

Teoria dei gruppi. — *Gruppi finiti con molti sottogruppi seminormali.* Nota(*) del
Socio GUIDO ZAPPA.

ABSTRACT. — *Finite groups with many seminormal subgroups.* A subgroup S of a group G is said to be seminormal if commutes with every subgroup of a convenient supplement of S in G (X. Su [2]). In our paper all finite groups in which every Sylow subgroup is seminormal are characterized. It is also proved that if in a finite p -group P (p an odd prime) all cyclic subgroups are seminormal, then every two subgroups of P commute.

KEY WORDS: Seminormal subgroups; Permutable subgroups; Semidirect product.

RIASSUNTO. — Un sottogruppo S di un gruppo G è chiamato seminormale se è permutabile con ogni sottogruppo di un conveniente supplemento di S in G (X. Su [2]). Nel nostro lavoro vengono caratterizzati tutti i gruppi finiti in cui ogni sottogruppo di Sylow è seminormale. Viene anche dimostrato che ogni p -gruppo finito (p primo dispari) in cui ogni sottogruppo di Sylow è seminormale gode della proprietà che tutti i suoi sottogruppi sono a due a due permutabili.

Recentemente X. Su [2] ha introdotto il concetto di sottogruppo seminormale di un gruppo. Con tale denominazione si intende un sottogruppo che sia permutabile con ogni sottogruppo di un conveniente supplemento. Su ha fornito condizioni sufficienti affinché dall'esistenza di certi sottogruppi seminormali si possa dedurre la supersolubilità di un gruppo finito. Successivamente P. Wang [3] ha dato condizioni sufficienti dello stesso tipo atte ad assicurare la nilpotenza di un gruppo finito.

Nella presente *Nota* si caratterizzano i gruppi finiti in cui ogni sottogruppo di Sylow è seminormale. Essi sono prodotto diretto di sottogruppi di Hall ciascuno dei quali o è un p -gruppo o è il prodotto semidiretto di un sottogruppo abeliano di Hall per un p -gruppo che induce in esso un gruppo non banale di automorfismi potenza.

Vengono anche caratterizzati i p -gruppi finiti (p primo dispari) in cui ogni sottogruppo ciclico è seminormale. Essi coincidono coi p -gruppi (p dispari) in cui due qualunque sottogruppi sono permutabili. Il risultato non è valido per i 2-gruppi, poiché il gruppo diedrale d'ordine 8 ne è un controesempio. Mi propongo, in una prossima *Nota*, di caratterizzare i 2-gruppi finiti in cui ogni sottogruppo ciclico è seminormale.

Non ho potuto leggere il lavoro originale (in cinese) di X. Su, e mi sono dovuto limitare al sunto in inglese dovuto allo stesso autore e riportato da «MR» e «Zentralblatt», e a quanto riferito nel lavoro di P. Wang. Chiedo pertanto venia a X. Su nell'ipotesi che qualche mia proposizione figuri già nel suo articolo.

Inoltre, quando avevo già terminato la presente ricerca, mi sono accorto che il «Satz 4» del lavoro [1] di B. Huppert ha analogie col mio teorema 1, ma ne differisce perché in esso sia l'ipotesi che la tesi sono più deboli. La mia dimostrazione è comunque indipendente dall'articolo citato di Huppert, salvo l'uso del suo «Hilfsatz 5».

(*) Presentata nella seduta del 18 giugno 1993.

1. Tutti i gruppi considerati in questa *Nota* sono supposti finiti.

DEFINIZIONE 1 (X. Su [2]). Un sottogruppo S di un gruppo G è detto *seminormale* se esiste un sottogruppo H di G tale che sia $SH = G$ ed ogni sottogruppo di H sia permutabile con S ⁽¹⁾.

DEFINIZIONE 2. Un gruppo G è detto *Hall-riducibile* se $G = H_1 \times H_2$ con H_1 e H_2 sottogruppi di Hall non banali; esso è detto *Hall-irriducibile* nel caso contrario.

PROPOSIZIONE 1. Le seguenti condizioni imposte a un gruppo G sono equivalenti:

- (a) Ogni sottogruppo di Sylow di G è seminormale in G ;
- (b) $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_r$, con $H_1, H_2, \dots, H_r$ sottogruppi di Hall, Hall-irriducibili e tali che ogni sottogruppo di Sylow di H_i sia seminormale in H_i ($i = 1, 2, \dots, r$).

DIMOSTRAZIONE. Da (a) segue (b). Infatti si potrà scrivere $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_r$ con $H_1, H_2, \dots, H_r$ sottogruppi di Hall, Hall-irriducibili, di G . Se S_i è un sottogruppo di Sylow di H_i , esso è anche sottogruppo di Sylow di G , quindi è seminormale in G , e di conseguenza, in base alla prop. 2 di [3], è seminormale nel sottogruppo H_i che lo contiene.

Da (b) segue (a). Sia S_i un sottogruppo di Sylow di H_i . Allora per ipotesi esiste un sottogruppo M_i di H_i tale che $S_i M_i = H_i$ e che ogni sottogruppo di H_i sia permutabile con S_i . Si ponga $M = M_i \times H_1 \times \dots \times H_{i-1} \times H_{i+1} \times \dots \times H_r$. Allora $G = S_i M$. Poiché ogni sottogruppo di M è prodotto diretto delle sue intersezioni con $M_i, H_1, \dots, H_{i-1}, H_{i+1}, \dots, H_r$ e ogni sottogruppo M_i , di $H_1, \dots$, di H_{i-1} , di $H_{i+1}, \dots$, di H_r è permutabile con S_i , si ha che S_i è permutabile con ogni sottogruppo di M , e pertanto è seminormale.

In base alla Prop. 1, la ricerca dei gruppi in cui ogni sottogruppo di Sylow è seminormale può ridursi al caso dei gruppi Hall-irriducibili.

DEFINIZIONE 3. Un automorfismo φ di un gruppo G è detto *automorfismo potenza* se per ogni $g \in G$ si ha che g^φ è potenza di g (cioè $\langle g \rangle$ è mutato in sé da φ).

PROPOSIZIONE 2. (B. Huppert [1, Hilfsatz 5]). Sia P un p -gruppo e sia φ un automorfismo potenza non banale di P di ordine primo con p . Allora P è abeliano e si ha, per ogni $g \in P$, $g^\varphi = g^n$ con n intero indipendente da g .

OSSERVAZIONE 1. Nelle ipotesi della Prop. 2, deve essere $n \not\equiv 1 \pmod{p}$, perché in caso contrario l'ordine di φ sarebbe potenza di p .

2. LEMMA 1. (X. Su [2]; P. Wang [3]). Sia P un p -sottogruppo seminormale del gruppo G . Allora P è permutabile con ogni q -sottogruppo di G , per ogni primo $q \neq p$ che divida $|G|$.

⁽¹⁾ X. Su dà a tale definizione una forma leggermente diversa, ma del tutto equivalente a questa.

LEMMA 2 (P. Wang [3, Lemma 1]). Se ogni sottogruppo di Sylow del gruppo G è seminormale G è supersolubile.

In tutto questo numero G indicherà un gruppo Hall-irriducibile d'ordine $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$ con $p_1 > p_2 > \dots > p_s$ primi ($s > 1$), in cui ogni sottogruppo di Sylow è seminormale.

Dalla struttura dei gruppi supersolubili discende che se P_i è un p_i -sottogruppo di Sylow di G , il suo normalizzante ha ordine divisibile per $p_{i+1}^{r_{i+1}} \dots p_s^{r_s}$, e quindi contiene almeno un p_j -sottogruppo di Sylow di G per ogni $j > i$.

LEMMA 3. Sia P_i un p_i -sottogruppo di Sylow di G . Allora si verifica uno dei casi seguenti:

(a) Esiste un p_j -sottogruppo di Sylow P_j di G con $j > i$ che normalizza, ma non centralizza P_i .

(b) Esiste un p_j -sottogruppo di Sylow P_j di G con $j < i$, tali che P_i normalizza, ma non centralizza P_j .

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 1, P_i è permutabile con ogni p_j -sottogruppo di Sylow di G con $j \neq i$. Se P_i fosse permutabile elemento per elemento con ognuno dei suddetti p_j -sottogruppi di Sylow con $j \neq i$, esso sarebbe un fattore diretto di G , e G non sarebbe Hall-irriducibile. Pertanto esiste un $j \neq i$ e un p_j -sottogruppo di Sylow P_j di G , tale che $P_i P_j$ è un sottogruppo in cui P_i e P_j non si centralizzano tra loro. Se $i < j$, P_i è normale in $P_i P_j$, ma P_j non centralizza P_i , e si verifica il caso (a). Se invece $i > j$, P_j è normale in $P_i P_j$, ma P_i non centralizza P_j , e si verifica il caso (b).

LEMMA 4. Ogni sottogruppo di Sylow di G verificante il caso (a) del Lemma 3 è normale e abeliano. Di conseguenza non può verificare nello stesso tempo anche il caso (b).

DIMOSTRAZIONE. Sia P_i un p_i -sottogruppo di Sylow di G verificante il caso (a). Allora esiste un p_j -sottogruppo di Sylow P_j di G , con $j > i$, tale che P_j normalizza, ma non centralizza P_i . Ma, per il Lemma 1, ogni coniugato di P_j è permutabile con P_i , quindi lo normalizza. Ne segue che $N_G(P_i)$ contiene il sottogruppo M generato dai coniugati di P_j . Mostriamo che M contiene anche P_i .

P_j , in base al Lemma 1, è permutabile con tutti i sottogruppi di P_i , quindi li normalizza (essendo P_i normale in $P_i P_j$), onde P_j induce in P_i un automorfismo potenza non banale. Dalla Prop. 2 discende che P_i è abeliano. Sia $a \in P_i$ con $a \neq 1$, e sia b un elemento di P_j che induca in P_i un automorfismo potenza non banale. Allora $b^{-1}ab = a^b$, con $b \not\equiv 1 \pmod{p_i}$, in base all'osservazione 1, onde $a^{-1}b^{-1}ab = a^{b^{-1}}$ con $b - 1$ non divisibile per p_i . Ne segue che a è potenza di $a^{b^{-1}}$; ma $a^{b^{-1}} \in (a^{-1}P_j a)P_j$, cioè $a^{b^{-1}} \in M$, e pertanto $a \in M$, cioè $P_i \leq M$, come si era detto.

Essendo $M \leq N_G(P_i)$ si ha che P_i è normale in M , e quindi è l'unico p_i -sottogruppo di Sylow di M . Ma M è normale in G , onde, per ogni $g \in G$ si ha $g^{-1}P_i g \leq g^{-1}Mg = M$ e pertanto $g^{-1}P_i g = P_i$, cioè $g \in N_G(P_i)$ onde P_i è normale in G . Inoltre P_i non può verificare, oltre il caso (a), anche il caso (b), perché i sottogruppi di Sylow verificanti il caso (b) non sono normali.

LEMMA 5. Supponiamo che esistano in G almeno due sottogruppi di Sylow relativi a primi diversi verificanti il caso (b) del Lemma 3. Allora esistono due sottogruppi di Sylow, relativi a primi diversi, verificanti il caso (b), i quali normalizzano ma non centralizzano uno stesso sottogruppo di Sylow di G verificante il caso (a).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che la precedente affermazione sia falsa. Siano $p_{t_1}, p_{t_2}, \dots, p_{t_m}$ i numeri primi distinti cui corrispondono sottogruppi di Sylow di G verificanti il caso (b). Scegliamo, per ogni $i = 1, \dots, m$, un p_{t_i} -sottogruppo di Sylow P_{t_i} di G , e consideriamo il sottogruppo H_{t_i} generato da P_{t_i} e da tutti i sottogruppi di Sylow verificanti il caso (a) che sono normalizzati ma non centralizzati da P_{t_i} . Nell'ipotesi fatta, H_{t_i} contiene tutti i coniugati di P_{t_i} , ed è un sottogruppo di Hall normale di G . Inoltre, per $i \neq j$ è $H_{t_i} \cap H_{t_j} = 1$, onde G risulta Hall-riducibile contro l'ipotesi. Quindi il Lemma è provato.

LEMMA 6. I sottogruppi di Sylow di G verificanti il caso (b) del Lemma 3 sono tutti relativi ad uno stesso numero primo.

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per assurdo. Allora in base al Lemma 5, possiamo trovare due sottogruppi di Sylow P_{t_1}, P_{t_2} di G , relativi a primi diversi p_{t_1}, p_{t_2} con $p_{t_1} > p_{t_2}$, verificanti il caso (b) e tra loro permutabili, i quali normalizzano ma non centralizzano un medesimo sottogruppo P_m verificante il caso (a). Consideriamo il gruppo $P_m P_{t_1} P_{t_2} = R$. Sappiamo che tutti i coniugati di P_{t_2} devono centralizzare P_{t_1} , altrimenti lo normalizzerebbero senza centralizzarlo, e P_{t_1} verificherebbe il caso (a). Pertanto $N_R(P_{t_1})$ contiene il sottogruppo L generato dai coniugati di P_{t_2} in R . Ma, ragionando come nel Lemma 4, si vede che L contiene P_m , onde anche $N_R(P_{t_1})$ contiene P_m . Poiché $N_R(P_{t_1})$ contiene P_{t_1} e P_{t_2} , si ha $N_R(P_{t_1}) = R$, cioè P_{t_1} è normale in R . Ma allora $P_m P_{t_1} = P_m \times P_{t_1}$, mentre per ipotesi P_{t_1} non centralizza P_m . Si giunge quindi ad una contraddizione, e il Lemma 6 è provato.

3. TEOREMA 1. Sia G un gruppo Hall-irriducibile e non un p -gruppo. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

A) Ogni sottogruppo di Sylow di G è seminormale;

B) $G = PN$ con N sottogruppo di Hall abeliano normale e P sottogruppo di Sylow, e il gruppo degli automorfismi indotto da P in ciascun sottogruppo di Sylow di N è costituito da automorfismi potenza e non è banale.

DIMOSTRAZIONE. Da A) segue B). Dal Lemma 4 segue che il sottogruppo N di G generato dai sottogruppi di Sylow verificanti il caso (a) del Lemma 3 è abeliano e normale. In base al Lemma 6, i sottogruppi di Sylow verificanti il caso (b) del Lemma 3 sono tutti relativi ad uno stesso numero primo, quindi sono tutti e soli i coniugati di uno di essi, sia esso P . Ne segue $G = PN$. Inoltre, se C è un qualunque sottogruppo ciclico di N , si ha che PC è un sottogruppo, per il Lemma 1, onde, essendo N normale in G , è $C = PC \cap N$ normale in PC , cioè C è normalizzato da P . Ne segue che P induce in ogni sottogruppo di Sylow Q di N solo automorfismi potenza. Il gruppo di automorfismi in-

dotto da P in Q non può poi essere banale, altrimenti Q sarebbe permutabile elemento per elemento con ogni sottogruppo di Sylow di G , e G non sarebbe Hall-irriducibile.

Da B) segue A). Infatti ogni sottogruppo di Sylow di N è seminormale in G , perché normale. Ogni altro sottogruppo di Sylow di G è coniugato di P ed è permutabile con ogni sottogruppo del suo supplemento N in G , quindi è seminormale.

COROLLARIO 1. Sia G un gruppo in cui ogni sottogruppo di Sylow è seminormale, e ogni sottogruppo minimale è contenuto nel centro. Allora G è nilpotente.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo G non nilpotente. Allora G è prodotto diretto di sottogruppi di Hall che sono Hall-irriducibili, almeno uno dei quali, sia esso H , non è nilpotente. Ne segue che per il Teor. 1, $H = PN$ con N sottogruppo normale abeliano di Hall e P sottogruppo di Sylow inducente in ogni sottogruppo di Sylow di N un gruppo di automorfismi potenza non banale. Poiché, in base all'Osservazione 1, ogni tale automorfismo, avendo ordine primo con quello di N , non fissa alcun elemento $\neq 1$ di un sottogruppo di Sylow di N , c'è un sottogruppo minimale di G non appartenente al centro, contro l'ipotesi.

Il Corollario 1 generalizza il «Theorem 2» del citato lavoro [3] di P. Wang. Infatti è facile vedere che se ogni sottogruppo ciclico di ogni sottogruppo di Sylow di un gruppo G è seminormale, anche ogni sottogruppo di Sylow di G è seminormale (ovviamente, non vale il viceversa).

4. Ricordiamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 4. Un sottogruppo di S di un gruppo G si dice *quasinormale* in G se è permutabile con ogni sottogruppo di G .

DEFINIZIONE 5. Un gruppo G si dice *quasihamiltoniano* quando due qualunque sottogruppi di G sono permutabili (cioè quando ogni sottogruppo di G è quasinormale).

TEOREMA 2. Sia G un p -gruppo, con p primo dispari. Se ogni sottogruppo ciclico di G è seminormale, G è quasihamiltoniano.

DIMOSTRAZIONE. Sia G un controesempio di ordine minimo. Allora in G devono esistere due sottogruppi ciclici A, B non permutabili. Posto $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$ si avrà $G = \langle a, b \rangle$. Ma A è seminormale in G , quindi esiste un sottogruppo C di G tale che $G = AC$ e che ogni sottogruppo di C è permutabile con A . Sarà $G/\Phi(G) = (A\Phi(G)/\Phi(G))(C\Phi(G)/\Phi(G))$. Essendo $G = \langle A, B \rangle$ si avrà $G/\Phi(G) = \langle A\Phi(G)/\Phi(G), B\Phi(G)/\Phi(G) \rangle$. Segue che $G/\Phi(G)$ è abeliano elementare d'ordine p^2 . Avendosi $A\Phi(G) < G$ e $AC = G$, deve esistere in C un elemento d non contenuto in $A\Phi(G)$. Pertanto l'elemento $d\Phi(G)$ di $G/\Phi(G)$ non appartiene ad $A\Phi(G)/\Phi(G)$ onde $a\Phi(G)$ e $d\Phi(G)$ generano in $G/\Phi(G)$ un gruppo d'ordine p^2 , e quindi $G/\Phi(G) = \langle a\Phi(G), d\Phi(G) \rangle$. Da ciò segue, per note proprietà dei p -gruppi, che $G = \langle a, d \rangle$. Ma, essendo $d \in C$, $\langle d \rangle$ è permutabile con A , onde, posto $D = \langle d \rangle$, si ha $G = AD$ con A, D ciclici. Essendo p dispari risulta (vedi Huppert [1, Satz 15]) che G è quasihamiltoniano, contro l'ipotesi.

Se si sopprime l'ipotesi di p dispari, il Teor. 2 non è più valido. Infatti il gruppo diedrale D_8 di ordine 8 non è quasihamiltoniano, perché può essere generato da due convenienti sottogruppi d'ordine 2; ma ogni suo sottogruppo ciclico è seminormale; si ha infatti $D = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^3 \rangle$ e i sottogruppi contenuti in $\langle a \rangle$ sono seminormali perché normali, mentre quelli non contenuti in $\langle a \rangle$ sono permutabili con ogni sottogruppo del supplemento $\langle a \rangle$.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del GNSAGA del CNR.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. HUPPERT, *Zur Sylowstruktur auflösbarer Gruppen*. Arch. der Math., 12, 1961, 161-169.
- [2] X. SU, *Seminormal subgroups of finite groups*. (Chinese, English summary). J. Math. (Wuhan), 8, 1988, 8-10.
- [3] P. WANG, *Some sufficient conditions of a nilpotent group*. J. of Algebra, 148, 1992, 289-295.

Dipartimento di Matematica «U. Dini»
Università degli Studi di Firenze
Viale Morgagni, 67/A - 50134 FIRENZE