle tangenti in tale punto alla quartica è

$$x_2\left[\binom{n-3}{2}a_{12}x_3^2+(n-4)a_{13}x_2x_3+a_{14}x_2^2\right]=0.$$

Affinchè due di queste rette coincidano con la $x_2=0$ deve essere $a_{12}=0$ e quindi anche la condizione $(n-1)a_{23}+2a^2_{12}=0$ è verificata.