Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Conte

Su una particolare equazione integrale in n variabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.1, p. 25–28.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_1_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Su una particolare equazione integrale in n variabili.

Nota di LUIGI CONTE (a Torino).

Sunto. - *Applicando il metodo generale di Volterra si ottiene in maniera semplice la soluzione di un'equazione integrale in* n *variabili, un caso particolare della quale è stato considerato in questo Boll. dalla* LODI.

1. In un precedente lavoro [1] ho stabilito fra l'altro che «la risoluzione dell'equazione integrale

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x e^{mf_1(x) + nf_2(y)}\varphi(y)dy \qquad (m,\ n \text{ costanti}) \tag{1}$$

colla sostituzione

$$z = \varphi(x) - f(x) \qquad [z(0) = 0],$$

è riconducibile a quella dell'equazione differenziale

$$z' - [mf'_1(x) + e^{mf_1(x)+nf_2(x)}] - e^{mf_1(x)+nf_2(x)}f(x) = 0\,; \tag{2}$$

e che inoltre nel caso in cui $f_1(u) = f_2(u) = u$, i nuclei iterati della (1) sono

$$K_r(x, y) = \begin{cases} K_1(x, y) + \dfrac{(e^{\sigma x} - e^{\sigma y})^{r-1}}{(r-1)!\,\sigma^{r-1}}, & \text{se } \sigma = m + n \neq 0 \\ K_1(x, y)\dfrac{(x-y)^{r-1}}{(r-1)!}, & \text{se } \sigma = m + n = 0, \end{cases} \tag{3}$$

mentre nel caso in cui $f_1(u) = f_2(u) = \log a(u)$, i nuclei iterati della (1) sono

$$K_r(x, y) = \begin{cases} K_1(x, y)\dfrac{(x-y)^{r-1}}{(r-1)!}, & \text{se } \sigma = m + n = 0 \\ K_1(x, y)\dfrac{\{F(x) - F(y)\}^{r-1}}{(r-1)!}, & \text{se } \sigma \neq 0\ [F'(u) = a^\sigma(u)]». \end{cases} \tag{4}$$

2. Generalizzando la (1) mi propongo di risolvere l'equazione

$$\varphi(x,\ y) = f(x,\ y) + \int_0^x dx_1 \int_0^y K(x,\ y,\ x_1,\ y_1)\varphi(x_1,\ y_1)dy_1 \tag{5}$$

[1] L. CONTE, *Sopra una classe di equazioni integrali*, in » Boll. Un. Mat. It. », n. 5, 1932, pag. 283-286.

col nucleo

$$(6)\qquad \mathrm{K}_1(x,\ y,\ x_1,\ y_1) = e^{m_1\varphi_1(x)+m_2\varphi_2(y)+m_3\varphi_3(x_1)+m_4\varphi_4(y_1)}, \qquad [m_i \text{ costanti}].$$

Un caso particolare della (5), e precisamente quello in cui $m_1 = -m_3 = \alpha$, $m_2 = -m_4 = \beta$, $\varphi_i(u) = u$ è stato trattato dalla dott.ssa LODI [1]: la semplicità ed espressività del risultato da questa ottenuto dipendendo sopratutto dalla scindibilità per prodotto del nucleo [2], farò vedere che, applicando il metodo generale di VOLTERRA, si ottiene rapidamente la soluzione del pari semplice dell'equazione (5).

Posto

$$\frac{d\mathfrak{M}(u)}{du} = e^{m_1\varphi_1(u)+m_3\varphi_3(u)}, \qquad \frac{d\mathfrak{N}(u)}{du} = e^{m_2\varphi_2(u)+m_4\varphi_4(u)},$$

dico che vale per i nuclei iterati della (5) la seguente relazione:

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{K}_i(x,\ y,\ x_1,\ y_1)}{\mathrm{K}_1(x,\ y,\ x_1,\ y_1)} = \frac{\{\mathfrak{M}(x) - \mathfrak{M}(x_1)\}^{i-1}}{(i-1)!} \cdot \frac{\{\mathfrak{N}(y) - \mathfrak{N}(y_1)\}^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Dimostriamo la (7) per $i = 2$.

$$\frac{\mathrm{K}_2(x,\ y,\ x_1,\ y_1)}{\mathrm{K}_1(x,\ y,\ x_1,\ y_1)} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{K}_1(x,\ y,\ x_1,\ y_1)}\int_{x_1}^{x} dz_1 \int_{y_1}^{y} \mathrm{K}_1(x,\ y,\ z_1,\ z_2)\mathrm{K}_1(z_1,\ z_2,\ x_1,\ y_1)dz_2 =$$

$$= \int_{x_1}^{x} \frac{d\mathfrak{M}(z_1)}{dz_1}\, dz_1 \int_{y_1}^{y} \frac{d\mathfrak{N}(z_2)}{dz_2}\, dz_2 = \{\mathfrak{M}(x) - \mathfrak{M}(x_1)\} \cdot \{\mathfrak{N}(y) - \mathfrak{N}(y_1)\}.$$

Sicchè la (7) è vera per $i = 2$; dimostriamola per induzione da i ad $i + 1$.

(1) M. LODI, *Risoluzione di una particolare equazione di Volterra in due variabili*, in « Boll. Un. Mat. It. », n. 5, 1941, pag. 391-393.

(2) In un lavoro pubblicato nel « Giornale di Mat. Finanziaria », n. 1-2, 1944, pag. 13-23, estendendo un risultato conseguito dal Prof. F. INSOLERA, ho dimostrato che la condizione caratteristica perchè sia

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \prod_1^n {}_i f_i(x_i)$$

è che per qualunque t, si abbia

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \frac{f(x_1,\ t,\ \ldots,\ t) \cdot f(t,\ x_2,\ \ldots,\ t) \ldots f(t,\ \ldots,\ t,\ x_n)}{f^{n-1}(t,\ t,\ \ldots,\ t)},$$

con $f(t,\ t,\ \ldots,\ t) \neq 0$.

Infatti

$$\frac{K_{i+1}(x, y, x_1, y_1)}{K_1(x, y, x_1, y_1)} =$$

$$= \frac{1}{K_1(x, y, x_1, y_1)} \int_{x_1}^{x} dz_1 \int_{y_1}^{y} K_1(x, y, z_1, z_2) K_i(z_1, z_2, x_1, y_1) dz_2 =$$

$$= \int_{x_1}^{x} \frac{\{\mathfrak{M}(z_1) - \mathfrak{M}(x_1)\}^{i-1}}{(i-1)!} \frac{d\mathfrak{M}(z_1)}{dz_1} dz_1 \int_{y_1}^{y} \frac{\{\mathfrak{N}(z_2) - \mathfrak{N}(y_1)\}^{i-1}}{(i-1)!} \frac{d\mathfrak{N}(z_2)}{dz_2} dz_2 =$$

$$= \frac{\{\mathfrak{M}(x) - \mathfrak{M}(x_1)\}^i}{i!} \cdot \frac{\{\mathfrak{N}(y) - \mathfrak{N}(y_1)\}^i}{i!} .$$

Ne segue che la soluzione della (5) è:

$$(8) \quad \varphi(x, y) = f(x, y) + \int_0^x dx_1 \int_0^y \sum_1^{\infty} {}_i K_i(x, y, x_1, y_1) f(x_1, y_1) dy_1 = f(x, y) +$$

$$+ \int_0^x dx_1 \int_0^y K_1(x, y, x_1, y_1) \sum_0^{\infty} {}_i \frac{\{\mathfrak{M}(x) - \mathfrak{M}(x_1)\}^i \{\mathfrak{N}(y) - \mathfrak{N}(y_1)\}^i}{(i!)^2} f(x_1, y_1) dy_1 =$$

$$= f(x, y) +$$

$$+ \int_0^x dx_1 \int_0^y K_1(x, y, x_1, y_1) J_0\left(\sqrt{-2\{\mathfrak{M}(x) - \mathfrak{M}(x_1)\}\{\mathfrak{N}(y) - \mathfrak{N}(y_1)\}}\right) f(x_1, y_1) dy_1 ,$$

ove $J_0(\alpha)$ è la funzione di BESSEL d'ordine zero nella variabile (α) (1).

In particolare, se supponiamo nella (5)

$$m_1 \varphi_1(u) + m_3 \varphi_3(u) = m_2 \varphi_2(u) + m_4 \varphi_4(u) = 0 ,$$

si ha $\mathfrak{M}(u) = \mathfrak{N}(u) = u$, e l'equazione integrale

$$(5') \quad \varphi(x, y) = f(x, y) + \int_0^x dx_1 \int_0^y e^{m_1[\varphi_1(x) - \varphi_1(x_1)] + m_2[\varphi_2(y) - \varphi_2(y_1)]} \varphi(x_1, y_1) dy_1$$

ammette la soluzione

$$(8') \qquad \varphi(x, y) = f(x, y) +$$

$$+ \int_0^x dx_1 \int_0^y e^{m_1[\varphi_1(x) - \varphi_1(x_1)] + m_2[\varphi_2(y) - \varphi_2(y_1)]} J_0\left(\sqrt{-2(x - x_1)(y - y_1)}\right) f(x_1, y_1) dy_1 ,$$

risultato che per $m_1 = \alpha$, $m_2 = \beta$, $\varphi_1(u) = u$, coincide con quello cui è pervenuto la LODI.

(1) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Napoli, Rondinella, 1940, pag. 486.

Con procedimento e posizioni analoghe si trova pure che: l'equazione integrale in n variabili

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \tag{9}$$

$$+ \int_0^{x_1} dz_1 \int_0^{x_2} dz_2 \ldots \int_0^{x_n} e^{\sum_1^n i[m_i\varphi_i(x_i) + n_i\psi_i(z_i)]} \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n) dz_n$$

con m_i, n_i costanti ammette la soluzione

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \int_0^{x_1} dz_1 \int_0^{x_2} dz_2 \ldots \tag{10}$$

$$\ldots \int^{x_n} e^{\sum_1^n i[m_i\varphi_i(x_i) + n_i\psi_i(z_i)]} \sum_0^\infty {}_i \frac{\{\mathfrak{M}_1(x_1) - \mathfrak{M}_1(z_1)\}^i \ldots \{\mathfrak{M}_n(x_n - \mathfrak{M}_n(z_n)\}^i}{(i!)^n} f(z_1, z_2, \ldots z_n) dz_n .$$