Bollettino
Unione Matematica Italiana

Paolo Cattaneo

# Generalizzazione della successione di Fibonacci

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **2** (1947), n.1, p. 52–56.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_52_0>

# Generalizzazione della successione di Fibonacci.

Nota di PAOLO CATTANEO (a Padova).

**Sunto.** - *Si studiano le successioni congrue con quelle dei numeri interi e tali che ogni elemento è la somma dei due precedenti*

**1.** Consideriamo la successione

$$\ldots, c_{-4}, c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, \ldots \tag{1}$$

nella quale ogni elemento è la somma dei due precedenti, nelle quali cioè, qualunque sia l'indice $h$, vale la relazione

$$c_h = c_{h-1} + c_{h-2} \tag{2}$$

**2.** Si ha la *successione di Fibonacci* (¹) quando $c_1 = 1, c_2 = 2$ e si considerano soltanto gli elementi con indice positivo.

Noi però chiameremo, più semplicemente, di FIBONACCI l'intera successione (1) (col legame (2) e quando $c_1 = 1, c_2 = 2$).

Gli elementi di tale successione invece, che con $c_h$, li indicheremo con $f_h$; essa è

$$\ldots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, f_0 = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots.$$

È noto (²) che, se $r < 1$, vale la formula

$$f_r = \sum_{0}^{E(r:2)} {}_i \binom{r-i}{i}; \tag{3}$$

inoltre, col metodo d'induzione completa, si dimostra ovviamente che

$$f_{-r} = (-1)^r . f_{r-2} \tag{3'}$$

e che

$$F_r = \sum_{1}^{r} {}_i f_i = f_{r+2} - 2, \tag{4}$$ $$\sum_{3}^{r} {}_i f_{-i} = (-1)^r . f_{r-3} \tag{4'}$$

(¹) La presente Nota, oltre ad esporre molti risultati nuovi, serve di *Rettifica* dell'altra «Sui numeri di FIBONACCI» (aprile giugno 1943 del *Bollettino dell'U.M.I.)*

(²) v. a pag. 96 la parte II. del vol. 1°. dell'*Enciclopedia di Matematiche Elementari* (Hoepli, 1932).

**3.** Nelle successioni più generali considerate nel N°. 1, qualunque sia $h$, vale la formula ([3])

$$c_h = f_{h-3}\, c_1 + f_{h-2}\, c_2 , \tag{5}$$

ch'è pure dimostrabile facilmente.

Dalla (5) si ha poi

$$\sum_1^r {}_i\, c_i = (f_{-2} + f_{-1} + f_0 + F_{r-3}).\, c_1 + (f_{-1} + f_0 + F_{r-2}).\, c_2 = \tag{6}$$
$$= f_{r-1}.\, c_1 + (f_r - 1).\, c_2$$

**4.** Se gli elementi della (1) sono legati dalla relazione (2) e se uno d'essi è la misura della sezione auréa del segmento misurato dall'elemento successivo, lo stesso accade per due elementi consecutivi qualsiansi.

Infatti, se $h + k = s$, quando
$q\,(h)\, eq.\, r\,(k; k - h)$, si ha $q\,(k)\, eq.\, r\,(s; s - k)$; e viceversa.

Chiameremo *aurea* una tale *successione* e porremo allora $c_h = a_k$.

In tal caso abbiamo

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1).\, a_1,$$

$$a_r = \frac{1}{2^{r-1}} \cdot (\sqrt{5} + 1)^{r-1} \cdot a_1, \tag{7}$$

$$a_0 = (2 \cdot a_1) : (\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \cdot a_1,$$

$$a_{-r} = \frac{1}{2^{r+1}} \cdot (\sqrt{5} - 1)^{r+1} \cdot a_1. \tag{7'}$$

Dalle (5) e (3') si ha tosto

$$a_r = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot f_{r-3} + f_{r-2} + f_{r-2} \cdot \sqrt{5}) \cdot a_1 \tag{8}$$

ed

$$a_{-r} = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot f_{-(r+3)} + f_{-(r+2)} \cdot f_{-(r+2)} \cdot \sqrt{5}) \cdot a_1 = \tag{8'}$$
$$= (-1)^{r+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot f_{r+1} - f_r - f_r \cdot \sqrt{5}) \cdot a_1.$$

**5.** Essendo

$$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) > 1 \quad \text{ed} \quad \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) < 1,$$

([3]) Se la (1) è una progressione aritmetica, geometrica o armonica, valgono, rispettivamente, le formule:
$c_r = (r-1).\, c_2 - (r-2).\, c_1$; $c_r = c_2^{r-1} : c_1^{r-2}$; $c_r = (c_1\, c_2) : [(r-1)c_1 - (r-2)c_2]$.

si ha, com'era prevedibile,

$$\lim_{r=\infty} a_r = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{r=\infty} a_{-r} = 0.$$

Si osservi inoltre che

$$(9) \qquad \Sigma_{r\,0}^{\infty} a_r = \Sigma_{h\,1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^h}{2^h} \cdot a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a_1 : \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot a_1 = a_2$$

e che

$$(10) \qquad \Sigma_{r\,2}^{\infty} \frac{1}{a_r} = \Sigma_{h\,1}^{\infty} \frac{2^h}{(\sqrt{5}+1)^h \cdot a_1} = \frac{2}{(\sqrt{5}+1) \cdot a_1} : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}+1}\right) =$$
$$= \frac{2}{(\sqrt{5}-1) \cdot a_1} = \frac{1}{a_0}.$$

**6.** Qualunque sia la successione (1) con gli elementi positivi e legati dalla (2), la serie

$$\Sigma_{r\,1}^{\infty} \frac{1}{c_r} = \Sigma_{r\,1}^{i+1} \frac{1}{c_r} + \Sigma_{h\,1}^{\infty} \left(\frac{1}{c_{i+2h}} + \frac{1}{c_{i+2h+1}}\right)$$

è convergente.

Infatti, essendo

$$c_{i+2} = c_2 + c_{i+1} > 2 . c_i$$

e

$$c_{i+3} = c_{i+1} + c_{i+2} > 2 . c_{i+1} ;$$

quindi

$$c_{i+2h} > 2^h . c_i \quad \text{e} \quad c_{i+2h+1} > 2^h . c_{i+1}$$

si ha

$$\frac{1}{c_{i+2h}} + \frac{1}{c_{i+2h+1}} < \frac{1}{2^h} \cdot \left(\frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_{i+1}}\right);$$

donde si vede che la serie considerata è convergente, con la somma compresa fra

$$\Sigma_{r\,1}^{i+1} \frac{1}{c_r} \quad \text{e} \quad \Sigma_{r\,1}^{i-1} \frac{1}{c_r} + 2 \cdot \left(\frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_{i+1}}\right).$$

Applicando tale risultato alla successione di Fibonacci, si ottiene per somma 2,3....

Osserviamo infine che, posto

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots,$$

si trova ovviamente,

$$F(x) = \frac{c_0 + (c_1 - c_0) \cdot x}{1 - x - x^2}.$$

**7.** Dalla (7), indicando con $A$ la parte razionale della potenza $(\sqrt{5}+1)^{r-1}$ e con $B \cdot \sqrt{5}$ la parte irrazionale, si ha

$$a_r = \frac{A + B \cdot \sqrt{5}}{2^{r-1}} \cdot a_1 .$$

Confrontando tale formula con la (8), si ha

$$2 \cdot f_{r-3} + f_{r-2} + f_{r-2} \cdot \sqrt{5} = (A + B \cdot \sqrt{5}) : 2^{r-2};$$

quindi

$$f_{r-2} = B : 2^{r-2} = \left[ r - 1 + 5 \cdot \binom{r-1}{3} + 25 \cdot \binom{r-1}{5} + \ldots \right] : 2^{r-2}$$

$$f_r = \left[ r + 1 + 5 \cdot \binom{r+1}{3} + 25 \cdot \binom{r+1}{5} + \ldots \right] : 2^r,$$

(11) $$f_r = \left[ \sum_{0}^{E(r:2)}{}_i \, 5^i \cdot \binom{r+1}{2i+1} \right] : 2^r$$

Ricordando la (3), si ha tosto di quì

(12) $$2^r \cdot \sum_{0}^{E(r:2)}{}_i \binom{r-i}{i} = \sum_{0}^{E(r:2)}{}_i \, 5^i \cdot \binom{r+1}{2i+1} .$$

**8.** Com'è noto, lo sviluppo di $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ in frazione continua è $(1; 1, 1, 1, 1, \ldots)$ e le sue ridotte sono

$$f_1 / f_0 , \quad f_2 / f_1 , \quad f_3 / f_2 , \ldots , \quad f_r / f_{r-1} , \ldots .$$

Tale risultato è evidente per le due prime ridotte ed ammesso vero fino alla ridotta erresima, essa lo è anche per la ridotta successiva (quindi sempre). Infatti la legge di formazione delle ridotte e la (2) danno

$$\frac{N_{r+1}}{D_{r+1}} = \frac{N_r \cdot q_{r+1} + N_{r-1}}{D_r \cdot q_{r+1} + D_{r-1}} = \frac{f_r \cdot 1 + f_{r-1}}{f_{r-1} \cdot 1 + f_{r-2}} = \frac{f_{r+1}}{f_r} .$$

In modo analogo si dimostra che, più in generale, data la frazione continua $(h; k, 1, 1, 1, \ldots)$, con $h$ e $k$ numeri naturali qualsiansi, se consideriamo le due successioni

$$p_1 = h, p_2 = hk + 1, p_3, p_4, p_5, \ldots ,$$
$$q_1 = 1, q_2 = k \qquad , q_3, q_4, q_5, \ldots ,$$

del tipo definito dal N.° 1, la ridotta erresima è $p_r / q_r$.

La frazione continua $(0; h, k, 1, 1, 1, \ldots) = 1 : (h; k, 1, 1, 1, \ldots)$ ha invece per ridotta erresima $q_{r-1} / p_{r-1}$.

**9.** Le differenze prime degli elementi d'una successione di FIBONACCI formano esse pure una successione di FIBONACCI:

$$\ldots, \; -21, \; 13, \; -8, \; 5, \; -3, \; 2, \; -1, \; 1, \; 0, \; 1, \; 1, \; 2, \; 3, \; 5, \; 8, \ldots$$
$$\ldots, \; 34, \; -21, \; 13, \; -8, \; 5, \; -3, \; 2, \; -1, \; 1, \; 0, \; 1, \; 1, \; 2, \; 3, \ldots$$

e lo stesso può affermarsi delle successioni formate dalle differenze di qualsiasi ordine.

In generale una successione (1) è riprodotta da tutte le successioni formate con le differenze se i suoi elementi sono legati da una relazione $c_{h+1} = c_h + c_{h+t}$, con $h$ variabile e $t$ costante.

Infatti, considerando successivamente, da sinistra a destra, tutte le differenze fra gli elementi della successione (1), si ha la successione $c_{h+t} (h = -\infty, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty)$, ossia la (1) stessa.

Nei casi studiati finora si ha $t = -1$.

Se $t = 0$, si ha $c_{h+1} = 2 . c_h$ e si hanno le progressioni geometriche di quoziente 2.

Se $t = 1$, si ha il caso banale di tutti gli elementi nulli.

Se $t > 1$, possono prendersi ad arbitrio i $t$ elementi $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_t$. Gli elementi che seguono sono dati dalle relazioni $c_2 = c_1 + c_{t+1}$, $c_3 = c_2 + c_{t+2}$, $c_4 = c_3 + c_{t+3}, \ldots$; gli elementi precedenti sono dati dalle relazioni $c_1 = c_0 + c_t$, $c_0 = c_{-1} + c_{t-1}$, $c_{-1} = c_{-2} + c_{t-2}, \ldots$.

Se $t$ è un numero negativo $-u$, si possono prendere ad arbitrio gli $u+1$ elementi $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_u$. Gli elementi che precedono $c_0$ sono dati dalle relazioni $c_u = c_{u-1} + c_{-1}$, $c_{u-1} = c_{u-2} + c_{-2}$, $c_{u-2} = c_{u-3} + c_{-3}, \ldots$; quelli che vengono dopo $c_u$ sono dati dalle relazioni $c_{u+1} = c_u + c_0$, $c_{u+2} = c_{u+1} + c_1$, $c_{u+3} = c_{u+2} + c_2, \ldots$.