Enrico Brunelli

Alcuni problemi matematici di meccanica dei fluidi

Dottorato in Matematica, Roma «La Sapienza» (2011).

<http://www.bdim.eu/item?id=tesi_2011_BrunelliEnrico_1>

Alcuni problemi matematici di meccanica dei fluidi

E. Brunelli

tesi di dottorato in Matematica

Università "La Sapienza"

Relatore: prof. C. Marchioro

Introduzione

Questa tesi è composta dalla rielaborazione di due articoli pubblicati durante questo dottorato riguardo la meccanica dei fluidi: il primo dimostra un teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni dell' equazione di Eulero per un fluido incomprimibile nel piano richiedendo condizioni molto generali e deboli sui dati iniziali; il secondo prende in considerazione l' equazione di Navier-Stokes nello spazio ma sotto condizioni di simmetrie dei dati iniziali, e dimostra che sotto alcune ipotesi si può fare il limite congiunto di dati iniziali singolari e viscosità bassa, e si giunge come sperato allo stesso limite dell' equazione di Eulero per stessi dati iniziali singolari.

I due articoli sui quali è basata la tesi sono:

E. Brunelli *"On the Euler equation in the plane"*, Comm. in partial diff. equ., Volume 35, Issue 3 March 2010 , pag. 480 - 495

E. Brunelli, C. Marchioro *"Vanishing viscosity limit for a smoke ring with concentrated vorticity"*, Journ. of math. fluid mech., publ. online 22-5-2010 10.1007/s00021-010-0024-zOnline First™

1 Sull' equazione di Eulero nel piano

Sommario

In questo lavoro dimostreremo un risultato di esistenza ed unicità delle soluzioni per l' equazione di Eulero di un fluido incomprimibile nel piano. Assumiamo che la vorticità iniziale sia limitata e che inoltre esista almeno un punto nel quale l' integrale per calcolare la velocità sia assolutamente convergente.

1.1 Introduzione

Lo scopo del lavoro è lo studio del moto di un fluido ideale incomprimibile nel piano, quando una vorticità iniziale $\omega \equiv \nabla \wedge \mathbf{u}$ è assegnata.

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

Qui $\mathbf{u}$ denota un campo di velocità e ω è la terza componente della vorticità. Possiamo anche considerare soluzioni deboli delle equazioni; queste devono soddisfare le condizioni:

$$\omega(\phi_t(\mathbf{x}), t) = \omega_0(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\phi_t(\mathbf{x}), t) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{K} * \omega_t(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}\mathbf{y}\mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\omega_t(\mathbf{y}) \tag{1.5}$$

$$\omega(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x}) \tag{1.6}$$

dove $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$ e $\mathbf{x}^\perp = (x_2, -x_1)$. Se una soluzione di (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6) è regolare, allora è anche soluzione di (1.1) e (1.2). Il nostro problema è cercare le più deboli condizioni sufficienti ad ottenere esistenza e unicità delle soluzioni che soddisfino le relazioni (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6). La dinamica del moto è stata studiata in vari articoli ([1], [4], [5], [7],[8]; per una visione generale si può consultare ad esempio [6]).Un primo risultato classico è:

Teorema 1.1 *Se*

$$\omega_0 \in L_1 \cap L_\infty \tag{1.7}$$

allora esiste un' unica tripla $(\omega, \phi_t, \mathbf{u})$*, dove* ϕ_t *è un flusso che conserva la misura, che sia soluzione di* (1.3), (1.4), (1.5) *e* (1.6) *con* $\omega(\cdot, t) \in L_1 \cap L_\infty$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

In letteratura il risultato è stato generalizzato [2]:

Teorema 1.2 *Supponiamo che la velocità iniziale soddisfi la seguente proprietà:*

$$|\mathbf{u}_0(\mathbf{x})| \le c(1 + |\mathbf{x}|^\alpha), \quad \alpha < 1. \tag{1.8}$$

Supponiamo inoltre che la vorticità $\omega_0 = \nabla \wedge \mathbf{u}_0$ *soddisfi:*

$$\omega_0 \in L_p \cap L_\infty, \quad p < \frac{2}{\alpha}. \tag{1.9}$$

Allora esiste un' unica tripla $(\omega, \phi_t, \mathbf{u})$*, dove* ϕ_t *è un flusso che conserva la misura, soluzione di* (1.3)*,* (1.4)*,* (1.5) *e* (1.6) *tale che*

$$\frac{|\mathbf{u}(\cdot,t)|}{1 + |\cdot|^\alpha} \in L_\infty, \quad \omega(\cdot,t) \in L_p \cap L_\infty \tag{1.10}$$

Nel presente lavoro studiamo solo il caso nel quale l' integrale che definisce la velocità tramite (1.5) è assolutamente convergente (altrimenti si può considerare il suo valore principale). Per prima cosa, diamo una condizione necessaria e sufficiente per ottenere che ciò sia rispettato almeno nell' istante iniziale. Poi prenderemo questa condizione come ipotesi e proveremo che, se $\omega_0 \in L_\infty$, allora esiste un' unica soluzione.

1.2 Risultato principale

In questa sezione, diamo una condizione necessaria e sufficiente perchè l' integrale in (1.5), che definisce la velocità, sia assolutamente convergente all' istante iniziale. Poi proviamo (Teorema 1.3) che se questa condizione vale anche solo in un punto, allora si ha esistenza ed unicità delle soluzioni.

Definizione 1.1 *Sia* $\omega(\mathbf{x})$ *un profilo di vorticità. Definiamo*

$$I(\omega, \mathbf{x}) \equiv \int \frac{|\omega(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{1.11}$$

La condizione che cerchiamo è stabilita nel seguente

Lemma 1.1 *Se*

$$\omega_0 \in L_\infty \text{ and } I(\omega_0, 0) < \infty \tag{1.12}$$

allora l' integrale in (1.5)*, che definisce la velocità, è assolutamente convergente all' istante iniziale ed è vero anche il contrario.*

Dim. Prima proviamo che la condizione (1.12) è necessaria e sufficiente per l' esistenza di $\mathbf{u}_0(0)$. Che sia sufficiente è ovvio (la norma di $K(\mathbf{x})$ è $\frac{C}{|\mathbf{x}|}$), così resta da provare solo la necessità. Supponiamo per assurdo che $I(\omega, 0) = \infty$. Vogliamo provare che, in questo caso, $\mathbf{u}_0(0)$ non è definito secondo Lebesgue; Per far ciò, dividiamo in due parti il piano:

$$C_1 = \{\mathbf{y} : \frac{\pi}{4} \le \theta(\mathbf{y}) \le \frac{3}{4}\pi\} \cup \{\mathbf{y} : \frac{5}{4}\pi \le \theta(\mathbf{y}) \le 74\pi\}, \tag{1.13a}$$

$$C_2 = C_1^c, \tag{1.13b}$$

dove $\theta(\mathbf{y})$ è l' usuale coordinata polare. Si ha $\int_{C_i} \frac{\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}|} d\mathbf{y} = \infty$ per almeno un valore di i. Se $i = 1$ (l' altro caso è analogo se consideriamo l' altra componente di $\mathbf{K}$),

$$|K_1(-\mathbf{y})| = \frac{|\sin\theta(\mathbf{y})|}{2\pi|\mathbf{y}|} \tag{1.14}$$

e perciò su C_1 vale:

$$\int_{C_1} |K(-\mathbf{y})\omega_0(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \geq c \int \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}|} d\mathbf{y} = \infty \tag{1.15}$$

(abbiamo usato che sin è più grande di una costante c su C_1). Ricordiamo che una funzione è integrabile secondo Lebesgue se e solo se lo è il suo valore assoluto. Perciò da

$$\mathbf{u}_0^1(0) = \int K_1(-\mathbf{y})\omega_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \tag{1.16}$$

otteniamo che una componente di $\mathbf{u}_0(0)$ non è integrabile secondo Lebesgue, che è ciò che volevamo. Dunque, dobbiamo solo provare che la condizione (1.12) è sufficiente per calcolare la velocità secondo Lebesgue nell' intero piano. Generalizzando il procedimento precedente, è facile convincersi che una condizione sufficiente per l' esistenza di $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ è

$$I(\omega_0, \mathbf{x}) < \infty. \tag{1.17}$$

Perciò ci basta provare che

$$I(\omega_0, 0) < \infty \Rightarrow I(\omega_0, \mathbf{x}) < \infty \forall \mathbf{x}. \tag{1.18}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} I(\omega_0, \mathbf{x}) &= \int \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} d\mathbf{y} \leq \int_{A_1} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} d\mathbf{y} \\ &+ \int_{A_2} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} d\mathbf{y} + \int_{A_3} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} d\mathbf{y} \end{aligned} \tag{1.19}$$

dove

$$A_1 \equiv \{\mathbf{y} : |\mathbf{y}-\mathbf{x}| \leq \sqrt{|\mathbf{x}|}\}, \tag{1.20a}$$

$$A_2 \equiv \{\mathbf{y} : |\mathbf{y}| \geq 2|\mathbf{x}|\}, \tag{1.20b}$$

$$A_3 \equiv (A_1 \cup A_2)^c. \tag{1.20c}$$

Per le ipotesi $\omega_0 \in L_\infty$, abbiamo:

$$\int_{A_1} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} d\mathbf{y} \leq c\|\omega_0\|_\infty \sqrt{|\mathbf{x}|}. \tag{1.21}$$

Su A_2, si ha

$$|\mathbf{y}-\mathbf{x}| \geq |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{y}| - \frac{|\mathbf{y}|}{2} = \frac{|\mathbf{y}|}{2} \tag{1.22}$$

e dunque

$$\int_{A_2} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} \mathrm{d}\mathbf{y} \leq c \int_{A_2} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}|} \mathrm{d}\mathbf{y} \leq cI(\omega_0, 0). \tag{1.23}$$

Su A_3, vale $|\mathbf{y}| < 2|\mathbf{x}|$ and $|\mathbf{y}-\mathbf{x}| > \sqrt{|\mathbf{x}|}$ per definizione, e così

$$\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} < 2\sqrt{|\mathbf{x}|}. \tag{1.24}$$

Otteniamo perciò:

$$\int_{A_3} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|} \mathrm{d}\mathbf{y} \leq 2\sqrt{|\mathbf{x}|} \int_{A_3} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|y|} \mathrm{d}\mathbf{y} \leq 2\sqrt{|\mathbf{x}|} I(\omega_0, 0). \tag{1.25}$$

Considerando tutte queste stime:

$$I(\omega, \mathbf{x}) \leq c\left(1 + \sqrt{|\mathbf{x}|}\right) (\|\omega_0\|_\infty + I(\omega_0, 0)). \tag{1.26}$$

Dalla relazione segue (1.18), che è quello che volevamo provare. □

Possiamo ora enunciare il risultato principale di questo lavoro:

Teorema 1.3 *Se esiste* $\mathbf{x}$ *tale che* $I(\omega_0, \mathbf{x}) < \infty$ *e* $\omega_0 \in L_\infty$, *allora esiste un' unica tripla* $(\omega, \phi_t, \mathbf{u})$, *dove* ϕ_t *è un flusso che conserva la misura, soluzione di* (1.3), (1.4), (1.5) *e* (1.6) *tale che*

$$\frac{\mathbf{u}(\cdot, t)}{1 + |\cdot|^{\frac{1}{2}}} \in L_\infty, \quad \omega(\cdot, t) \in L_\infty. \tag{1.27}$$

Prima di provare questo risultato enunciamo un lemma che ci servirà allo scopo:

Lemma 1.2 *Supponiamo che* $\omega_0 \in L_\infty$ *e* $I(\omega_0, 0) < \infty$. *Allora*

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{z}) - \mathbf{K}(\mathbf{y}-\mathbf{z})||\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} &\leq c(1 + \ln(1 + |\mathbf{x}|))\psi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \\ &\cdot \quad (I(\omega_0, 0) + \|\omega_0\|\infty), \end{aligned} \tag{1.28}$$

dove

$$\psi(r) = r(1 - \ln(r)) \quad \text{if } r < 1, \tag{1.29a}$$

$$\psi(r) = r \quad \text{if } r \geq 1 \tag{1.29b}$$

e ω_t *è il profilo di vorticità al tempo* t.

Dim. Dalla stima (1.27) (che proviamo dopo), e dall' identità

$$\int \frac{|\omega_t(\mathbf{y}, t)|}{|\mathbf{y}|} \mathrm{d}\mathbf{y} = \int \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\phi_{-t}(\mathbf{y})|} \mathrm{d}\mathbf{y}, \tag{1.30}$$

possiamo facilmente provare che $I(\omega_t, 0)$ è uniformemente limitata per $t < T$(vedi appendice B). Adesso sia $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Se $r < 1$, dividiamo il dominio d' integrazione in

$$A_1 = \{\mathbf{z} : |\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq 2r\}, \tag{1.31a}$$

$$A_2 = \{\mathbf{z} : 2r < |\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq 2\}, \tag{1.31b}$$

$$A_3 = \{\mathbf{z} : |\mathbf{x} - \mathbf{z}| > 2\}. \tag{1.31c}$$

Si ha

$$\int_{A_1} |\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{z})||\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} \leq \|\omega_0\|_\infty \left(\int_{A_1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} + \int_{A_1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{y} - \mathbf{z}|} \right). \tag{1.32}$$

Il primo integrale in (1.32) è limitato da cr. Si ha anche che $|\mathbf{y} - \mathbf{z}| \leq 3r$, $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq 2r$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r$. Così anche il secondo integrale è limitato da cr. Denotiamo $K_i, i = 1, 2$, le componenti di $\mathbf{K}$, così da avere

$$|K_i(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - K_i(\mathbf{y} - \mathbf{z})| \leq \frac{r}{|\mathbf{z} - \xi_i|^2}, \tag{1.33}$$

dove ξ_i giace sul segmento $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Se $\mathbf{z} \in A_2 \cup A_3$, allora $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \geq 2r$ e perciò

$$\begin{aligned} |\mathbf{z} - \xi_i| &\geq |\mathbf{x} - \mathbf{z}| - |\mathbf{x} - \xi_i| \geq |\mathbf{x} - \mathbf{z}| - r \\ &\geq |\mathbf{x} - \mathbf{z}| - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|}{2} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|}{2}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{A_2} |\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{z})||\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} &\leq c\|\omega_0\|_\infty \int_{A_2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2} \\ &\leq c\|\omega_0\|_\infty r(1 - \ln(r)). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Per ottenere una stima sull' ultima parte notiamo che

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>1} \frac{|\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2} \leq \int_A \frac{|\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2} + \int_B \frac{|\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2}, \tag{1.36}$$

dove A è il dominio nel quale $|\mathbf{z}| < 2|\mathbf{x}|$ e B è il suo complementare (e dunque in B si ha $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| > \frac{|\mathbf{z}|}{2}$). Così

$$\int_B \frac{|\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2} \leq c \left(1 + \int_{|\mathbf{z}|>1} \frac{|\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^2} \right) \leq c(1 + I(\omega_t, 0)). \tag{1.37}$$

L' integrale su A è ovviamente limitato da $c(\ln(1 + |\mathbf{x}|))$ e così finalmente otteniamo

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>1} \frac{|\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2} \leq c(1 + \ln(1 + |\mathbf{x}|)), \tag{1.38}$$

dove $I(\omega_t, 0)$ è considerate nella costante c. Sull' ultima parte del dominio si ha

$$\begin{aligned}\int_{A_3} |\mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{z}) - \mathbf{K}(\mathbf{y}-\mathbf{z})||\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} &\leq cr\int_{A_3} \frac{|\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} \\ &\leq c(\ln(1+|\mathbf{x}|)r. \qquad (1.39)\end{aligned}$$

Sommando le stime proviamo il lemma per $r < 1$. Se $r \geq 1$, dividiamo il dominio in $\{\mathbf{z} : |\mathbf{x}-\mathbf{z}| \leq 2r\}$ e $\{\mathbf{z} : |\mathbf{x}-\mathbf{z}| > 2r\}$. Vale:

$$\int |\mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{z}) - \mathbf{K}(\mathbf{y}-\mathbf{z})||\omega_t(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} \leq c\|\omega_0\|_\infty(\ln(1+|\mathbf{x}|))r. \qquad (1.40)$$

□

Dim. di Teorema 1.3 Nella prima parte della dimostrazione proveremo l' esistenza di una soluzione; nella seconda l' unicità.

Esistenza Per semplicità sceglieremo l' origine nel punto $\mathbf{x}$ per il quale $I(\omega_0, \mathbf{x}) < \infty$, e così si ha $I(\omega_0, 0) < \infty$. Per ogni numero fissato positivo M, definiamo

$$\omega_0^M = \omega_0 \chi_M, \qquad (1.41)$$

dove χ_M è la funzione caratteristica del disco di raggio M centrato nell' origine. $\omega_0^M \in L_1 \cap L_\infty$ e perciò il problema con condizioni iniziali ω_0^M ha un' unica soluzione per il teorema 1.1. Definiamo $(\mathbf{u}^M, \phi^M, \omega^M)$ questa soluzione. Vogliamo trovare delle condizioni per passare al limite le soluzioni al fine di costruire una soluzione con ω_0 come dato iniziale. $\mathbf{u}$ ha divergenza nulla, perciò ϕ_t^M conserva la misura. Dunque

$$\mathbf{u}^M(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\omega^M(\mathbf{y}, t)\mathrm{d}\mathbf{y} = \int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y}))\omega_0^M(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}. \qquad (1.42)$$

Per stimare l' ultimo integrale dividiamo il dominio nell' insieme

$$A \equiv \left\{\mathbf{y} : |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq 2R_t^M \left(1 + |\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \qquad (1.43)$$

e nel suo complementare, dove

$$R_t^M \equiv \max\left(1, \sup_{\mathbf{y}} \frac{|\mathbf{y} - \phi_t^M(\mathbf{y})|}{1 + \max\left(|\phi_t^M(\mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}, |\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}\right)}\right) \qquad (1.44)$$

Per stimare l' integrale su A, notiamo che

$$\left|\int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y}))\omega_0^M(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right| \leq c\int \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})|}\mathrm{d}\mathbf{y}. \qquad (1.45)$$

Così, dividiamo ulteriormente l' insieme A in:

$$A_1 \equiv \{\mathbf{y} : |\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})| \leq R_t^M\} \cap A, \qquad (1.46a)$$

$$A_2 = A_1^c \cap A. \tag{1.46b}$$

Cambiando variabili e usando la conservazione della misura otteniamo:

$$\int_{A_1} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})|} \mathrm{d}\mathbf{y} \le c\|\omega_0\|_\infty R_t^M. \tag{1.47}$$

Dividiamo ancora A_2 e osserviamo che:

$$|\mathbf{y}| \le 2|\mathbf{x}| \Rightarrow |\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}} \le 2|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}, \tag{1.48a}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}| > 2|\mathbf{x}| \quad &\Rightarrow \quad |\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}} < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{1}{2}} + |\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}} < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \quad |\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}} < c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.48b}$$

e dunque vale

$$\begin{aligned} \int_{A_2} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})|} \mathrm{d}\mathbf{y} \le &\int_{A_2 \cap \left\{ |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le 2R_t^M \left(1 + |\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right) \right\}} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})|} \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &+ \int_{A_2 \cap \left\{ |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le 2R_t^M c \left(1 + |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}\right) \right\}} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})|} \mathrm{d}\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Nella seconda parte dell' ultimo integrale dividiamo il dominio nei seguenti insiemi:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le 1 \Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le cR_t^M, \tag{1.50a}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le 1 \quad &\Rightarrow \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le 2R_t^M c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le (4cR_t^M)^2. \end{aligned} \tag{1.50b}$$

Vale:

$$\begin{aligned} &\int_{A_2 \cap \left\{ |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le 2R_t^M c \left(1 + |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}\right) \right\} \cap \{ |\mathbf{x}-\mathbf{y}| > 1 \}} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})|} \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &\qquad \le \int_{A_2 \cap \left\{ |\mathbf{x}-\mathbf{y} \le (4cR_t^M)^2 \right\}} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})|} \mathrm{d}\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{1.51}$$

In questo insieme si ha:

$$|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})| > R_t^M \tag{1.52}$$

perchè è contenuto in A_2 e

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le c(R_t^M)^2. \tag{1.53}$$

Perciò vale

$$|\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})| R_t^M > c|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \tag{1.54}$$

e quindi

$$\int_{A_2\cap\left\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le(4cR_t^M)^2\right\}} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y})|}\mathrm{d}\mathbf{y} \le cR_t^M I_0(\mathbf{x})$$

$$\le cR_t^M\left(1+\sqrt{|\mathbf{x}|}\right)(\|\omega_0\|_\infty + I_0(0)). \tag{1.55}$$

Per completare l' integrale su A, ci resta da stimare

$$\int_{A_2\cap\left\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le 2R_t^M\left(1+|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right)\right\}} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y})|}\mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$+\int_{A_2\cap\left\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le 2R_t^M c\left(1+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}\right)\right\}\cap\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le 1\}} \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y})|}\mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{1.56}$$

Definiamo

$$C(t) = \left\{\mathbf{z} : |\mathbf{x}-\phi_{-t}^M(\mathbf{z})| \le 2R_t^M\left(1+|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right)\right\}\cap\phi_t^M(A_2), \tag{1.57}$$

$$\begin{aligned} D(t) &= \left\{\mathbf{z} : |\mathbf{x}-\phi_{-t}^M(\mathbf{z})| \le 2R_t^M c\left(1+|\mathbf{x}-\phi_{-t}^M(\mathbf{z})|^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \\ &\cap \quad \phi_t^M(A_2)\cap\{\mathbf{z} : |\mathbf{x}-\phi_{-t}^M(\mathbf{z})|\le 1\}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Cambiamo variabile, ponendo $\mathbf{z}=\phi_t^M(\mathbf{y})$. Così l' integrale (1.56) diventa

$$\int_{C(t)} \frac{|\omega_0(\phi_{-t}^M(\mathbf{z}))|}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{d}\mathbf{z} + \int_{D(t)} \frac{|\omega_0(\phi_{-t}^M(\mathbf{z}))|}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{d}\mathbf{z}. \tag{1.59}$$

Vale la seguente stima:

$$\int_{C(t)} \frac{|\omega_0(\phi_{-t}^M(\mathbf{z}))|}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{d}\mathbf{z} \le \|\omega_0\|_\infty \int_{|\mathbf{x}-\phi_{-t}^M(\mathbf{z}|)\le 2R_t^M\left(1+|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right)} |\mathbf{x}-\mathbf{z}|^{-1}\mathrm{d}\mathbf{z} \tag{1.60}$$

e

$$\int_{D(t)} \frac{|\omega_0(\phi_{-t}^M(\mathbf{z}))|}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{d}\mathbf{z} \le \|\omega_0\|\infty \int_{|\mathbf{x}-\phi_{-t}^M(\mathbf{z})|\le 1} |\mathbf{x}-\mathbf{z}|^{-1}\mathrm{d}\mathbf{z}. \tag{1.61}$$

La misura dell' insieme $|\mathbf{x}-\phi_{-t}^M(\mathbf{z})|\le r$ è la stessa del disco di raggio r e centro $\mathbf{x}$ e dunque:

$$\int_{|\mathbf{x}-\phi_{-t}^M(\mathbf{z})|\le r} \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} \le \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|\le r} \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}; \tag{1.62}$$

da ciò segue che

$$\int_{C(t)} \frac{|\omega_0(\phi_{-t}^M(\mathbf{z}))|}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{d}\mathbf{z} + \int_{D(t)} \frac{|\omega_0(\phi_{-t}^M(\mathbf{z}))|}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{d}\mathbf{z} \le c\|\omega_0\|_\infty R_t^M\left(1+|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.63}$$

In conclusione siamo giunti alla seguente stima

$$\left|\int \mathbf{K}(\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y}))\omega_0^M(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right| \le c\|\omega_0\|_\infty R_t^M\left(1+|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.64}$$

Consideriamo ora l' integrale su A_c. Dividiamo A_c in:

$$E = A^c \cap \{|\mathbf{y}| > |\phi_t^M(\mathbf{y})|\} \tag{1.65a}$$

e

$$F = A^c \backslash E. \tag{1.65b}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y}))\omega_0^M(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} &= \mathbf{u}_0^M(\mathbf{x}) + \int (\mathbf{K}(\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})) \\ &- \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}))\omega_0^M(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Indichiamo con K_i $(i = 1, 2)$ le componenti di $\mathbf{K}$. Si ha:

$$\int_E (K_i(\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y}))-K_i(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\omega_0^M(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \le c\int_E \frac{|\mathbf{y} - \phi_t^M(\mathbf{y})||\omega_0^M(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \xi_i|^2}, \tag{1.67}$$

dove ξ_i giace sul segmento $(\mathbf{y}, \phi_t^M(\mathbf{y}))$. Siamo in A^c, perciò $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \ge 2R_T^M \left(1 + |\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}\right)$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \xi_i| &\ge |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |\mathbf{y} - \xi_i| \ge |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |\mathbf{y} - \phi_t^M(\mathbf{y}) \\ &\ge |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - R_t^M \left(1 + |\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}\right) \ge \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Per la definizione di R_t^M, abbiamo la seguente stima sull' integrale in (1.67):

$$\begin{aligned} cR_t^M \int_{A_1^c} \frac{\left(1 + |\phi_t^M(\mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}\right)|\omega_0^M(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} &\le c\int \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ \le cI(\omega_0, \mathbf{x}) \le c\left(1 + |\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right)\|\omega_0\|_\infty + I(\omega_0, 0). \end{aligned} \tag{1.69}$$

Per stimare l' integrale su F, dividiamo F nei seguenti insiemi:

$$G = \left\{\mathbf{y} \in F : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 2R_t^M \left(1 + |\phi_t^M(\mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}\right)\right\}, \tag{1.70a}$$

$$H = F \backslash G. \tag{1.70b}$$

Vale:

$$\begin{aligned} &\int_G (K_i(\mathbf{x} - \phi_t^M(\mathbf{y})) - K_i(\mathbf{x} - \mathbf{y}))\omega_0^M(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &\qquad \le c\int_G \frac{|\mathbf{y} - \phi_t^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \zeta_i|^2}\mathrm{d}\mathbf{y}, \end{aligned} \tag{1.71}$$

dove ζ_i giace sul segmento $(\mathbf{y}, \phi_t^M(\mathbf{y}))$. Siamo in G, e perciò $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \ge 2R_t^M \left(1 + |\phi_t^M(\mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}\right)$. Così abbiamo

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \zeta_i| &\ge |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |\mathbf{y} - \zeta_i| \ge |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - |\mathbf{y} - \phi_t^M(\mathbf{y})| \ge |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \\ &- R_t^M \left(1 + |\phi_t^M(\mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}\right) \ge \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Per la definizione di R_t^M, vale la seguente stima sull' integrale in (1.71):

$$cR_t^M \int_G \frac{1+|\phi_t^M(\mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}|\omega_0^M(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y} \leq c\int \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}}\mathrm{d}\mathbf{y} \leq cI(\omega_0,\mathbf{x})$$
$$\leq c\left(1+|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right)(\|\omega_0\|_\infty + I(\omega_0,0)). \tag{1.73}$$

Per stimare l' integrale su H, notiamo come prima cosa che in questo insieme $|\phi_t^M(\mathbf{y})| > |\mathbf{y}|$ (come provato in appendice B) e dunque

$$\left|\int_H (\mathbf{K}(\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y})) - \mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\omega_0^M(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right| \leq c\left(\int_H \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right.$$
$$\left. + \int_H \frac{|\omega_0^M(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y})}\mathrm{d}\mathbf{y}\right). \tag{1.74}$$

Il primo integrale nella parte destra è facilmente maggiorato. Per il secondo dividiamo H in 3 sottoinsiemi:

$$H_1 = \left\{\mathbf{y} \in H : |\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y})| < \sqrt{|\mathbf{x}|}\right\}; \tag{1.75a}$$

$$H_2 = \{\mathbf{y} \in H : |\phi_t^M(\mathbf{y})| > 2|\mathbf{x}|\}; \tag{1.75b}$$

$$H_3 = H \backslash (H_1 \cup H_2). \tag{1.75c}$$

L' integrale su H_1 è maggiorato da $C\sqrt{|\mathbf{x}|}$; su H_2 $|\mathbf{x}-\phi_t^M(\mathbf{y})| > \frac{1}{2}|\phi_t^M(\mathbf{y})| > \frac{1}{2}|\mathbf{y}|$ e perciò possiamo stimare l' integrale con $cI(\omega_0, 0)$; su H_3 $|x-\phi_t^M(\mathbf{y})| > \sqrt{|\mathbf{x}|}$ e $|\mathbf{y}| < |\phi_t^M(\mathbf{y})| < 2|\mathbf{x}|$ e dunque l' integrale è maggiorato da $c\sqrt{|\mathbf{x}|}I(\omega_0,0)$. Sommando tutte le stime ottenute e sfruttando la formula (1.66), otteniamo:

$$|\mathbf{u}^M(\mathbf{x},t)| \leq |\mathbf{u}_0^M(\mathbf{x})| + c(I(\omega_0,0) + \|\omega_0\|_\infty)R_t^M\left(1+|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.76}$$

Dalla definizione (1.44), si può vedere che R_t^M potrebbe non essere differenziabile rispetto al tempo. Ma possiamo maggiorare il lim sup del suo rapporto incrementale (e perciò la sua velocità di crescita) perchè il lim sup del sup è maggiorato dal sup del lim sup. Consideriamo la derivata di

$$\frac{|\mathbf{y}-\phi_t^M(\mathbf{y})|}{1+\max\left(|\phi_t^M(\mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}, |\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}}\right)}. \tag{1.77}$$

Applichiamo le stime (1.76) e (1.26) per maggiorare $\mathbf{u}_0^M(\mathbf{x})$. In questo modo otteniamo

$$R_t^M \leq c + \int_0^t (cR_s^M + c)\mathrm{d}s. \tag{1.78}$$

Per il teorema di Gronwall si ha che R_t^M è uniformemente limitato per tutti i tempi minori di un fissato T. Dunque, per (1.76), abbiamo

$$\sup_{\mathbf{x},t\leq T} \frac{|\mathbf{u}^M(\mathbf{x},t)|}{\left(1+|\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}\right)} \leq c, \tag{1.79}$$

dove C dipende da $I(\omega_0, 0) + \|\omega_0\|_\infty$ e T, ma non da M. Si consideri adesso la successione $\{\phi_t^M(\mathbf{x})\}_{M\in\mathbb{N}}$ per $t \in [0,T]$ e $|\mathbf{x}| \leq N$. Questa successione è uniformemente limitata ed equicontinua per il lemma 1.2 e le stime (1.79). Possiamo dunque considerare una sottosuccessione uniformemente convergente per $t \in [0,T]$ usando l' usuale metodo di diagonalizzazione su M e N. Definiamo

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \lim_{M\to+\infty} \phi_t^M(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.80}$$

Abbiamo

$$\omega^M(\cdot,t) \to \omega(\cdot,t) = \omega_0(\phi_t(\cdot)) \tag{1.81}$$

debolmente, e

$$\mathbf{u}^M(\cdot,t) \to \mathbf{u}(\cdot,t). \tag{1.82}$$

E' facile provare che la tripla $(\mathbf{u}(\cdot,t), \phi_t(\cdot), \omega(\cdot,t))$ è una soluzione di (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6).

Unicità Prima di tutto osserviamo che, per la stima (1.27), per ogni fissato $t < T$, risulta:

$$1 + |\phi_t(\mathbf{x})| < C(1 + |\mathbf{x}|) < D(1 + |\phi_t(\mathbf{x})|). \tag{1.83}$$

Supponiamo che esistano 2 soluzioni $\phi_t^1(\mathbf{x})$ e $\phi_t^2(\mathbf{x})$, e proviamo che sono uguali. Definiamo

$$D(t) = \sup_{s\leq t,\mathbf{x}} \frac{|\phi_s^1(\mathbf{x}) - \phi_s^2(\mathbf{x})|}{1 + |\mathbf{x}|}. \tag{1.84}$$

Ovviamente $D(0) = 0$ e D è una funzione monotona crescente. Per $\epsilon < 1$ fissato, supponiamo che esista $t : D(t) = \epsilon$. Vediamo cosa succede per i tempi successivi. Da (1.79), vediamo facilmente che esiste una costante c tale che $|\mathbf{x}| > \frac{c}{\epsilon^2} \Rightarrow \frac{|\phi_s^1(\mathbf{x}) - \phi_s^2(\mathbf{x})|}{1+|\mathbf{x}|} < \epsilon$ se il tempo è maggiorato da T. Consideriamo allora l' insieme $\left\{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < \frac{c}{\epsilon^2}\right\}$. In questo disco, vale:

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}(\phi_s^1(\mathbf{x})) - \mathbf{u}(\phi_s^2(\mathbf{x}))| &\leq \int |\mathbf{K}(\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z})\omega^1(\mathbf{z}) - \mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \mathbf{z})\omega^2(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} \\ &\leq \int |\mathbf{K}(\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}) - \mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \mathbf{z})||\omega^1(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} \\ &+ \int |\mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^1(\mathbf{z})) - \mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^2(\mathbf{z}))||\omega_0(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}\end{aligned} \tag{1.85}$$

per tutti gli $s > t$, perchè ϕ conserva la misura. Consideriamo $\int |\mathbf{K}(\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}) - \mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \mathbf{z})||\omega^1(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}$. Dividiamo il dominio in

$$N = \{\mathbf{z} : |\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}| \leq 2D(s)(1 + |\mathbf{x}|\}; \tag{1.86a}$$

$$O = \{\mathbf{z} : 2D(s)(1 + |\mathbf{x}| < |\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}| \leq 2\}; \tag{1.86b}$$

$$P = \{\mathbf{z} : |\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}| > 2\}. \tag{1.86c}$$

Abbiamo:

$$\int_N |\mathbf{K}(\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}) - \mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \mathbf{z})||\omega^1(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}$$

$$\leq \|\omega^1\|_\infty \left(\int_N \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}|} + \int_N \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\phi_s^2(\mathbf{x}) - \mathbf{z}|} \right). \tag{1.87}$$

Il primo addendo sulla parte destra è maggiorato da $cD(s)(1 + |\mathbf{x}|)$. Inoltre $|\phi_s^2(\mathbf{x}) - t| \leq 3D(s)(1 + |\mathbf{x}|)$ perchè $|\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}| \leq 2D(s)(1 + |\mathbf{x}|)$ e $|\phi_s^1(\mathbf{x}) - \phi_s^2(\mathbf{x})| \leq D(s)(1 + |\mathbf{x}|)$; così, il secondo addendo è maggiorato anch' esso da $cD(s)(1 + |\mathbf{x}|)$. Siano K_i le componenti di $\mathbf{K}$. Vale:

$$|K_i(\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}) - K_i(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \mathbf{z})| \leq c \frac{D(s)(1 + |\mathbf{x}|}{|\mathbf{z} - \eta_i|^2}, \tag{1.88}$$

dove η_i, $i = 1, 2$, giace sul segmento $(\phi_s^1(\mathbf{x}), \phi_s^2(\mathbf{x}))$. Se $\mathbf{z} \in O \cup P$, allora $|\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}| \geq 2D(s)(1 + |\mathbf{x}|)$. Così

$$\begin{aligned} |\mathbf{z} - \eta_i| &\geq |\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}| - |\phi_s^1(\mathbf{x}) - \eta_i| \geq |\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}| - D(s)(1 + |\mathbf{x}|) \\ &\geq |\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}| - \frac{|\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}|}{2} = \frac{|\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}|}{2}. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Da ciò segue:

$$\int_O |\mathbf{K}(\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}) - \mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \mathbf{z})||\omega^1(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} \leq c\|\omega^1\|_\infty (1 + |\mathbf{x}|)D(s)$$

$$\cdot \int_O \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\phi_s^1 - \mathbf{z}|^2} \leq c\|\omega^1\|_\infty (1 + |\mathbf{x}|)D(s) \left(1 + \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) \tag{1.90}$$

(nell' ultima stima abbiamo usato $D(s) > \epsilon$ per la monotonia di D). Come nel lemma 1.2, otteniamo

$$\int_P |\mathbf{K}(\phi_s^1(\mathbf{x}) - \mathbf{z}) - \mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \mathbf{z})||\omega^1(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} \leq c(1 + |\mathbf{x}|)D(s)$$

$$\cdot \int_P \frac{|\omega^1(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\phi_s^1(\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2} \leq C \ln\left(1 + \frac{1}{\epsilon^2}\right)(1 + |\mathbf{x}|)D(s). \tag{1.91}$$

Dobbiamo dare una stima di

$$\int |\mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^1(\mathbf{z})) - \mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^2(\mathbf{z}))||\omega_0(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}. \tag{1.92}$$

Dividiamo il dominio d' integrazione in

$$Q = \{\mathbf{z} : |\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^1(\mathbf{z})| \leq 2D(s)(1 + |\mathbf{x}|)\}; \tag{1.93a}$$

$$R = \{\mathbf{z} : 2D(s)(1 + |\mathbf{x}|) < |\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^1(\mathbf{z}) \leq 2\}; \tag{1.93b}$$

$$S = \{\mathbf{z} : |\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^1(\mathbf{z})| > 2\}. \tag{1.93c}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned}&\int_Q |\mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^1(\mathbf{z}))-\mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z}))||\omega_0(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}\\
&\le \|\omega_0\|_\infty\left(\int_Q \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^1(\mathbf{z})|}+\int_Q \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z})|}\right)\\
&\qquad\le cD(s)(1+|\mathbf{x}|).\end{aligned} \tag{1.94}$$

Se K_i, $i=1,2$, sono le componenti di $\mathbf{K}$, vale:

$$|K_i(\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^1(\mathbf{z}))-K_i(\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z})|\le c\frac{D(s)(1+|\mathbf{z}|)}{|\phi_s^2(\mathbf{x})-\rho_i|}, \tag{1.95}$$

dove ρ_i giace su $(\phi_s^1(\mathbf{z}),\phi_s^2(\mathbf{z}))$. Se $z\in S\cup R$, abbiamo $|\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z})|\ge 2D(s)(1+|\mathbf{x}|)$ e dunque

$$\begin{aligned}|\phi_s^2(\mathbf{x})-\rho_i| &\ge |\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z})|-|\phi_s^2(\mathbf{z})-\rho_i|\ge|\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z})|\\
&- D(s)(1+|\mathbf{x}|)\ge\frac{|\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z})|}{2}.\end{aligned} \tag{1.96}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}&\int_R |\mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^1(\mathbf{z}))-\mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z}))||\omega_0(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}\le c\|\omega_0\|_\infty D(s)(1+|\mathbf{x}|)\\
&\cdot\int_R \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z})|^2}\le c\|\omega_0\|_\infty(1+|\mathbf{x}|)D(s)\left(1+\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)\end{aligned} \tag{1.97}$$

(nell' ultima stima abbiamo usato $D(s)\ge\epsilon$). Ancora come nel lemmma 1.2, abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_S |\mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^1(\mathbf{z}))-\mathbf{K}(\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z}))||\omega_0(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}\le cD(s)\\
&\cdot\int_S \frac{(1+|\mathbf{z}|)|\omega_0(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}}{|\phi_s^2(\mathbf{x})-\phi_s^2(\mathbf{z})|^2}\le C(1+|\mathbf{x}|)D(s)\ln\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)\end{aligned} \tag{1.98}$$

(vedere la dimostrazione in appendice C). Per la definizione (1.84) e la stima (1.85), insieme alle disuguaglianze (1.87), (1.90), (1.91), (1.94), (1.97) e (1.98), vale

$$\forall s>t\quad D(s)\le\epsilon+c\ln\left(1+\frac{1}{\epsilon^2}\right)\int_t^s D(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.99}$$

(si noti che $D(t)=\epsilon$). Perciò, per il lemma di Gronwall, risulta:

$$D(s)\le\epsilon e^{(s-t)C\ln\left(1+\frac{1}{\epsilon^2}\right)}=\epsilon e^{(s-t)C4\ln\left(\left(1+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)} \tag{1.100}$$

Dunque, se $s-t<\frac{1}{4C}$ ed ϵ è piccolo, allora $D(s)<\sqrt{\epsilon}$. Proviamo adesso che per $t<\frac{1}{4C}$ D è minore di ogni $\delta>0$, e perciò è nullo. Dato che D è una funzione continua, assume il valore δ^2 prima di δ, al tempo q (stiamo considerando piccoli δ). Da (1.100), con $\epsilon = \delta^2$, otteniamo che $D(t) < \delta$ per tempi minori di $q + \frac{1}{4C}$ (e quindi minori di $\frac{1}{4C}$). Allo stesso modo, proviamo che, per tempi minori di $\frac{2}{4C}$, D è minore di ogni δ: infatti, se D assume il valore δ, allora, in un tempo precedente q, assume il valore δ^2; inoltre $q > \frac{1}{4C}$ perchè D è nullo prima. Ma, per (1.100), otteniamo che per tutti i tempi minori di $q + \frac{1}{4C}$ (e quindi tutti i tempi minori di $\frac{2}{4C}$) $D(t) < \delta$. Reiterando il procedimento, proviamo che $D(t) = 0$ $\forall t$ e perciò le soluzioni sono uguali. □

Appendici

A

Vogliamo provare che nell' insieme H vale:

$$|\phi_t^M(\mathbf{y})| > |\mathbf{y}|. \tag{1.101}$$

Siamo nel complementare di G, e perciò

$$2R_t^M\left(1 + |\phi_t^M(\mathbf{y})|^{\frac{1}{2}}\right) \geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|; \tag{1.102}$$

inoltre

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 2R_t^M(1 + |\mathbf{y}|)^{\frac{1}{2}} \tag{1.103}$$

perchè siamo nell' insieme complementare di A, da cui la tesi.

B

Vogliamo provare che $I(\omega_t, 0) = \int \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|}{|\phi_{-t}(\mathbf{y})|} \mathrm{d}\mathbf{y}$ è uniformemente limitata per $t < T$. Per prima cosa, da (1.27), possiamo vedere che esiste una costante c tale che

$$|\mathbf{x}| > 1 \Rightarrow |\phi_t(\mathbf{x})| < c|\mathbf{x}| \tag{1.104}$$

per $t < T$. Così vale:

$$\begin{aligned}\int \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}}{|\phi_{-t}(\mathbf{y})|} &\leq c\|\omega_0\|_\infty + \int_{|\phi_{-t}(\mathbf{y})|>1} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}}{\phi_{-t}(\mathbf{y})} \leq c\|\omega_0\|_\infty \\ &+ c\int_{|\phi_{-t}(\mathbf{y})|>1} \frac{|\omega_0(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \leq c(I(\omega_0, 0) + \|\omega_0\|_\infty).\end{aligned} \tag{1.105}$$

C

Vogliamo provare che

$$\int_S \frac{1 + |\mathbf{z}|}{|\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^2(\mathbf{z})|^2} |\omega_0(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z} \leq C \ln\left(1 + \frac{1}{\epsilon^2}\right)(1 + |\mathbf{x}|). \tag{1.106}$$

Dividiamo il dominio in V e nel suo insieme complementare in S, dove

$$V = \{\mathbf{z} : |\phi_s^2(\mathbf{z})| < 2|\phi_s^2(\mathbf{x})| < C(1 + |\mathbf{x}|)\}. \tag{1.107}$$

L' integrale su V è facile da controllare, perchè $|\mathbf{z}| < C(1+|\phi_s^2(\mathbf{z})|)$. Sull' insieme complementare risulta:

$$|\phi_s^2(\mathbf{x}) - \phi_s^2(\mathbf{z})| > \frac{1}{2}|\phi_s^2(\mathbf{z})| > C(1 + |\mathbf{z}|), \tag{1.108}$$

e perciò possiamo stimare entrambi i membri con $I(\omega_0, 0)$.

Osservazioni

Questo lavoro è riferito al caso dell' intero piano, ma si pone a questo punto una nuova questione. Assegnato un insieme connesso supponiamo che la velocità sia ben definita in un punto in questo insieme (come un integrale assolutamente convergente); si può cercare un risultato di esistenza ed unicità delle soluzioni nel caso di vorticità limitata. In [3] è stato provato questo risultato per piccoli settori del piano, e si congettura che valga per insieme generale connesso di $\mathbb{R}^2$.

Riferimenti bibliografici

[1] C. Bardos: *Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler in dimension deux*, Journ. Math. Anal. Appl. **40** (1972)

[2] D. Benedetto, C. Marchioro, M. Pulvirenti: *On the Euler Flow in* $\mathbb{R}^2$, Arch. Rational Mech. Anal. **123**:377–386 (1983)

[3] S. Caprino, C. Marchioro: *On the Euler Equation in an Unbounded Domain of the plane*, Journ. Math. Fluid Mech. (2008) in press

[4] T. Kato: *On classical solutions of a two–dimensional non–stationary Euler equation*, Arc. Rational Mech. Anal. **25**:188–200 (1967)

[5] P. L. Lions: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume 1 Incompressible Models*, Clarendon Press., Oxford (1996)

[6] C. Marchioro, M. Pulvirenti: *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Applied Math. Sciences **96** (1994)

[7] W. Wolibner: *An theorème sur l'existence du movement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long*, Math. Zam. **33**:698–726 (1933)

[8] V. I. Yudovich: *Non–stationary flows of an ideal incompressible liquid*, URRS Comput. Math. Phys. **3**:1407–1456 (1963)

♢

2 Limite di viscosità nulla per un anello di fumo con vorticità concentrata

Sommario:

Nel lavoro si considera un fluido incomprimibile con una configurazione a simmetria assiale e vorticità concentrata; è dimostrato in letteratura (vedere [3]) che se non si considera l' effetto della viscosità (cioè si usano le equazioni di Eulero), si ha un moto limite per vorticità che tendono ad essere sempre più concentrate. Noi ci proponiamo di dimostrare che anche assumendo viscosità sempre più basse e facendo il limite congiunto di vorticità concentrata e viscosità nulla si ottiene lo stesso moto limite (otteniamo però questo risultato solo se il limite congiunto rispetta una relazione che vedremo).

2.1 Introduzione e risultato principale

Consideriamo un fluido incomprimibile che si muove in $\mathbb{R}^3$ assumendo sulle condizioni iniziali delle simmetrie che assicurino l' esistenza di una soluzione globale sia per le equazioni di Eulero che per quelle di Navier-Stokes. E' un risultato classico che se si prende una soluzione regolare delle equazioni di Navier-Stokes e si fa il limite di viscosità che tende a 0 questa soluzione (che dipende dalla viscosità) tende alla soluzione delle equazioni di Eulero con stessi dati iniziali. Se però i dati iniziali presentano delle singolarità questa convergenza non è più ovvia (sul limite di viscosità nulla con vorticità concentrata si possono consultare [5] e [9]). Diventa perciò interessante studiare quando possiamo ottenere questa convergenza se consideriamo dati iniziali con vorticità concentrata, dato che questo spesso ha anche riscontri in natura.

Consideriamo dunque un fluido viscoso di densità unitaria che si muova in $\mathbb{R}^3$ seguendo le equazioni di Navier-Stokes:

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x},t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = -\nabla p(\mathbf{x},t) + \nu\triangle\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0 \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

e condizioni all' infinito, dove $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ è il campo di velocità, p è la pressione e $\nu \geq 0$ è la viscosità; le equazioni di Eulero sono le stesse ma con viscosità nulla.

Definiamo a questo punto la vorticità come

$$\omega = \nabla\wedge\mathbf{u} \tag{2.4}$$

Se assumiamo che il campo di velocità si annulli all' infinito le precedenti equazioni diventano:

$$\partial_t \omega(\mathbf{x},t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\omega(\mathbf{x},t) = (\omega(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \nu\triangle\omega(\mathbf{x},t) \tag{2.5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0 \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \tag{2.6}$$

$$\omega(\mathbf{x},0)=\omega_0(\mathbf{x})$$

dove

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})\wedge\omega(\mathbf{y},t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}. \tag{2.7}$$

.Consideriamo ora una configurazione iniziale con una simmetria assiale del campo di velocità, chiamata usualmente "anello di fumo"; data la natura del problema è bene mettersi in coordinate cilindriche (z,r,θ), con le quali avremo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=(u_z(z,r,t),u_r(z,r,t),0) \tag{2.8}$$

Si può notare che la dinamica conserva la simmetria e le equazioni diventano le seguenti:

$$\omega=\nabla\wedge\mathbf{u}=(0,0,\omega)=(0,0,\partial_z u_r-\partial_r u_z) \tag{2.9}$$

$$\partial_t\omega+(u_z\partial_z+u_r\partial_r)\omega-\frac{u_r\omega}{r}=\nu(\partial_z^2\omega+\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\omega)-\frac{\omega}{r^2} \tag{2.10}$$

$$\partial_z(ru_z)+\partial_r(ru_r)=0 \tag{2.11}$$

$$u_z(z,r,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{\infty}r'dr'\int_0^{\pi}\frac{d\theta\omega(z',r',t)(rcos\theta-r')}{((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos\theta))^{3/2}} \tag{2.12}$$

$$u_r(z,r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{\infty}r'dr'\int_0^{\pi}\frac{d\theta\omega(z',r',t)(z-z')}{((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos\theta))^{3/2}} \tag{2.13}$$

da cui

$$\frac{D}{dt}(\frac{\omega}{r})\equiv(\partial_t+\partial_z u_z+\partial_r u_r)(\frac{\omega}{r})=\nu((\partial_z^2+\partial_r^2)(\frac{\omega}{r})+\frac{3}{r}\partial_r(\frac{\omega}{r})) \tag{2.14}$$

. Possiamo ora scrivere una formulazione debole delle equazioni di Navier-Stokes integrando per parti e assumendo che ω vada velocemente a 0 per r che va a 0:

$$\frac{d}{dt}\omega_t[f]=\omega_t[u_z\partial_z f+u_r\partial_r f+\partial_t f]+\nu\omega_t\left[\partial_z^2 f+\partial_r^2 f-\frac{1}{r}\partial_r f\right] \tag{2.15}$$

dove $f(z,r,t)$ è una funzione test limitata e regolare e

$$\omega_t[f]=\int dzdr\omega(z,r,t)f(z,r,t) \tag{2.16}$$

. Si verifica facilmente la conservazione delle seguenti quantità:

$$M_0\equiv\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}dr\omega(z,r,t) \tag{2.17}$$

$$M_2\equiv\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}drr^2\omega(z,r,t) \tag{2.18}$$

. Come risultato principale di questo lavoro proveremo il seguente teorema:

Teorema 1

Sia il supporto della vorticità iniziale $\omega_{\sigma,\nu}(z,r,0)$ contenuto nella regione $\Lambda(0)$

$$\Lambda(0) \subset \Sigma(0, r_0 \mid \sigma), \quad r_0 > 0, \sigma < 1, \sigma < \frac{r_0}{2} \tag{2.19}$$

dove $\Sigma(0, r_0 \mid \sigma)$ è un disco di centro $(0, r_0)$ e raggio σ. Valga inoltre

$$\omega_{\sigma,\nu}(z,r,0) \geq 0 \tag{2.20}$$

$$\omega_{\sigma,\nu}(z,r,0) \leq \frac{M}{\sigma^2 \left|log\sigma\right|}, \quad 0 < M < \infty \tag{2.21}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr \omega_{\sigma,\nu}(z,r,0) = \frac{a}{\left|log\sigma\right|}, \quad a \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

. Allora, per

$$\nu < C\sigma^2 \left|log\sigma\right|^{\alpha}, \quad \alpha < 1 \tag{2.23}$$

esiste un punto (dipendente dal tempo) $(z_\sigma(t), r_\sigma(t))$ tale che, per ogni funzione continua limitata $f(z,r)$ e ogni fissato $T, \quad 0 \leq t \leq T$,

$$\left|log\sigma\right| \int_{\Sigma(z_\sigma, r_\sigma \mid D_\sigma)} dz dr \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t) f(z,r) \to a f(z_\sigma(t), r_\sigma(t)) \tag{2.24}$$

quando σ e ν tendono a 0, dove $D_\sigma = C\sigma exp(\left|log\sigma\right|^{\gamma}), \quad \alpha < \gamma < 1$ e $\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)$ è la dinamica con dati iniziali $\omega_{\sigma,\nu}(z,r,0)$ tramite le equazioni di Navier-Stokes (d' ora in poi indicheremo con C ogni costante indipendente da σ e da ν). Inoltre

$$(z_\sigma(t), r_\sigma(t)) \to (\frac{a}{4\pi r_0} t, r_0) \tag{2.25}$$

quando σ tende a 0.

Il teorema dimostra dunque che se la vorticità inizialmente è concentrata in un piccolo anello nella dinamica mantiene questa forma e tende a muoversi verticalmente a velocità costante dipendente dalla quantità iniziale di vorticità.

Osservazione: Analizziamo un attimo il risultato: è un risultato noto che in assenza di viscosità esistono configurazioni di vorticità iniziale che effettuano una traslazione nella direzione z mantenendo intatta la forma; è stato anche provato che se la vorticità iniziale è concentrata questo accade con qualsiasi forma (si deve riscalare perchè altrimenti non viene velocità finita); nel nostro teorema proviamo che anche considerando viscosità non nulla e facendone il limite si ottiene lo stesso risultato, il che non era ovvio a priori perchè il limite singolare della viscosità avrebbe potuto cambiare le caratteristiche del moto.

2.2 Dimostrazione

Useremo M_0, M_2 e l' energia E come una sorta di funzione di Liapunov; in coordinate cilindriche l' energia si esprime in questo modo:

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} rdr \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} r'dr' \times$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)cos(\theta-\theta')}{4\pi((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos(\theta-\theta')))^{1/2}} \tag{2.26}$$

. Studiamo l' evoluzione nel tempo:

$$\frac{d}{dt}E = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}\Sigma_{i,j=1}^3(\partial_j u_i)^2 = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \left|\omega\right|^2 =$$

$$-2\pi\nu \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} drr\omega^2 \geq -2\pi\nu M_2 \left\|\frac{\omega}{r}\right\|_{L_\infty} \tag{2.27}$$

ed è ovviamente negativa. E' noto che la quantità $\left\|\frac{\omega}{r}\right\|_{L_\infty}$ ha il suo massimo valore all' istante iniziale, ed utilizzando le ipotesi sui dati iniziali otteniamo

$$E(0) \geq E(t) \geq E(0) - Csup_{t\in(0,t)}\left|\frac{d}{dt}E\right| \geq E(0) - \frac{\nu}{\sigma^2\left|log\sigma\right|^2}C \tag{2.28}$$

. Per poter sfruttare questa stima scriviamo l' energia in modo più funzionale: definendo $\phi = \theta - \theta'$ e svolgendo l' integrale angolare otteniamo

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dr'\sqrt{rr'}\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$\int_0^{\pi} d\phi \frac{cos\phi}{(d+2(1-cos\phi))^2} \tag{2.29}$$

dove

$$d = \frac{(z-z')^2+(r-r')^2}{rr'} \tag{2.30}$$

. Considerando la configurazione iniziale con la vorticità più vicino possibile all' asse di simmetria (è il caso peggiore) otteniamo la stima (vedi Appendice D)

$$E(0) \geq \frac{a^2(r_0-\sigma)}{2\left|log\sigma\right|^2}(\left|log\sigma\right|+C) \tag{2.31}$$

e perciò, grazie alla stima 2.23, vale

$$E(t) \geq E(0) - \frac{\nu}{\sigma^2\left|log\sigma\right|^2}C \geq \frac{a^2(r_0-\sigma)}{2\left|log\sigma\right|^2}(\left|log\sigma\right| - C\left|log\sigma\right|^{\alpha}) \tag{2.32}$$

. In una regione limitata del piano una simile proprietà basterebbe a costringere la maggior parte della vorticità a restare concentrata, ma nel nostro caso a simmetria assiale un incremento di r nel supporto della vorticità provoca anche un incremento di E, così non possiamo a priori escludere un tale incremento che renderebbe possibile la stima 2.32 anche per configurazioni di vorticità non concentrate; per dimostrare come questo non sia in realtà possibile useremo la conservazione di M_2. Dobbiamo trovare anche una stima superiore dell' Energia con la stessa singolarità in σ della stima inferiore, così da poter confrontare le due stime nel limite; I termini dovuti a grandi valori di $(z-z')^2$ e $(r-r')^2$ possono essere stimati sfruttando la conservazione dei momenti: definendo $b=((z-z')^2+(r-r')^2)$ e $\chi(\Lambda)$ la funzione caratteristica dell' insieme Λ, e considderando le equazioni 2.29, 2.138 e 2.139 (appendice D) vale

$$E \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} rdr \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{0}^{\infty} dr' \sqrt{rr'}\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$(C+ln(2(rr')^{1/2}+(b+4rr')^{1/2})-\frac{1}{2}ln(b))<$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} rdr \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{0}^{\infty} dr' \sqrt{rr'}\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$(C+ln(2(b+4rr')^{1/2})-\frac{1}{2}ln(b))\leq$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} rdr \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{0}^{\infty} dr' \sqrt{rr'}\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$(C+(\frac{1}{2}ln(1+4rr'b^{-1}))\chi(b>1)+(\frac{1}{2}ln(1+4rr')-\frac{1}{2}ln(b))\chi(b\leq 1))<$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} rdr \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{0}^{\infty} dr' \sqrt{rr'}\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$(C+2rr'-\frac{1}{2}ln(b)\chi(b\leq 1)) \tag{2.33}$$

Si noti che abbiamo usato la disuguaglianza $ln(1+x)\leq x$ valida per tutte le x positive; sfruttando poi le banali disuguaglianze

$$\sqrt{rr'}<1+r^2r'^2 \qquad (rr')^{3/2}<1+r^2r'^2 \tag{2.34}$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} rdr \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{0}^{\infty} dr' \sqrt{rr'}\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)(C+2rr')<$$

$$C((\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} dr\omega(z,r,t))^2+(\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} drr^2\omega(z,r,t))^2)=$$

$$C(M_0^2+M_2^2) \tag{2.35}$$

Considerando poi le ipotesi iniziali si ha $M_2<(r_0+\sigma)^2$ e $M_0<C\frac{\alpha}{-ln\sigma}$ e dunque le equazioni 2.33 e 2.35 diventano

$$E<\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} rdr \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{0}^{\infty} dr' \sqrt{rr'}\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$(-\frac{1}{2}ln((z-z')^2+(r-r')^2)\chi((z-z')^2+(r-r')^2<1))+\frac{C}{(-ln\sigma)^2} \tag{2.36}$$

Nel seguito, per studiare questo integrale, lo trasformiamo in somma ricoprendo il semipiano (z,r) di quadratini di lato σ:

$$S_{ij}=\left\{z,r\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \mid \sigma i\leq z<(\sigma+1)i;\sigma j\leq r<(\sigma+1)j\right\} \qquad i\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{Z}^+\smile 0 \tag{2.37}$$

L' equazione 2.36 diventa così

$$E<\frac{C}{(-ln\sigma)^2}+\Sigma_{i\in\mathbb{Z}}\Sigma_{j=0}^{\infty}\Sigma_{h\in\mathbb{Z}}\Sigma_{k=0}^{\infty}E_{ijhk} \tag{2.38}$$

dove

$$E_{ijhk}=\frac{1}{2}\int_{S_{ij}}dzdr\int_{S_{hk}}dz'dr'\sqrt{rr'}\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$(-\frac{1}{2}ln((z-z')^2+(r-r')^2)\chi((z-z')^2+(r-r')^2<1)) \tag{2.39}$$

. Per studiare il termine E_{ijhk} notiamo che

$$E_{ijhk}<\frac{1}{2}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\int_{S_{ij}}dzdr\int_{S_{hk}}dz'dr'\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$(-\frac{1}{2}ln((z-z')^2+(r-r')^2)\chi((z-z')^2+(r-r')^2<1)) \tag{2.40}$$

; a questo punto dividiamo i casi in cui S_{ij} ed S_{hk} sono lo stesso quadratino o sono confinanti dal resto dei casi; nel primo caso massimizziamo l' integrale usando la condizione 2.21, il fatto che $\left\|\frac{\omega}{r}\right\|_{L_\infty}$ ha il suo massimo valore all' istante iniziale e facendo una ridistribuzione simmetrica della vorticità nel piano (z',r') attorno al punto (z,r):

$$\int_{S_{ij}}dzdr\int_{S_{hk}}dz'dr'\omega(z,r,t)\omega(z',r',t)\times$$

$$(-\frac{1}{2}ln((z-z')^2+(r-r')^2)\chi((z-z')^2+(r-r')^2<1))\leq$$

$$\int_{S_{ij}}dzdr\omega(z,r,t)\int_{\Sigma'}dz'dr'\frac{\mathrm{C}}{\sigma^2(-ln\sigma)}\frac{k+1}{j_0-1}\times$$

$$(-\frac{1}{2}ln((z-z')^2+(r-r')^2)) \tag{2.41}$$

dove j_0 è la parte intera di $r_0\sigma^{-1}$ e Σ' è un cerchio tale che

$$\int_{\Sigma'}dz'dr'\frac{\mathrm{C}}{\sigma^2(-ln\sigma)}\frac{k+1}{j_0-1}=\beta_{hk} \tag{2.42}$$

dove β_{hk} è la vorticità contenuta in S_{hk} (nell' equazione 2.41 abbiamo usato il fatto che $\left\|\frac{\omega}{r}\right\|_{L_\infty}$ ha il suo massimo valore all' istante iniziale). Eseguendo l' integrale in 2.41 riusciamo a stimarlo con

$$\int_{S_{ij}} dzdr\omega(z,r,t)\beta_{hk}(-ln(\sigma((-ln\sigma)\beta_{hk}(j_0-1))^{1/2}(M\pi(k+1))^{-1/2})+\frac{1}{2})\times$$

$$\beta_{ij}\beta_{hk}(-ln\sigma-\frac{1}{2}ln((-ln\sigma)\beta_{hk})+\frac{1}{2}(ln\sigma(k+1)-ln\sigma(j_0-1))+C)\leq$$

$$\beta_{ij}\beta_{hk}(-ln\sigma-\frac{1}{2}ln((-ln\sigma)\beta_{hk})+\frac{1}{2}ln\sigma(k+1)+C) \tag{2.43}$$

. Inseriamo l' equazione 2.43 in 2.40 e otteniamo

$$E_{ijhk}<\frac{1}{2}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta_{ij}\beta_{hk}(-ln\sigma)+$$

$$\frac{1}{2}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta_{ij}\beta_{hk}(\frac{1}{2}ln\sigma(k+1)+C)+$$

$$\frac{1}{2}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta_{ij}\beta_{hk}(-\frac{1}{2}ln((-ln\sigma)\beta_{hk})) \tag{2.44}$$

. Scambiamo i ruoli di ij e hk ed usiamo la disuguaglianza valida per i numeri positivi $x^{1/2}lnx<1+x^2$ negli ultimi due termini di 2.44, ottendo

$$E_{ijhk}<\frac{1}{2}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta_{ij}\beta_{hk}(-ln\sigma)+$$

$$C\beta_{hk}(1+\sigma^2(j+1)(k+1))(C-\frac{1}{2}ln((-ln\sigma)\beta_{hk})) \tag{2.45}$$

. Dobbiamo ora studiare E_{ijhk} quando i siti non sono confinanti, cioè $|i-h|>1$ o $|j-k|>1$; massimizziamo l' integrale prendendo il minimo della distanza fra i siti:

$$E_{ijhk}<\frac{1}{2}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta_{ij}\beta_{hk}(-ln\sigma-lnd_{ijhk}) \tag{2.46}$$

dove d_{ijhk} è il massimo tra σ^{-1} e la minima distanda tra S'_{ij} e S'_{hk}, con

$$S'_{ij}=\{z,r\mid i\leq z\leq i+1;j\leq r\leq j+\}1 \tag{2.47}$$

Mettendo le equazioni 2.45 e 2.46 nell' equazione 2.38 otteniamo

$$E<\frac{C}{(-ln\sigma)^2}+\frac{1}{2}(\Sigma_{i\in\mathbb{Z}}\Sigma_{j=0}^{\infty}\Sigma_{h\in\mathbb{Z}}\Sigma_{k=0}^{\infty}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta_{ij}\beta_{hk}(-ln\sigma)+$$

$$\Sigma_{|i-h|\leq1;|j-k|\leq1}C\beta_{hk}(1+\sigma^2(j+1)(k+1))(C-\frac{1}{2}ln((-ln\sigma)\beta_{hk}))+$$

$$\Sigma_{|i-h|>1o|j-k|>1}\frac{1}{2}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta_{ij}\beta_{hk}(-ln\sigma-lnd_{ijhk}) \tag{2.48}$$

. Il secondo termine è facilmente maggiorato da

$$\Sigma_{|i-h|\leq 1;|j-k|\leq 1} C\beta_{hk}(1+\sigma^2(j+1)(k+1))(C-\frac{1}{2}ln((-ln\sigma)\beta_{hk})) <$$

$$(\Sigma_{ij}(C\beta_{ij}+C\sigma^2 j^2\beta_{ij}))sup_{h,k}\beta_{hk}(C-\frac{1}{2}ln((-ln\sigma)\beta_{hk})) \tag{2.49}$$

. Siccome

$$\Sigma_{ij}\sigma^2 j^2\beta_{ij} < M_2 \tag{2.50}$$

$$\Sigma_{ij}\beta_{ij} = M_0 \tag{2.51}$$

$$\beta_{hk}(C-\frac{1}{2}ln((-ln\sigma)\beta_{hk}) < \frac{C}{-ln\sigma} \tag{2.52}$$

(ricordiamo che $|x|\,lnx$ è finito in $(0,1)$), usando le condizioni iniziali sui momenti otteniamo che D è maggiorato da $\frac{C}{(-ln\sigma)^2}$; concludendo abbiamo la stima

$$E < \frac{C}{(-ln\sigma)^2} + \frac{\alpha^2}{2(-ln\sigma)^2}\times$$

$$(\Sigma_{ijhk}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta'_{ij}\beta'_{hk}(-ln\sigma)+$$

$$\Sigma_{|i-h|>1o|j-k|>1}(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}\beta'_{ij}\beta'_{hk}(lnd_{ijhk})) \tag{2.53}$$

dove

$$\beta'_{ij} = \frac{-ln\sigma}{\alpha}\beta_{ij} \tag{2.54}$$

. Vogliamo ora stimare la radice $(\sigma^2(j+1)(k+1))^{1/2}$ con una combinazione di 1 e $(\sigma^2(j+1)(k+1))^2$, cosa fondamentale per come proseguiremo nella dimostrazione; osserviamo che

$$\sqrt{b} \leq \frac{1+b}{2} \leq \frac{1+(1+b^2)/2}{2} = \frac{3}{4}+\frac{b^2}{4} \qquad b \geq 0 \tag{2.55}$$

; si noti che si ottiene l' uguaglianza quando b tende a 1, cosa che, come vedremo, corrisponderà al nostro limite di anello piccolo; usiamo questa disuguaglianza per $b = \sigma^2 r_0^{-2}(j+1)(k+1)$ ottendo così

$$E < \frac{C}{(-ln\sigma)^2} + \frac{\alpha^2}{2(-ln\sigma)^2}\times$$

$$(\Sigma_{ijhk}(r_0\frac{3}{4}+\frac{r_0}{4}(\sigma^2 r_0^{-2}(j+1)(k+1))^2)\beta'_{ij}\beta'_{hk}(-ln\sigma)+$$

$$\Sigma_{|i-h|>1o|j-k|>1}(r_0\frac{3}{4}+\frac{r_0}{4}(\sigma^2 r_0^{-2}(j+1)(k+1))^2)\beta'_{ij}\beta'_{hk}(-lnd_{ijhk})) \tag{2.56}$$

. Confrontiamo l' equazione 2.56 con l' equazione 2.32; osserviamo che

$$\Sigma_{ij}\beta'_{ij} = 1 \tag{2.57}$$

$$\Sigma_{ijhk}\sigma^4(j+1)^2(k+1)^2\beta'_{ij}\beta'_{hk} = (\Sigma_{ij}\sigma^2 j^2\beta'_{ij} + 2\sigma\Sigma_{ij}\sigma\beta'_{ij} + \sigma^2)^2 \tag{2.58}$$

. Poichè

$$\Sigma_{ij}\sigma^2 j^2\beta'_{ij} \le (r_0+\sigma)^2 \tag{2.59}$$

$$\sigma\Sigma_{ij}\sigma\beta'_{ij} \le \sigma\Sigma_{ij}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma^2)\beta'_{ij} < C\sigma \tag{2.60}$$

si ha che i termini singolare nelle equazioni 2.56 e 2.32 in σ sono gli stessi; comparando gli altri termini otteniamo

$$\Sigma_{|i-h|>1o|j-k|>1}(r_0\frac{3}{4}+\frac{r_0}{4}(\sigma^2 r_0^{-2}(j+1)(k+1))^2)\beta'_{ij}\beta'_{hk}(-lnd_{ijhk}) < C\,|ln\sigma|^\alpha \tag{2.61}$$

. Questa stima ci consente di stabilire che la vorticità rimane concentrata: infatti, trascurando un termine positivo, otteniamo

$$\Sigma_{|i-h|>1o|j-k|>1}\beta'_{ij}\beta'_{hk}(-lnd_{ijhk}) < C\,|ln\sigma|^\alpha \tag{2.62}$$

e definendo d_{ijhk} come fatto in precedenza ma uguale a 1 quando $|i-h|\le 1$ o $|j-k|\le 1$ si ha

$$\Sigma_{ijhk}\beta'_{ij}\beta'_{hk}(-lnd_{ijhk}) < C\,|ln\sigma|^\alpha \tag{2.63}$$

; per semplificare riduciamoci ad un problema unidimensionale sommando su r (o su z): definiamo

$$\alpha_i = \Sigma_j\beta'_{ij} \tag{2.64}$$

$$d_{ih} = 1 \quad se\,|i-h|\le 1 \tag{2.65}$$

$$d_{ih} = |i-h| \quad se 1 < |i-h| < \sigma^{-1} \tag{2.66}$$

$$d_{ih} = \sigma^{-1} \quad altrimenti \tag{2.67}$$

così che l' equazione 2.63 diventi

$$\Sigma_{ih}\alpha_i\alpha_h lnd_{ih} < C\,|ln\sigma|^\alpha \tag{2.68}$$

. Enunciamo e dimostriamo ora un lemma che ci serve per completare la dimostrazione:

Lemma 1

Sia $\alpha_i \ge 0, \quad \Sigma_{i\in\mathbb{Z}}\alpha_i = 1$ e

$$\Sigma_{i,j}\alpha_i\alpha_j lnd_{ij} \le K \tag{2.69}$$

; allora esiste i' tale che $\forall L > \frac{1}{2}exp(4K)$

$$\Sigma_{|i-i'|\le 2L}\alpha_i \ge 1 - \frac{8K}{lnL} \tag{2.70}$$

.

Dimostrazione:

Dividiamo $\mathbb{Z}$ nelle tre regioni $i < i', i = i', i > i'$ dove i' è preso in maniera tale che la massa (si intende la sommatoria degli α_i) contenuta nella prima e quella contenuta nella terza regione siano entrambe minori o uguali di $\frac{1}{2}$; prendiamo ora un intervallo di centro i' e lunghezza $2L$ e chiamiamo m_1, m_2, m_3 le masse contenute rispettivamente a sinistra dell' intervallo, nell' intervallo $(i' - L \leq i \leq i' + L)$ ed a destra dell' intervallo; usando l' equazione 2.69 e trascurando la massa vicino ad i' otteniamo

$$2m_1m_3ln(2L) \leq C \tag{2.71}$$

. Poichè $(m_1 + m_2 + m_3)^2 = 1$ e sia m_1 che m_3 sono minori di $\frac{1}{2}$ si ha

$$1 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2m_2(m_1 + m_3) + 2m_1m_3 \leq$$

$$\frac{1}{2} + 2m_2^2 + 2m_2(m_1 + m_3) + 2m_1m_3 \leq 2m_2 + \frac{1}{2} + \frac{C}{ln(2L)} \tag{2.72}$$

cioè

$$m_2 \geq \frac{1}{4} - \frac{C}{2ln(2L)} \tag{2.73}$$

; scegliamo L in modo tale che

$$m_2 \geq \frac{1}{8} \tag{2.74}$$

e prendiamo un intervallo di centro i' e lunghezza $4L$ definendo le masse m_1', m_2', m_3' analogamente a prima con l' intervallo dimezzato; usando l' equazione 2.74 si ha $m_2' \geq m_2 \geq \frac{1}{8}$ e dall' equazione 2.69

$$\frac{1}{8}(m_1' + m_3')lnL \leq C \tag{2.75}$$

; ricordando che $(m_1' + m_2' + m_3') = 1$ abbiamo provato il lemma con $C' = 8C$.

Usiamo questo lemma scegliendo $L = Cexp(|ln\sigma|^\gamma) \quad \alpha < \gamma < 1$ e proviamo così che la maggior parte della vorticità resta concentrata in una striscia parallela all' asse z di larghezza $4L\sigma$; ripetiamo la stessa dimostrazione con r e dimostriamo in questo modo che la maggior parte della vorticità è concentrata in una regione di diametro

$$D_\sigma = C\sigma exp(|ln\sigma|^\gamma) \tag{2.76}$$

. Dobbiamo ora capire come si muove il centro di questa regione; vogliamo provare che il centro della regione di vorticità $(i'\sigma, j'\sigma)$ (con j' l' analogo di i' per la dimostrione nella direzione r) converge a $(z_0 + vt, r_0)$; la convergenza di $j'\sigma$ è più facile da provare e la faremo per prima procedendo per assurdo: l' equazione 2.61 implica che

$$\Sigma(\sigma^2 r_0^{-2}(j+1)(k+1))^2\beta_{ij}'\beta_{hk}'(lnd_{ijhk})) \leq C \tag{2.77}$$

. Denotando

$$\gamma_{ij} = \sigma^2 r_0^{-2} (j+1)^2 \beta'_{ij} \tag{2.78}$$

si ha

$$\Sigma\gamma_{ij} = 1 + termini\ che\ svaniscono \tag{2.79}$$

così, definendo $\gamma'_j = \Sigma_i \gamma_{ij}$, possiamo ripetere la dimostrazione di lemma1 e dimostrare l' esistenza di un j''attorno al quale la massa (intesa come sommatoria stavolta dei γ') rimane concentrata. Si osservi che j'' deve essere vicino a j' altrimenti l' interazione tra le particelle vicino a $\sigma j'$ e quelle vicino a $\sigma j''$viola l' equazione 2.61; infatti l' unica configurazione plausibile con l' equazione 2.62 e la costanza di M_2 con j'' lontano da j' si trova in una condizione impossibile: quando $j'\sigma$ tende a 0 e $j''\sigma$ tende a ∞, nel qual caso si viola l' equazione 2.38. Per dimostrare la convergenza di $i'\sigma$ introduciamo il centro di vorticità:

$$z'_\sigma(t) = \frac{\int_{-\infty}^{infty} dz \int_0^\infty dr \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t) z}{\int_{-\infty}^{infty} dz \int_0^\infty dr \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)} \tag{2.80}$$

e studiamo la sua derivata temporale; se riusciamo a dimostrare che questa converge a v e che $z'_\sigma(t)$ converge a $z_\sigma(t)$ otteniamo la nostra tesi. Si riscontrano problemi tecnici per la vorticità all' infinito e per piccoli valori di r, così è utile definire una nuova versione del centro di vorticità utilizzando due funzioni regolarizzanti che ora definiamo:

$$W(z) = 1 \qquad |z - z_0| \leq 3vT \tag{2.81}$$

$$W(z) = 0 \qquad |z - z_0| \geq 4vT \tag{2.82}$$

$$W(z)\ regolare\ non\ negativa\ altrove \tag{2.83}$$

dove $v = \alpha/4\pi r_0$, $|\triangle W(z)| \leq C$;

$$G(r) = 1 \qquad \frac{r_0}{2} \leq r \leq 2r_0 \tag{2.84}$$

$$G(r) = 0 \qquad r \leq \frac{r_0}{4}\ o\ r \geq 3r_0 \tag{2.85}$$

$$G(r)\ regolare\ non\ negativa\ altrove \tag{2.86}$$

e $|\triangle G(r)| \leq C$. Studiamo quindi la derivata temporale di

$$\zeta_{\sigma,\nu} = \frac{|ln\sigma|}{a} \int_{-\infty}^{infty} dz \int_0^\infty dr \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t) W(z) G(r) z \tag{2.87}$$

. Si ha

$$\dot{\zeta}_{\sigma,\nu} = A + B \tag{2.88}$$

con

$$A = \frac{|ln\sigma|}{a} \int_{-\infty}^{infty} dz \int_0^\infty dr \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)(W(z)G(r)u_z + zG(r)u_z\partial_z W(z) + zW(z)u_r\partial_r G(r)) \tag{2.89}$$

$$B=\nu\frac{|ln\sigma|}{a}\int_{-\infty}^{infty}dz\int_0^\infty dr\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)[2G(r)\partial_zW(z)+zG(r)\partial_z^2W(z)+zW(z)\partial_r^2G(r)-\frac{zW(z)}{r}\partial_rG(r)] \quad (2.90)$$

. Cominciamo studiando B: per le proprietà di W e G i termini tra parentesi quadre sono tutti limitati e così

$$B<\nu C\frac{|ln\sigma|}{a}M_0 \quad (2.91)$$

che converge a 0; per sudiare A troveremo una stima inferiore ed una stima superiore e mostreremo che nel limite coincidono: notiamo subito che

$$A=\frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^\infty dr\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^\infty dr'\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r'\times$$

$$(-(W(z)G(r)+zG(r)\partial_zW(z))(\int_0^\pi\frac{d\theta(rcos\theta-r')}{((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos\theta))^{3/2}})+$$

$$zW(z)\partial_rG(r)\int_0^\pi\frac{d\theta(z-z')cos\theta}{((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) \quad (2.92)$$

. Dividiamo l' integrale in (z',r') nelle parti

$$A_1=\left\{z,r\mid|z-z_0|\le 5vT,\frac{1}{8}r_0\le r\le 4r_0\right\} \quad (2.93)$$

$$A_2=A_1^C \quad (2.94)$$

con $v=\alpha/4\pi r_0$. Possiamo dimostrare (appendice A) che

$$\frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^\infty dr\int_{A_2dz'}dr'\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r'\times$$

$$(-(W(z)G(r)+zG(r)\partial_zW(z))(\int_0^\pi\frac{d\theta(rcos\theta-r')}{((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos\theta))^{3/2}})+$$

$$zW(z)\partial_rG(r)\int_0^\pi\frac{d\theta(z-z')cos\theta}{((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) \quad (2.95)$$

tende a 0; considerando poi che in A_2 si annullano $W(z)G(r)$, $zG(r)\partial_zW(z)$ e $zW(z)\partial_rG(r)$ otteniamo

$$\frac{d}{dt}\zeta_{\sigma,\nu}(t)=\frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi}\int_{A_1}dzdr\int_{A_1}dz'dr'\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r'\times$$

$$(-(W(z)G(r)+zG(r)\partial_zW(z))(\int_0^\pi\frac{d\theta(rcos\theta-r')}{((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos\theta))^{3/2}})+$$

$$zW(z)\partial_rG(r)\int_0^\pi\frac{d\theta(z-z')cos\theta}{((z-z')^2+(r-r')^2+2rr'(1-cos\theta))^{3/2}})+ \quad (2.96)$$

termini che si annullano nel limite. Supponiamo ora (lo dimostreremo in seguito) che il supporto del disco di equazione 2.24 sia contenuto in A_3:

$$\Sigma(z_\sigma(t), r_\sigma(t) \mid D_\sigma) \subset A_3 = \left\{ z, r \mid |z - z_0| \leq 2vT, |r - r_0| \leq \frac{r_0}{4} \right\} \tag{2.97}$$

. Usando l' equazione 2.97 possiamo provare (appendice B) che

$$\frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi} \int_{A_1} dzdr \int_{A_1} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r' \times$$

$$(-zG(r)\partial_z W(z)(\int_0^\pi \frac{d\theta(rcos\theta - r')}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) +$$

$$zW(z)\partial_r G(r) \int_0^\pi \frac{d\theta(z-z')cos\theta}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) \tag{2.98}$$

tende a 0 con σ, per cui

$$\frac{d}{dt}\zeta_{\sigma,\nu}(t) = \frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi} \int_{A_1} dzdr \int_{A_1} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r' \times$$

$$(-W(z)G(r) \int_0^\pi \frac{d\theta(rcos\theta - r')}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) + \tag{2.99}$$

termini che si annullano nel limite. Possiamo scrivere

$$rcos\theta - r' = (r - r')cos\theta - r'(1 - cos\theta) \tag{2.100}$$

. Usando lo stesso metodo di appendice B possiamo provare che

$$\frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi} \int_{A_1} dzdr \int_{A_1} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r' \times$$

$$(W(z)G(r)(r-r') \int_0^\pi \frac{d\theta cos\theta}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) \tag{2.101}$$

tende a 0 con σ, da cui

$$\frac{d}{dt}\zeta_{\sigma,\nu}(t) = \frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi} \int_{A_1} dzdr \int_{A_1} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r' \times$$

$$(W(z)G(r) \int_0^\pi \frac{d\theta(1-cos\theta)}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) + \tag{2.102}$$

termini che si annullano nel limite. Usiamo la stima 2.136 di appendice C: l' equazione 2.102 diventa

$$\frac{d}{dt}\zeta_{\sigma,\nu}(t) = \frac{ln\sigma}{\alpha 8\pi} \int_{A_1} dzdr \int_{A_1} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r'^{1/2}r^{3/2} \times$$

$$(W(z)G(r)(ln((z-z')^2 + (r-r')^2) + \tag{2.103}$$

termini che si annullano nel limite. Definiamo l' insieme

$$A_4 = \Big\{ z, r \mid ((z - z_\sigma(t))^2 + (r - r_\sigma(t))^2)^{1/2} < \sigma ln\sigma \Big\} \tag{2.104}$$

dove z_σ ed r_σ sono definiti in 2.24; con lo stesso metodo di appendice C e l' ipotesi 2.97 possiamo facilmente provare che il contributo dell' insieme $(A_1 \times A_1 - A_4 \times A_4)$ all' integrale svanisce nel limite, e perciò

$$\frac{d}{dt}\zeta_{\sigma,\nu}(t) = \frac{ln\sigma}{\alpha 8\pi}\int_{A_4} dzdr \int_{A_4} dz'dr'\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r'^{1/2}r^{3/2}\times$$
$$(W(z)G(r)(ln((z-z')^2 + (r-r')^2)+ \tag{2.105}$$

termini che si annullano nel limite; stimiamo l' integrale in 2.105: prendiamo il minimo di $-(ln((z-z')^2 + (r-r')^2)$ e otteniamo una stima inferiore

$$-\int_{A_4} dzdr \int_{A_4} dz'dr'\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r'^{1/2}r^{3/2}(ln((z-z')^2+(r-r')^2) >$$
$$-\frac{(r_\sigma(t) - \sigma(-ln\sigma))^{1/2}}{(r_\sigma(t) + \sigma(-ln\sigma))^{3/2}} ln(4\sigma^2(ln\sigma)^2))(\int_{A_4} dzdr\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t))^2 \tag{2.106}$$

. Per trovare una stima superiore usiamo la condizione 2.21 e effettuiamo un riordinamento simmetrico della vorticità in $(z'.r')$ intorno al punto (z,r) come in 2.41 ottenendo così

$$-\int_{A_4} dzdr \int_{A_4} dz'dr'\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r'^{1/2}r^{3/2}(ln((z-z')^2+(r-r')^2) <$$
$$-\frac{(r_\sigma(t) + \sigma(-ln\sigma))^{1/2}}{(r_\sigma(t) - \sigma(-ln\sigma))^{3/2}}(\int_{A_4} dzdr\omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\int_{\Sigma''} dz''dr''ln(z''^2 + r''^2)\frac{M}{\sigma^2(-ln\sigma)}\eta \tag{2.107}$$

dove

$$\Sigma'' = \Big\{ z'', r'' \mid z''^2 + r''^2 < \frac{\alpha\sigma^2}{\pi M} \Big\} \tag{2.108}$$

e $\eta \to 1$ quando $\sigma \to 0$. Eseguendo l' ultimo integrale osserviamo che nel limite la stima inferiore e quella superiore coincidono (si noti che questo dipende dal fatto che D_σ va a 0 abbastanza velocemente) e perciò si ha

$$\frac{d}{dt}\zeta_{\sigma,\nu}(t) \to \frac{\alpha}{4\pi r_0} \tag{2.109}$$

e dunque

$$\zeta_{\sigma,\nu}(t) \to z_0 + vt \qquad v = \frac{\alpha}{4\pi r_0} \tag{2.110}$$

. Ovviamente

$$|\zeta_\sigma(t) - z_\sigma(t)| \to 0 \tag{2.111}$$

e così l' ipotesi 2.97 resta valida ed abbiamo ottenuta la nostra tesi.

Appendice A

Considerando la definizione di W e G l' integrando dell' equazione 2.95 si annula quando $(z,r) \notin A_5$, dove

$$A_5 = \left\{ z, r \mid |z - z_0| \leq 4vT, \frac{1}{4} r_0 \leq r \leq 3r_0 \right\} \tag{2.112}$$

. Se $(z,r) \in A_5$ e $(z',r') \in A_2$ si ha

$$((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta)) > C \tag{2.113}$$

e quindi

$$\frac{|cos\theta(z-z')|}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}} < C \tag{2.114}$$

. Dunque

$$| \frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi} \int_{\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr \int_{A_2} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma\nu}(z',r',t)r' \times$$

$$(-(W(z)G(r) + zG(r)\partial_z W(z))(\int_0^{\pi} \frac{d\theta(rcos\theta - r')}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) +$$

$$zW(z)\partial_r G(r) \int_0^{\pi} \frac{d\theta(z-z')cos\theta}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}}) |<$$

$$C(-ln\sigma) \int_{A_5} dzdr \int_{A_2} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)(r'^2 + Cr') <$$

$$C(-ln\sigma)M_0(M_0 + CM_2) \to 0 \tag{2.115}$$

Appendice B

Considerando che

$$rcos\theta - r' = (r-r')cos\theta - r'(1-cos\theta) \tag{2.116}$$

l' equazione 2.98 diventa

$$2.98 = D_1 + D_2 \tag{2.117}$$

dove

$$D_1 = \frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi} \int_{A_1} dzdr \int_{A_1} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t) \times$$

$$[-r'zG(r)\partial_z W(z)(r-r') + r'zW(z)\partial_r G(r)(z-z')] \times$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{cos\theta}{((z-z')^2 + (r-r')^2 + 2rr'(1-cos\theta))^{3/2}} \tag{2.118}$$

.

$$D_2 = \frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi} \int_{A_1} dzdr \int_{A_1} dz'dr' \omega_{\sigma,\nu}(z,r,t)\omega_{\sigma,\nu}(z',r',t)r'^2 zG(r)\partial_z W(z) \times$$

$$\int_0^\pi d\theta \frac{1 - cos\theta}{((z - z')^2 + (r - r')^2 + 2rr'(1 - cos\theta))^{3/2}} \tag{2.119}$$

. Studiamo prima D_1; scambiando (z, r) con (z', r') i termini nelle parentesi quadre diventano

$$|-r'zG(r)\partial_z W(z)(r - r') + r'zW(z)\partial_r G(r)(z - z')| =$$
$$\frac{1}{2} \mid (-r'zG(r)\partial_z W(z) + rz'G(r')\partial_z W(z'))(r - r') +$$
$$(r'zW(z)\partial_r G(r) - rz'W(z')\partial_r G(r'))(z - z') \mid =$$
$$\frac{1}{2} \mid ((r - r')zG(r)\partial_z W(z) - (z - z')rG(r)\partial_z W(z) -$$
$$(G(r) - G(r'))z'r\partial_z W(z) - (\partial_z W(z) - \partial_{z'}(W(z'))z'rG(r'))(r - r') +$$
$$(-(r - r')zW(z)\partial_r G(r) + (z - z')rW(z)\partial_r G(r) +$$
$$(W(z) - W(z'))z'r\partial_r G(r) + (\partial_r G(r) - \partial_{r'} G(r'))z'rW(z'))(z - z') \mid \leq$$
$$C((z - z'^2) + (r - r'^2)) \tag{2.120}$$

dove abbiamo usato le proprietà di W e G; sfruttano a questo punto 2.129 otteniamo

$$D_1 < C(-ln\sigma)(\int_{A_1} dzdr\omega_{\sigma\nu}(z, r, t))^2 \to 0$$

. Studiamo ora D_2; sfruttando 2.136 abbiamo

$$D_2 < C\frac{-ln\sigma}{\alpha 2\pi} \int_{A_1} dzdr \int_{A_1} dz'dr'\omega_{\sigma\nu}(z, r, t)\omega_{\sigma\nu}(z', r', t) \times$$
$$\big\{-ln((z - z'^2) + (r - r'^2)) + C\big\} \tag{2.121}$$

; maggioriamo l' integrale come in 2.41 e osserviamo che nel supporto di $\partial_z W(z)$ vale $|z - z_0| > 3vT$; considerando 2.97

$$-ln\sigma \int_{|z-z_0|>3vT} dz \int_0^\infty dr\omega_{\sigma,\nu}(z, r, t) < \frac{C}{ln(-ln\sigma)} \tag{2.122}$$

e dunque

$$D_2 \to 0 \tag{2.123}$$

.

Appendice C

Stimiamo i due integrali

$$I_1 = \int_0^{\pi} d\theta \frac{cos\theta}{\{\alpha + 2\beta(1 - cos\theta)\}^{3/2}} \tag{2.124}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1 - cos\theta}{\{\alpha + 2\beta(1 - cos\theta)\}^{3/2}} \tag{2.125}$$

. Studiamo prima I_1: trascurando un termine negativo otteniamo

$$I_1 < \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{cos\theta}{\{\alpha + 2\beta(1 - cos\theta)\}^{3/2}} \tag{2.126}$$

; nel dominio d' integrazione vale $cos\theta \leq cos\frac{\theta}{2}$, e così

$$I_1 < \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{cos\frac{\theta}{2}}{\{\alpha + 4\beta sin^2\frac{\theta}{2}\}^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha(\alpha + 2\beta)^{3/2}} \tag{2.127}$$

dato che

$$\int \frac{dy}{\{\alpha + \beta y^2\}^{3/2}} = \frac{y}{\alpha(\alpha + 2\beta)^{3/2}} \tag{2.128}$$

e così, denotando $\alpha = (z - z')^2 + (r - r')^2$ e $\beta = rr'$, in $A_1 \times A_1$

$$I_1 < \frac{C}{\alpha} \tag{2.129}$$

. Passiamo ora a studiare A_2: vale

$$1 - cos\theta = 2sin^2\frac{\theta}{2}(cos\frac{\theta}{2} + (1 - cos\frac{\theta}{2})) \tag{2.130}$$

e perciò abbiamo

$$2sin^2\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} \leq 1 - cos\theta \leq 2sin^2\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} + 2sin^2\frac{\theta}{2}(1 - cos^2\frac{\theta}{2}) =$$

$$2sin^2\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} + 2sin^4\frac{\theta}{2} \tag{2.131}$$

. L' integrale

$$\int_0^{\pi} d\theta \frac{2sin^4\frac{\theta}{2}}{\{\alpha + 2\beta(1 - cos\theta)\}^{3/2}} \tag{2.132}$$

è banalmente limitato in $A_1 \times A_1$e ci resta dunque da studiare solamente l' integrale

$$I_3 = \int_0^{\pi} d\theta \frac{2sin^2\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}}{\{\alpha + 2\beta(1 - cos\theta)\}^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_0^2 dy \frac{y^2}{\{\alpha + \beta y^2\}^{3/2}} \tag{2.133}$$

; dato che

$$\int dy \frac{y^2}{\{\alpha+\beta y^2\}^{3/2}} = -\frac{y}{\beta(\alpha+\beta y^2)^{1/2}} + \frac{1}{\beta^{3/2}} ln(y\sqrt{\beta} + (\alpha+\beta y^2)^{1/2}) \quad (2.134)$$

vale

$$I_3 = -\frac{1}{\beta(\alpha+\beta 4)^{1/2}} + \frac{1}{2\beta^{3/2}} ln(2\sqrt{\beta} + (\alpha+\beta 4)^{1/2}) - \frac{1}{2\beta^{3/2}} ln(\sqrt{\alpha}) \quad (2.135)$$

e così, denotando $\alpha = (z-z')^2 + (r-r')^2$ e $\beta = rr'$, in $A_1 \times A_1$vale

$$\frac{-ln\alpha}{4\beta^{3/2}} + C < I_2 < \frac{-ln\alpha}{4\beta^{3/2}} + C \quad (2.136)$$

.

Appendice D

Studiamo per prima cosa il termine angolare:

$$\int_0^\pi d\phi \frac{cos\phi}{(d+2(1-cos\phi))^2} = \int_0^\pi d\phi \frac{cos\frac{\phi}{2} + (cos\phi - cos\frac{\phi}{2})}{(d+4sin^2(\frac{\phi}{2}))^{1/2}} \quad (2.137)$$

; calcoliamo esattemente il primo termine

$$\int_0^\pi d\phi \frac{cos\frac{\phi}{2}}{(d+4sin^2(\frac{\phi}{2}))^{1/2}} = ln(2+\sqrt{d+4}) - 1/2lnd \quad (2.138)$$

e stimiamo il secondo:

$$\left| \int_0^\pi d\phi \frac{cos\phi - cos\frac{\phi}{2}}{(d+4sin^2(\frac{\phi}{2}))^{1/2}} \right| \leq \int_0^\pi d\phi \frac{\left|cos\phi - cos\frac{\phi}{2}\right|}{2sin(\phi/2)} < C \quad (2.139)$$

. Considerando poi che le condizioni iniziali implicano $\sqrt{rr'} \geq (r_0 - \sigma)$ otteniamo la tesi.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ambrosetti, M. Struwe *"Existence of steady rings in an ideal fluid"*, Arch. Ration. Mech. Anal. 108, pag. 97-108 (1989)

[2] K. G. Batchelor *"An introduction to Fluid Dynamics"* Cambridge University Press, Cambridge (1967)

[3] D. Benedetto, E. Caglioti, C. Marchioro *"On the motion of a vortex ring with sharply concentrated vorticity"*, Math. Methods Appl. Sci. 23, pag. 147-169 (2000)

[4] L. E.Fraenkel, M. S. Berger *"A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid"*, Acta Math. 132, pag. 13-51 (1974)

[5] T. Gallay *"Interaction of vortices in viscous planar flows (2009, preprint)*

[6] O. A. Ladyzhenskaya *"Unique solvability in large of a three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry"*, Zapisky Nauchnych Sem. LOMI 7, pag. 155-177 (1968)

[7] C. Marchioro *"On the vanishing viscosity limit for two-dimensional Navier-Stokes equations with singular initial data"*,Math. Methods Appl. Sci. 12, pag. 463-470 (1990)

[8] C. Marchioro *"On the inviscid limit for a fluid with a concentrated vorticity"*, Commun. Math. Phys. 196, pag. 53-65 (1998)

[9] C. Marchioro *"Vanishing viscosity limit for an incompressible fluid with concentrated vorticity"*, J. Math. Phys. 48 (065302), pag.1-16 (2007)

[10] C. Marchioro, P. Negrini *"On a dynamical system related to fluid mechanics"*,Nonlinear 473-499 (1999)Differential Equantions and Applications 6, pag. 473-499 (1999)

[11] C. Marchioro, M. Pulvirenti *"Mathematical theory of incompressible nonviscousfluids"*, in: Applied Mathematical Sciences, vol. 96, Springer, New York (1994)

[12] P. K. Newton *"The N-vortex problem, analytical techniques"*, in: Applied Mathematical Sciences, vol. 145, Springer, New York (2001)

[13] K. Shariff, A.Leonard *"Vortex rings"*, Ann. Rev. Fluid Mech. 24, pag. 235–279 (1992)

[14] B. Turkington *"On the evolution of a concentrated vortex in an ideal fluid"*, Arch. Ration. Mech. Anal. 97, pag. 75–87 (1987)

[15] M. Ukhovskii, V. Yudovitch *"Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space"*, J. Appl. Math. Mech. 32, pag. 52–69 (1968)