Tesi di Dottorato

Francesca Gladiali

Proprietà qualitative e non esistenza di soluzioni positive per alcuni problemi ellittici nn lineari

Dottorato in Matematica, Roma «La Sapienza» (2002).
<http://www.bdim.eu/item?id=tesi_2002_GladialiFrancesca_1>

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
"LA SAPIENZA"
Dottorato di Ricerca in Matematica
XIII ciclo

PROPRIETÀ QUALITATIVE E NON ESISTENZA DI SOLUZIONI POSITIVE PER ALCUNI PROBLEMI ELLITTICI NON LINEARI

Francesca Gladiali

Anno Accademico 2001-2002

a mia figlia

Ringraziamenti

Questa tesi si è svolta presso il Dipartimento di Matematica 'G.Castelnuovo' dell'Università 'La Sapienza' di Roma, sotto la guida della prof.ssa Filomena Pacella. La ringrazio per avermi proposto argomenti interessanti, per avermi seguito e incentivato durante tutto il periodo. La ringrazio anche per qualche utile consiglio personale.

I risultati del secondo capitolo nascono da una collaborazione col prof. Porru dell'Università di Cagliari, già mio relatore della tesi di laurea. Lo ringrazio per avermi indirizzato verso questa strada e avermi seguito per il primo periodo.

I risultati del primo capitolo sono stati ottenuti in collaborazione con Lucio Damascelli dell'Università di Roma 'Tor Vergata'. Lo ringrazio per la sua gentilezza e disponibilità.

Ringrazio Massimo Grossi per varie utili spiegazioni.

Ringrazio la mia famiglia per avermi sempre sostenuto, anche economicamente.

Ringrazio mia nonna Matilde per avermi seguito nei miei percorsi.

Ringrazio Fiorella per la sua sensibilità.

Ringrazio Pinuccia per essere così vitale.

Ringrazio Antonello che mi ha insegnato tante cose.

Ringrazio tutti i ragazzi del dottorato con cui ho condiviso momenti belli.

Ringrazio in particolare mio marito che mi è sempre vicino e mia figlia Chiara che sorride sempre.

Indice

INTRODUZIONE

Questa tesi concerne lo studio di alcuni problemi ellittici non lineari del secondo ordine. In particolare sono state studiate esistenza, non esistenza e alcune proprietà qualitative, come il comportamento vicino al bordo, di soluzioni positive di alcune equazioni in domini limitati e non, con diverse condizioni al bordo. Il lavoro è strutturato in 3 capitoli in cui ci siamo occupati di problemi di diversa natura.

Nel primo capitolo mostriamo alcune proprietà di simmetria, da cui discende la non esistenza di soluzioni deboli di un problema ellittico nel semispazio con condizioni miste (di tipo Neumann-Dirichlet) sulla frontiera. Tali risultati estendono al caso del problema misto alcuni risultati noti per tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$ e per il semispazio con condizione di Dirichlet. Il metodo usato, benché si basi su tecniche già esistenti in letteratura è nuovo e consente di trattare in maniera unificata anche i casi già noti. I risultati sono contenuti nell'articolo [**DG**].

Nel secondo capitolo ci occupiamo di un problema singolare nella nonlinearità, per un operatore ellittico, eventualmente degenere, in un dominio limitato. Si trova una stima del comportamento della soluzione vicino al bordo che non dipende dal particolare dominio considerato, nemmeno dalla dimensione N, ma solo dalla distanza dalla frontiera. Tale stima estende al secondo ordine alcuni risultati precedenti per il primo ordine. Inoltre è studiata la concavità delle soluzioni in domini convessi ed alcuni risultati ottimali sono mostrati. I risultati di questo capitolo sono contenuti nei due articoli [**BGP**] e [**G**].

Nel terzo capitolo ci occupiamo di mostrare l'esistenza di soluzioni positive per un operatore ellittico degenere in domini approssimanti un dominio fissato. Più precisamente se Ω è un aperto (eventualmente non connesso) e Ω_n è una successione di domini che approssima Ω, dall'esistenza di una soluzione positiva in Ω ricaviamo l'esistenza in Ω_n. Come applicazione questo fornisce un risultato di molteplicità di soluzioni in alcuni domini, eventualmente stellati.

Passiamo a spiegare in dettaglio il contenuto dei singoli capitoli.

* * *

CAPITOLO I - In un celebre articolo [**GS**] Gidas e Spruck hanno dimostrato, insieme con altri risultati, un Teorema di Liouville per equazioni ellittiche sottocritiche. Hanno mostrato cioè che non esistono soluzioni di classe C^2 (senza ipotesi di decadimento all'infinito) per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{0.1}$$

se $N \geq 3$ e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.

I Teoremi di tipo Liouville sono importanti in molte situazioni, per esempio per trovare stime *a priori* per soluzioni dello stesso problema in domini limitati (vedi per esempio [**GS2**]).

In seguito Chen e Li [**CLi**] hanno semplificato la dimostrazione di Gidas e Spruck utilizzando la trasformata di Kelvin e il metodo dello spostamento di iperpiani (moving plane) di Alexandrov-Serrin. La stessa dimostrazione mostra anche che se $p = \frac{N+2}{N-2}$ le uniche soluzioni di (0.1) sono le ben note funzioni $u(x) = \frac{[N(N-2)\lambda^2]^{\frac{N-2}{4}}}{(\lambda^2+|x-x^0|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$ per qualche $\lambda > 0$ e $x^0 \in \mathbb{R}^N$. Quest'ultimo risultato è stato dimostrato da Gidas, Ni e Nirenberg [**GNN2**] per soluzioni con un certo decadimento all'infinito e da Caffarelli, Gidas e Spruck [**CGS**] senza ipotesi di decadimento.

La trasformata di Kelvin e il metodo dello spostamento di iperpiani sono stati utilizzati da Gidas e Spruck anche in un secondo articolo [**GS2**] per provare che non esistono soluzioni non banali del problema di Dirichlet nel semispazio, cioè soluzioni di

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \mathbb{R}^N_+ = \{x = (x^1, \dots, x^N) : x^N > 0\} \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases} \tag{0.2}$$

se $N \geq 3$ e $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$. Utilizzando entrambi i Teoremi di Liouville gli autori ottengono una stima a priori per soluzioni di equazioni ellittiche semilineari (con dato al bordo di Dirichlet), con esponente sottocritico in domini limitati.

Per quanto riguarda il problema analogo nel semispazio con condizioni miste (Neumann-Dirichlet) Berestycki, Grossi e Pacella [**BGPa**] hanno provato che non esistono soluzioni non banali nello spazio $D^{1,2}(\mathbb{R}^N_+)$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 = \{x = (x^1, \dots, x^N) : x^N = 0, x^1 > 0\} \\ \frac{\partial u}{\partial x^N} = 0 & \text{su } \Gamma_1 = \{x = (x^1, \dots, x^N) : x^N = 0, x^1 < 0\} \end{cases} \tag{0.3}$$

dove $N \geq 3$, $p = \frac{N+2}{N-2}$. Anche tale risultato è stato ottenuto mediante una tecnica basata sulla trasformata di Kelvin e sullo spostamento di iperpiani. In [**BGPa**] si utilizza inoltre l'ipotesi che la soluzione stia nello spazio di Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N_+)$ e quindi che abbia un certo decadimento all'infinito. Anche nel recente articolo [**CP**], è mostrata la non esistenza di soluzioni deboli per il problema (0.3) tali che $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $0 \leq u(x) \leq 1 = u(0, \dots, 0, 1)$ che abbiano un punto di massimo sull'iperpiano $x^1 = 0$. Da tale risultato di non esistenza gli autori ricavano inoltre una stima L^∞ per soluzioni dello stesso problema in un dominio limitato.

La tecnica basata sulla trasformata di Kelvin e il metodo del moving plane è stata usata da diversi autori anche per provare risultati di tipo Liouville per soluzioni non negative di equazioni ellittiche con un termine non lineare più generale, in $\mathbb{R}^N$ e nel semispazio con condizione di Dirichlet o Neumann (vedi per esempio [**B**], [**CLn**], [**LZ**], [**T**], [**T2**]).

In particolare Chen e Lin [**CLn**] hanno dimostrato che se $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ verifica le seguenti ipotesi

1. $f(s) \geq 0$
2. f è non decrescente
3. f è localmente Lipschitziana
4. $\frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$ è non crescente in $(0, +\infty)$.

allora non esistono soluzioni non banali del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{0.4}$$

a meno che non esista una costante $l \geq 0$ tale che f abbia la forma $f(t) = l\, t^{\frac{N+2}{N-2}}$. L'ipotesi 2 è stata poi eliminata da Bianchi [**B**] che ha trattato anche le nonlinearità dipendenti da $|x|$ e altri problemi.

Chiamiamo sottocritica o critica una funzione che verifica la proprietà 4.

Sempre utilizzando la stessa tecnica, Lou e Zhu [**LZ**] hanno studiato il problema nel semispazio con condizione di Neumann non lineare e hanno anche considerato il problema (0.4) quando la non linearità ha il segno opposto, cioè $f(u) = -u^p$ dimostrando che non ci sono soluzioni per ogni $p > 1$.

In tutti questi articoli è stato usato il metodo dello spostamento di iperpiani e la trasformata di Kelvin. Una delle difficoltà consiste nel trattare il punto singolare della funzione trasformata. Per questo si applica il moving plane non a tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$, ma a $\mathbb{R}^N \setminus B$, dove B è una palla, per esempio di raggio unitario, centrata nel punto di singolarità. Tale punto viene trattato con degli opportuni principi di massimo per soluzioni singolari di disequazioni differenziali in una palla privata del centro, (vedi [**PW**]). Si trova cioè che la funzione trasformata che chiamiamo v è strettamente positiva sul bordo della palla B e, tramite il principio di massimo, tale stima si riesce ad estendere a tutta la palla privata del centro. Questo permette di applicare il moving plane solo a $\mathbb{R}^N \setminus B$. Per questo motivo la condizione 1 appare in alcuni degli articoli precedentemente citati. Sempre per questo in [**LZ**] diverse forme del principio di massimo sono necessarie nel trattare nonlinearità negative e sopralineari. Questo è anche il motivo per cui il metodo non si può ripetere nel caso del problema nel semispazio con condizioni di Dirichlet al bordo. Infatti la singolarità va a finire sulla frontiera, dove la v si annulla, e quindi non è possibile trovare una stima dal basso per la v in modo che sia strettamente positiva in un intorno di tale singolarità. Sempre per questo, in [**GS2**], per trattare tale problema hanno usato una diversa trasformata di Kelvin che trasformava il semispazio $\mathbb{R}^N_+$ in una palla.

Un'altra tecnica usata insieme al metodo del moving plane per ottenere simmetria delle soluzioni e basata su diseguaglianze integrali, è stata usata da Terracini in due articoli [**T**], [**T2**] dove ha considerato problemi singolari in $\mathbb{R}^N$ o nel semispazio con condizione di Neumann non lineare sulla frontiera (vedi anche [**ADG**] e [**DaR**] dove questa tecnica è stata usata per studiare la simmetria di soluzioni positive di equazioni ellittiche su varietà o riguardanti il p-laplaciano.)

Anche in [**DG**] utilizziamo il moving plane e la trasformata di Kelvin per provare simmetria e poi non esistenza per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 = \{x = (x^1, \dots, x^N) : x^N = 0, x^1 > 0\} \\ \frac{\partial u}{\partial x^N} = 0 & \text{su } \Gamma_1 = \{x = (x^1, \dots, x^N) : x^N = 0, x^1 < 0\}. \end{cases} \tag{0.5}$$

Per trattare il punto singolare della funzione trasformata usiamo, anziché un principio di massimo, una funzione *cut-off*, come in [**T2**]. Questo ci permette di trattare con la stessa tecnica sia il problema in tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$, sia quello nel semispazio con condizione di Dirichlet e, in modo parziale, anche il semispazio con condizioni miste. Tale tecnica inoltre mostra che solo l'ipotesi 4 è necessaria per provare la non esistenza in $\mathbb{R}^N$, migliorando leggermente i risultati noti.

Per quanto riguarda il semispazio con condizioni miste questa tecnica permette di mostrare, sempre supponendo f sottocritica o critica, che la soluzione dipende solo da due variabili x_1, x_N, ma non è sufficiente a provare la non esistenza. Infatti ci permette di provare la monotonia della soluzione nella direzione x_1 solo fino all'iperpiano $x^1 = 0$.

Per ottenere la monotonia rispetto alla direzione x_1 per ogni x è stato necessario utilizzare altre tecniche. Forniamo due dimostrazioni differenti di tale risultato di monotonia, perché è il punto chiave che rende il problema misto differente da quello di Dirichlet in $\mathbb{R}^N_+$ o da quello su $\mathbb{R}^N$, e che permette di arrivare alla non esistenza. Osserviamo esplicitamente che il nostro risultato di non esistenza per il problema misto non richiede alcuna ipotesi di decadimento all'infinito della soluzione. E questo è, a nostra conoscenza, completamente nuovo e permette di ottenere una stima L^∞ per il problema misto in dominio limitato, come in [**GS2**] o [**CP**].

Inoltre la non esistenza di soluzioni positive nel semispazio per il problema misto permette di conoscere i livelli critici dei funzionali legati allo stesso problema in domini limitati (vedi [**BGPa**] e [**GPa**]).

* * *

CAPITOLO II - Sia $N > 1$ e sia Ω un dominio regolare e limitato. In questo capitolo ci occupiamo del seguente problema singolare

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-\gamma} & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.6}$$

dove $\gamma > 0$. Questo problema è stato studiato precedentemente in [**CRT**], [**LM**] e [**K1**] dove è mostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione positiva $u(x)$. Tale soluzione è di classe $C^0\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$. Una regolarità maggiore non è possibile, anche se Ω è regolare, poiché, se $x \to \partial\Omega$, $|\nabla u| \to \infty$ come è mostrato in [**CRT**] e [**LM**] se $\gamma > 1$. Lo stesso risultato vale anche per $\gamma = 1$, come mostriamo in [**BGP**]. Inoltre in tutti e tre questi articoli è trovata una stima della soluzione vicino al bordo. In particolare in [**K1**] si mostra che se $\gamma > 1$ esistono costanti positive λ e Λ tali che

$$\lambda\delta^{\frac{2}{1+\gamma}}(x) \leq u(x) \leq \Lambda\delta^{\frac{2}{1+\gamma}}(x).$$

In questo capitolo miglioriamo i risultati di [**CRT**], [**LM**] e [**K1**] estendendo questa stima fino al secondo ordine e mostriamo che se $\gamma > 1$ esiste $\beta > 0$ tale che

$$\left|\frac{u(x)}{\delta^{\frac{2}{1+\gamma}}(x)} - b_0\right| < \beta\delta^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}(x) \tag{0.7}$$

in Ω, dove b_0 è una costante che dipende solo da γ. Osserviamo in particolare che la costante b_0 in (0.7) è indipendente dalla geometria del dominio Ω e persino dalla dimensione N. Troviamo una stima vicino alla frontiera anche per $\gamma = 1$. Mostriamo così che per $\gamma = 1$ la soluzione non sta in $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, completando i risultati di [**CRT**] e [**LM**].

Stime di questo tipo si possono trovare per esempio in [**BM**], [**BM2**], [**BP**] dove sono trattati problemi del tipo

$$\begin{cases} \Delta u = u^p & \text{in } \Omega \\ u(x) \to \infty & \text{per } x \to \partial\Omega, \end{cases}$$

oppure con un termine non lineare più generale, anche per l'operatore degenere p-laplaciano in [**GP**]. Tali soluzioni sono singolari sulla frontiera del dominio Ω. In virtú della singolarità della funzione $u^{-\gamma}$ sulla frontiera comunque il problema (0.6) può essere trattato con tecniche simili a quelle per esempio di [**BP**].

La concavità o convessità delle soluzioni di problemi non lineari è stata studiata da diversi autori vedi per esempio in [**K1**], [**K2**], [**K3**], [**Ko**], [**KoL**] ed altri. In particolare in [**K2**] e [**K3**] è stato studiato il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $p > 0$. È facile vedere che la soluzione $u(x)$ non è concava nemmeno nel caso radiale se $\Omega = B$. Però se il dominio Ω è convesso e $0 < p < 1$ allora la funzione $\nu = u^{\frac{1-p}{2}}$ è concava in Ω. Tale risultato è mostrato utilizzando la funzione concavità $\mathcal{C}$ introdotta per esempio in [**Ko**]. Essa misura di quanto una funzione non è concava. La funzione ν è concava se e solo se $\mathcal{C}$ è non negativa in $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

In [**K2**] è detto che se $u(x)$ è una soluzione di (0.6) in un dominio convesso Ω allora la funzione

$$\nu(x) = \int^{u(x)} s^{-\frac{1-\gamma}{2}} ds$$

è un buon candidato per essere concava. Uno dei contributi di questo capitolo è mostrare che questo risultato è vero anche per $\gamma > 0$. Mostriamo inoltre che tale risultato è ottimale. Anche noi utilizziamo la funzione concavità $\mathcal{C}$. Per mostrare la sua stretta positività in $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ utilizziamo dei principi di massimo per funzioni che verificano delle diseguaglianze differenziali. In particolare il principio di massimo di concavità di [**Ko**], e altri principi di massimo di [**KoL**] e [**PP**].

Mostriamo inoltre i seguenti risultati

1. se $\gamma = 0$ la funzione $\nu = u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ non è concava in un dominio convesso,
2. se $\gamma = -1$ la funzione $\nu = u^{\varepsilon}$ non è concava in un dominio convesso,
3. se $\gamma \geq 1$ la funzione $\nu = u^{\frac{1+\gamma}{2}+\varepsilon}$ non è concava nemmeno nel caso radiale.

Otteniamo così che per $\gamma = 0$ nel caso del problema agli autovalori, il fatto che la prima autofunzione positiva sia log-concava è in qualche senso ottimale. Se $\gamma = -1$ la concavità della u è ottimale e se $\gamma \geq 1$ la concavità appena mostrata è anch'essa ottimale.

Infine consideriamo il problema degenere

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{-\gamma} & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.10}$$

dove Δ_p indica il p-laplaciano. Per questo problema proviamo esistenza e unicità della soluzione positiva $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Per soluzione (debole) intendiamo una funzione u che verifica

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi = \int_\Omega u^{-\gamma} \psi \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Osserviamo infatti che se $p = 2$ e $\gamma > 3$ allora la soluzione non sta in $W^{1,2}(\Omega)$ vedi [**LM**]. Quindi non si può ottenere un risultato di regolarità migliore. Le soluzioni di (0.10) sono quindi intese in senso debole e da risultati di regolarità si ottiene che stanno almeno in $C^1(\Omega)$ e sono soluzioni classiche nei punti in cui $\nabla u \neq 0$, vedi per esempio [**diBe**].

Otteniamo una stima del tipo precedente, ovvero che esiste una costante $\beta > 0$ tale che

$$|u(x) - \Phi(\delta(x))| < \beta \delta(x)$$

dove Φ è una funzione indipendente dalla geometria del dominio Ω e dalla dimensione N. Φ dipende solo da p e da γ. Questo risultato è esteso nel Capitolo 2 a non linearità più generali, ma sempre con lo stesso tipo di degenerazione sul bordo.

* * *

CAPITOLO III - In un celebre articolo del 1988, vedi [**D1**], Dancer mostra fra gli altri risultati che l'equazione

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.11}$$

con $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$; $1 < p < \infty$ se $N = 2$, in particolari domini Ω possiede anche un elevato numero di soluzioni. Fra gli esempi ci sono domini contraibili ed eventualmente stellati. Questo mostra che il numero delle soluzioni dipende dalla geometria del dominio e non dalla sua topologia. Si pensava infatti che il problema della non unicità fosse legato a quello della non esistenza nel caso dell'esponente critico $p = \frac{N+2}{N-2}$.

Dancer considera il caso di domini Ω_n che approssimano un'unione finita di palle disgiunte e riesce a calcolare il numero esatto delle soluzioni non negative dell'equazione (0.11) in tali domini. Tale numero dipende solo dal numero delle palle da cui si parte. In particolare se consideriamo un dominio formato da 2 palle disgiunte unite da un sottile tubicino, ricava l'esistenza di 3 soluzioni positive. Tale numero è anche massimale fra le soluzioni che stanno in L^∞.

In questo capitolo ci proponiamo di estendere alcuni di questi risultati al caso dell'operatore degenere p-laplaciano. La dimostrazione si basa su un teorema astratto di approssimazione. Se Ω_n è una successione di domini che approssima in qualche senso Ω e u_0 è una soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^q & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.12}$$

con $p > 1$, $p-1 < q < \frac{Np-N-p}{N-p}$ se $p < N$,e $p-1 < q < \infty$ se $p \geq N$, e se u_0 verifica una particolare ipotesi sull'indice in un convesso, allora esiste una soluzione non negativa che risolve lo stesso problema in Ω_n per n grande. Dancer mostra anche l'unicità di tale soluzione in un particolare intorno della u_0, ma per fare questo utilizza la non degenerazione della u_0. Per l'operatore degenere p-laplaciano la linearizzata non è ben definita quindi non si riesce con questo metodo a riottenere l'unicità locale.

Come applicazione consideriamo il problema (0.12) dove p è in un intorno di 2 e q è un esponente opportuno. Per tale equazione otteniamo la molteplicità delle soluzioni in particolari domini Ω_n. Per ottenere la molteplicità si parte da un aperto non connesso Ω, in cui abbiamo molteplicità e la si estende applicando il teorema astratto al dominio Ω_n. Così se Ω_n è ottenuto unendo due palle disgiunte con un sottile tubicino abbiamo 4 soluzioni non negative, di cui una è la soluzione nulla e le altre 3 sono strettamente positive. La difficoltà nell'applicare il teorema astratto a ciascuna delle soluzioni in Ω consiste nel verificare l'ipotesi sull'indice. Per fare ciò ci siamo serviti di un'idea utilizzata in un articolo, vedi [**DEM**], nel caso di $N = 1$. Otteniamo l'ipotesi sull'indice facendo un'omotopia su p. Infatti per $p = 2$ l'operatore $-\Delta_p$ è derivabile e il calcolo dell'indice è reso più semplice dallo studio dell'operatore linearizzato. Questo procedimento fornisce dei limiti nella scelta dell'esponente q e di p che speriamo comunque di migliorare ulteriormente.

* * *

CAPITOLO 1

RISULTATI DI NON ESISTENZA PER SOLUZIONI POSITIVE IN DOMINI ILLIMITATI

1.1. Introduzione

In questo capitolo proviamo alcuni risultati di simmetria e non esistenza per soluzioni positive di alcune equazioni ellittiche in domini illimitati. Per dimostrare proprietà di simmetria utilizziamo il metodo dello spostamento di iperpiani. Questa tecnica è stata introdotta da Alexandrov e poi ripresa da Serrin in [**S**] che lo ha applicato per la prima volta allo studio di equazioni differenziali. In particolare è stato impiegato da Gidas, Ni e Niremberg in [**GNN**] e poi semplificato da Berestycki e Niremberg in [**BN**] per mostrare simmetria e monotonia di soluzioni classiche di equazioni differenziali semi-lineari in domini limitati. Nel 1981 in [**GNN2**] la tecnica è stata estesa al caso dei domini illimitati, in particolare a tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$. Fra gli altri risultati essi provano che le soluzioni di classe C^2 del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 & \text{per } x \to \infty \end{cases} \tag{1.1}$$

sono radiali se $f \in C^{1,\alpha}[0,+\infty)$, $f(0) = 0$ e $f'(0) < 0$. Ottengono anche la radialità delle soluzioni del problema (1.1) quando $f'(0) = 0$ sotto opportune ipotesi di crescita per la f in 0 e di decadimento della u all'infinito.

Questi risultati di simmetria sono stati estesi da Li in [**Li**] per soluzioni classiche di equazioni differenziali completamente non-lineari, usando una tecnica basata solo sul principio del massimo. Li mostra che le soluzioni di (1.1) sono radiali se è verificata l'ipotesi $(*)$

$$(*) \qquad \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \le C\left(|u|+|v|\right)^{\alpha}, \qquad \text{per } u \text{ e } v \text{ piccoli,}$$

$$(*) \qquad u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^m}\right) \qquad \text{per } |x| \to \infty \qquad \text{e } m\alpha > 2.$$

L'ipotesi di decadimento all'infinito di Li è equivalente a richiedere $u \in L^{\alpha\frac{N}{2}}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Chiameremo quindi regolare all'infinito una soluzione che verifica tale ipotesi, ed essa è radiale attorno ad un punto per i risultati appena esposti.

Inoltre Li e Ni in [**LiN**] mostrano la radialità delle soluzioni nel caso

$$(*,*) \qquad f'(s) \leq 0 \qquad \text{se } s \text{ piccolo.}$$

In seguito il metodo dello spostamento di iperpiani è stato utilizzato da moltissimi autori per provare risultati di simmetria in domini non limitati sia nell'ambito di soluzioni classiche che di soluzioni deboli. Citiamo fra gli altri [**SeZ**], [**DPaR**] e [**DaR**] che hanno esteso alcuni risultati di simmetria ad un operatore degenere, sotto particolari ipotesi sui punti critici della soluzione u. In [**DaR**] in particolare si richiede solo che la soluzione (debole) del problema sia in $C^1(\mathbb{R}^N)$ e si ottiene la radialità della soluzione sotto l'ipotesi (**), e sotto un'ipotesi equivalente alla (*) se la soluzione sta in $L^{\alpha\frac{N}{2}}$. La dimostrazione si basa su diseguaglianze integrali, rimandiamo anche a [**ADG**] per una spiegazione dettagliata del metodo per il problema su $\mathbb{R}^N$.

A questo punto conviene introdurre brevemente il metodo dello spostamento di iperpiani e per fare ciò occorrono alcune notazioni. Consideriamo una direzione, che per semplicità supporremo sempre come x_1; per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\Sigma_\lambda = \{x = (x^1, \ldots, x^N) : x^1 > \lambda\},$$

$$T_\lambda = \partial\Sigma_\lambda = \{x = (x^1, \ldots, x^N) : x^1 = \lambda\},$$

e per $x \in \Sigma_\lambda$ indichiamo con

$$x_\lambda = R_\lambda(x) = (2\,\lambda - x^1, x^2, \ldots, x^N)$$

l'immagine di x rispetto alla riflessione R_λ relativamente all'iperpiano T_λ e con

$$u_\lambda(x) = u(x_\lambda)$$

la funzione riflessa. Inoltre con

$$w_\lambda = u - u_\lambda$$

indichiamo la differenza fra u e la riflessa. Infine sia

$$\Lambda := \{\lambda \in (0, +\infty) \text{ t. c. } u \leq u_\mu \text{ in } \Sigma_\mu,\ \forall \mu \in (\lambda, +\infty)\}.$$

Se il problema è posto su $\mathbb{R}^N$ (analogamente per il semispazio) per provare che u è simmetrica rispetto a qualche iperpiano T_λ è sufficiente provare che:

Passo 1: $\Lambda \neq \emptyset$, ovvero $w_\lambda \leq 0$ per qualche λ vicino a $+\infty$; ovvero il metodo può iniziare;

Passo 2: detto $\lambda_0 = \inf \Lambda$, o $\lambda_0 > 0$ e $v \equiv v_{\lambda_0}$ in Σ_{λ_0} (u è simmetrica rispetto a T_{λ_0}) oppure $\lambda_0 = 0$. Infatti se $\lambda_0 = 0$ allora per continuità $u \leq u_0$ in Σ_0. Ripetendo lo stesso procedimento rispetto alla direzione opposta $(-x^1)$ è facile concludere che o $u \equiv u_{\lambda_0}$ in Σ_{λ_0} per qualche $\lambda_0 < 0$ oppure $u \equiv u_0$ in Σ_0 e quindi la simmetria della u rispetto a qualche iperpiano T_λ.

L'ipotesi di decadimento all'infinito per la soluzione u (cioè $u \in L^{\alpha \frac{N}{2}}$ per qualche valore $\alpha > 0$) è stata eliminata da Gidas e Spruck in [**GS**], in un articolo molto famoso ma anche molto complicato per $f(u) = u^p$ con $p < \frac{N+2}{N-2}$, $N \geq 3$ e successivamente da [**CLi**] che utilizzano parallelamente al moving plane anche la trasformata di Kelvin.

Per procedere senza fare ipotesi di decadimento all'infinito di solito si utilizzano sia il moving plane che la trasformata di Kelvin. Si opera cioè un'inversione rispetto ad una palla di raggio unitario. Per semplicità di notazioni considereremo la trasformata di Kelvin sempre centrata nell'origine, cioè

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} u(\frac{x}{|x|^2}), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Essa verifica (in senso debole) in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ l'equazione

$$-\Delta v(x) = \frac{1}{|x|^{N+2}} f(|x|^{N-2} v(x)).$$

La funzione trasformata $v(x)$ è definita in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, è quindi eventualmente singolare nell'origine, e decade all'infinito come $\sim \frac{u(0)}{|x|^{N-2}}$. Ha quindi il decadimento giusto che permette di far partire il moving plane, sotto l'ipotesi che f sia sottocritica o critica, quindi f verifica la proprietà 4 dell'introduzione. A questo punto è semplice concludere anche il passo 2 e avere la simmetria della v.

Se v è simmetrica rispetto ad un iperpiano che non passa per 0 allora la v deve essere regolare in 0 e quindi la u deve essere regolare all'infinito (poichè $u(x)$ si comporta come $\sim \frac{v(0)}{|x|^{N-2}}$). In tale caso si puó applicare il moving plane direttamente alla u e provare che è radiale. Se invece la v è simmetrica rispetto all'iperpiano T_0, passante per 0, allora anche la u è simmetrica rispetto a T_0. Dall'arbitrarietà della direzione scelta inoltre u è radiale. Se u è radiale rispetto all'origine, poichè l'origine è scelta in modo arbitrario allora u è costante. Se invece u è radiale rispetto ad un altro punto, allora necessariamente $f(t) = ct^{\frac{N+2}{N-2}}$ e quindi u può assumere solo la forma $u(x) = \frac{[N(N-2)\lambda^2]^{\frac{N-2}{4}}}{(\lambda^2+|x-x^0|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$, come provato in [**Gi**] per soluzioni radiali, in [**GNN2**] per soluzioni con un certo decadimento all'infinito e in [**CGS**] senza ipotesi di decadimento.

In questo capitolo mostriamo dei nuovi risultati di non esistenza per una classe generale di problemi ellittici semilineari nel semispazio con condizione mista (Dirichlet-Neumann) sulla frontiera, cioè per il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 = \{x = (x^1, \dots, x^N) : x^N = 0, x^1 > 0\} \\ \frac{\partial u}{\partial x^N} = 0 & \text{su } \Gamma_1 = \{x = (x^1, \dots, x^N) : x^N = 0, x^1 < 0\} \end{cases} \tag{1.2}$$

Qui $N \geq 3$ e $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Poniamo $A = \mathbb{R}^N_+ \cup \Gamma_1$ e $W = \{\varphi \in C^1_c(\overline{\mathbb{R}^N_+}) : supp\,(\varphi) \subseteq A\}$.

Per soluzione debole di (1.2) intendiamo una funzione $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty_{loc}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ (i.e. u é limitata in $K \cap \mathbb{R}^N_+$ per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^N$) tale che $u = 0$ su Γ_0 e

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\mathbb{R}^N_+} f(u)\, \varphi$$

per ogni $\varphi \in W$. Il risultato principale di questo capitolo è il seguente Teorema

TEOREMA 1.1. *Sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ una soluzione debole del problema (1.2) in $\mathbb{R}^N_+$, dove $N \geq 3$ e sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua che verifica*

i) $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$ *è non-crescente in* $(0, +\infty)$.
ii) $\frac{f^+(t)}{t}$ *è limitato per* $t \to 0$.

Allora u dipende solo da x^1 e x^N ed è non-crescente nella direzione x^1.

Inoltre se f verifica i), ii) e

iii) $f(s) > 0$ *per ogni* $s > 0$

allora $u \equiv 0$ è la sola soluzione limitata *del problema* (1.2).

Come caso particolare si ottiene la non esistenza di soluzioni non-banali limitate del problema (0.3) $f(t) = t^p$, per ogni p con $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$ senza richiedere nessuna ipotesi di sommabilità della soluzione.

Anche noi utilizzeremo entrambe queste tecniche, moving plane e trasformata di Kelvin per migliorare i risultati di non esistenza per soluzioni deboli di equazioni differenziali sottocritiche o critiche. Per applicare il moving plane utilizziamo delle stime integrali derivate da diseguaglinze di Hölder, Sobolev e Poincaré, come in [**ADG**]. Inoltre nel trattare la singolarità della v usiamo una funzione *cut-off* che si annulla in un intorno del punto di singolarità e all'infinito come in [**T**] e [**T2**]. Passando a limite otteniamo una stima integrale (vedi Lemma 1.1) su tutto il dominio privato del punto di singolarità che ci permette di far partire il moving plane e in seguito di ottenere anche il passo 2. Perché l'uso di questa *cut-off*? Perché in questo modo possiamo trattare con la stessa tecnica oltre a tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$ anche il caso del semispazio con condizione di Dirichlet (vedi problema (1.4)) e in modo parziale il problema misto. Inoltre non c'è più bisogno di diverse forme del principio di massimo per far partire il metodo.

Nel caso del problema nel semispazio con condizione di Dirichlet facendo un'inversione rispetto ad un punto qualunque della frontiera si torna nuovamente nel semispazio e la singolarità sta sulla frontiera dove sia v che v_λ si annullano. È impossibile quindi ripetere la dimostrazione precedente. L'uso della funzione cut-off permette invece di ripeterla esattamente. Analogamente accade per il problema misto.

Otteniamo quindi una dimostrazione unificata dei risultati già noti per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.3}$$

e per il corrispondente problema nel semispazio con condizione di Dirichlet sul bordo (vedi problema (1.4) seguente) migliorando anche le ipotesi già note. Per questo cominciamo la discussione con il problema modello (1.3), mostrando che solo la condizione 4 sulla funzione f è necessaria per avere non esistenza, i.e. proviamo il seguente

TEOREMA 1.2. *Sia* $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap C^0(\mathbb{R}^N)$ *una soluzione (debole) del problema* (1.3), *con* $N \geq 3$ *e sia* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua che verifica*

i) $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$ *è non-crescente in* $(0, +\infty)$.

Allora o $u \equiv c \in [0, +\infty)$ *e* $f(c) = 0$, *oppure esistono costanti positive* k, h, l *tali che* $u(x) = \frac{k}{(h^2+|x-x_0|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$ *e* $g(t) = l > 0$, *i.e.* $f(t) = l\, t^{\frac{N+2}{N-2}}$.

Utilizzando la stessa tecnica si possono considerare le soluzioni del corrispondente problema nel semispazio con condizioni di Dirichlet sulla frontiera, cioè

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ = \{x = (x^1, \dots, x^N) : x^N > 0\} \\ u \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases} \tag{1.4}$$

e provare il seguente analogo risultato.

TEOREMA 1.3. *Sia* $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ *una soluzione (debole) del problema* (1.4) *in* $\mathbb{R}^N_+$, *dove* $N \geq 3$ *e sia* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua che verifica*

i) $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$ *è non-crescente in* $(0, +\infty)$.

ii) $\frac{f^+(t)}{t}$ *è limitata per* $t \to 0$.

Allora u *dipende solo da* x^N.

Inoltre se f *verifica i), ii) e*

iii) $f(s) > 0$ *per ogni* $s > 0$, $\liminf_{t\to\infty} f(t) > 0$

allora il problema (1.4) *possiede solo la soluzione banale* $u \equiv 0$.

OSSERVAZIONE 1.1. Osserviamo che i Teoremi 1.1-1.3 portano alle stime *a priori* in L^∞ per i problemi in domini limitati con condizione miste sulla frontiera. Ci riferiamo a [**GS2**] per la corrispondente analisi per il problema di Dirichlet e al recente articolo [**CP**] per un'analisi di blow-up per alcuni problemi con condizioni miste in domini limitati.

In quest ultimo articolo, che abbiamo ricevuto dopo aver già completato il lavoro, gli autori ottengono le stime a priori senza utilizzare un Teorema di Liouville generale come nei casi precedenti, ma solo provando che non esistono soluzioni u del problema (1.2) nel caso in cui $f(t) = t^r$, $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$ con la proprietà che $0 \leq u \leq 1 = u((0, 0, \dots, 1))$.

Questo capitolo è organizzato nel seguente modo. Nel paragrafo 1.2 dimostriamo i Teoremi 1.2 e 1.3 e alcuni risultati ad essi legati, e mostriamo come la tecnica utilizzata permette di trattare nelle stesso modo diversi problemi. Diamo una dimostrazione dettagliata del Teorema 1.2, che è solo una generalizzazione di alcuni risultati noti, perché la struttura della dimostrazione può essere ripetuta con alcune varianti nelle dimostrazioni degli altri risultati che proviamo, in particolare nei risultati sul problema misto nel semispazio.

Nel paragrafo 1.3 ci occupiamo del problema misto nel semispazio e dimostriamo il nostro risultato principale, cioè il Teorema 1.1. Utilizziamo la dimostrazione fatta nel paragrafo 1.2 per dare una dimostrazione veloce della prima parte del Teorema 1.1. Provare la monotonia nella direzione x^1 nell'intero spazio, che porta al risultato di non esistenza, invece non è diretto e richiede alcune nuove idee che saranno spiegate in dettaglio. In particolare forniremo due dimostrazioni di questo risultato di monotonia.

Proviamo anche un risultato di tipo Liouville per soluzioni non-negative appartenenti ad opportuni spazi funzionali, che ci sarà utile in seguito.

Nel paragrafo 1.4 mostriamo alcuni risultati analoghi per un problema di Dirichlet in una striscia. In particolare proviamo che la soluzione dipende solo da una variabile.

1.2. Dimostrazione dei Teoremi 1.2-1.3

La dimostrazione del Teorema 1.2 segue dalla seguente

PROPOSIZIONE 1.1. *Siano u e f come nell'enunciato del Teorema 1.2 e supponiamo che u sia positiva in $\mathbb{R}^N$. Sia v la trasformata di Kelvin di u centrata in un punto P. Allora v è radiale attorno a qualche punto Q.*

Inoltre se g è non costante in $(0, \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u(x))$ allora $Q = P$, i.e. v è radiale attorno al polo della trasformata di Kelvin.

Prima di dare la dimostrazione della Proposizione 1.1 introduciamo le notazioni e facciamo alcuni commenti. Per semplicità di notazioni considereremo la trasformata di Kelvin sempre centrata nell'origine, cioè

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Essa verifica (in senso debole) in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ l'equazione

$$-\Delta v(x) = \frac{1}{|x|^{N+2}} f(|x|^{N-2} v(x)),$$

che può anche essere scritta come

$$-\Delta v(x) = g(|x|^{N-2} v(x)) v(x)^{\frac{N+2}{N-2}},$$

dove $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$. Inoltre (poiché $u \in C^0\left(\mathbb{R}^N\right)$) v è continua e strettamente positiva in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, con una possibile singolarità nell'origine, e decade all'infinito come $u(0)\,|x|^{2-N}$, così che $v \in L^{2^*} \cap L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))$ per ogni $r > 0$.

Per provare la radialità di v usiamo il metodo del moving plane e proviamo la simmetria della v rispetto ad ogni direzione, e per semplicità di notazioni consideriamo solo la direzione x^1. Introduciamo le notazioni abituali per il metodo del moving plane: se $\lambda \in \mathbb{R}$ definiamo $\Sigma_\lambda = \{x = (x^1, \ldots, x^N) : x^1 > \lambda\}$, $T_\lambda = \partial\Sigma_\lambda = \{x = (x^1, \ldots, x^N) : x^1 = \lambda\}$, e per $x \in \Sigma_\lambda$ indichiamo con $x_\lambda = R_\lambda(x) = (2\,\lambda - x^1, x^2, \ldots, x^N)$ l'immagine di x rispetto alla riflessione relativamente all'iperpiano T_λ e con $v_\lambda(x) = v(x_\lambda)$ la funzione riflessa, che è singolare nel punto $P_\lambda = (2\lambda, 0, \ldots, 0)$. Tale funzione verifica in senso debole l'equazione

$$-\Delta v_\lambda(x) = g(|x_\lambda|^{N-2} v(x_\lambda) v_\lambda(x)^{\frac{N+2}{N-2}} \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus P_\lambda$$

Infine sia Λ l'insieme di quei $\lambda \in (0, +\infty)$ tali che $u \leq u_\mu$ in $\Sigma_\mu \setminus P_\mu$ per ogni $\mu \in (\lambda, +\infty)$.

Per provare che v è simmetrica rispetto a qualche iperpiano T_λ è sufficiente provare che

Passo 1: $\Lambda \neq \emptyset$;

detto $\lambda_0 = \inf \Lambda$ allora

Passo 2: se $\lambda_0 > 0$ allora $v \equiv v_{\lambda_0}$ in Σ_{λ_0}.

Infatti se $\lambda_0 = 0$ allora per continuità $v \leq v_0$ in Σ_0. Ripetendo lo stesso procedimento rispetto alla direzione opposta $(-x^1)$ è facile concludere che o $v \equiv v_{\lambda_0}$ in Σ_{λ_0} per qualche $\lambda_0 < 0$ oppure $v \equiv v_0$ in Σ_0 e quindi la simmetria della v rispetto a qualche iperpiano T_λ.

Per trattare l'(eventuale) singolarità di v_λ in P_λ, dimostriamo prima il seguente Lemma, dove utilizziamo una tecnica basata su una funzione cut-off, come in Terracini in [**T2**].

LEMMA 1.1. *Per ogni fissato $\lambda > 0$ le funzioni v e $(v - v_\lambda)^+$ appartengono a $L^{2^*} \cap L^\infty(\Sigma_\lambda)$ e la funzione $(v - v_\lambda)^+$ sta in $W^{1,2}(\Sigma_\lambda)$. Inoltre se $A_\lambda = \{x \in \Sigma_\lambda \setminus P_\lambda : g(|x|^{N-2}v(x)) > 0\,,\, v(x) \geq v_\lambda(x)\}$, allora esiste $C_\lambda > 0$, non-crescente in λ, tale che*

$$\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v - v_\lambda)^+|^2 \leq C_\lambda \left(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}} \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v - v_\lambda)^+|^2 \right) \tag{1.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\lambda > 0$ allora esiste $r > 0$ tale che $\Sigma_\lambda \subseteq \mathbb{R}^N \setminus B_r(0)$, cosí v è regolare in Σ_λ e, poiché decade all'infinito come $u(0)\,|x|^{2-N}$, appartiene allo spazio $L^{2^*} \cap L^\infty(\Sigma_\lambda)$. Allo stesso modo la funzione $(v - v_\lambda)^+ \leq v$ appartiene anch'essa a $L^{2^*} \cap L^\infty(\Sigma_\lambda)$. Infine la funzione $\frac{1}{|x|^{2N}}$ che compare nella (1.5) è integrabile in Σ_λ e quindi a maggior ragione in $A_\lambda \subset \Sigma_\lambda$.

Per $\varepsilon > 0$ piccolo sia $\eta = \eta_\varepsilon \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ una cut-off tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 1$ se $2\varepsilon \leq |x - P_\lambda| \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $\eta(x) = 0$ se $|x - P_\lambda| < \varepsilon$ oppure se $|x - P_\lambda| > \frac{2}{\varepsilon}$, $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ se $\varepsilon < |x - P_\lambda| < 2\varepsilon$, $|\nabla\eta| \leq 2\varepsilon$ se $\frac{1}{\varepsilon} < |x - P_\lambda| < \frac{2}{\varepsilon}$.

Abbiamo visto che v e v_λ verificano in senso debole le equazioni

$$-\Delta v(x) = g(|x|^{N-2}v(x))v(x)^{\frac{N+2}{N-2}}, \quad -\Delta v_\lambda(x) = g(|x_\lambda|^{N-2}v(x_\lambda))v_\lambda(x)^{\frac{N+2}{N-2}}$$

in $\Sigma_\lambda \setminus P_\lambda$. Utilizziamo come funzione test per le equazioni verificate da v e v_λ la funzione $\varphi = \varphi_\varepsilon = \eta_\varepsilon^2(v - v_\lambda)^+$, per ottenere stime per la funzione $\psi = \psi_\varepsilon = \eta_\varepsilon(v - v_\lambda)^+$. Osserviamo intanto che $(v - v_\lambda)^+$ si annulla su T_λ, inoltre η_ε si annulla in un intorno di P_λ e all'infinito per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi la funzione $\varphi_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Sigma_\lambda)$ ed è una buona funzione test per entrambe le equazioni. Infatti la cut-off serve proprio a eliminare i punti che danno fastidio ovvero l'infinito e il punto di singolarità P_λ.

Dalla definizione di soluzione debole abbiamo

$$\int_{\Sigma_\lambda} \nabla v \cdot \nabla\varphi = \int_{\Sigma_\lambda} g(|x|^{N-2}v(x))v(x)^{\frac{N+2}{N-2}}\varphi,$$

$$\int_{\Sigma_\lambda} \nabla v_\lambda \cdot \nabla\varphi = \int_{\Sigma_\lambda} g(|x_\lambda|^{N-2}v(x_\lambda))v_\lambda(x)^{\frac{N+2}{N-2}}\varphi.$$

Sottraendo le equazioni ricaviamo

$$\int_{\Sigma_\lambda} \nabla (v - v_\lambda) \cdot \nabla\varphi = \int_{\Sigma_\lambda} \left[g(|x|^{N-2} v(x)) v(x)^{\frac{N+2}{N-2}} - g(|x_\lambda|^{N-2} v(x_\lambda)) v_\lambda(x)^{\frac{N+2}{N-2}} \right] \varphi.$$

Poiché $|\nabla\psi|^2 = \nabla(v - v_\lambda) \cdot \nabla\varphi + [(v - v_\lambda)^+]^2 |\nabla\eta|^2$ e $\psi = (v - v_\lambda)^+$ in $\Sigma_\lambda \cap [2\varepsilon \leq |x - P_\lambda| \leq \frac{1}{\varepsilon}]$ segue

$$\int_{\Sigma_\lambda \cap [2\varepsilon \leq |x-P_\lambda| \leq \frac{1}{\varepsilon}]} |\nabla(v - v_\lambda)^+|^2 = \int_{\Sigma_\lambda \cap [2\varepsilon \leq |x-P_\lambda| \leq \frac{1}{\varepsilon}]} |\nabla\psi|^2 \leq \int_{\Sigma_\lambda} |\nabla\psi|^2 =$$
$$= \int_{\Sigma_\lambda} \nabla(v - v_\lambda) \cdot \nabla\varphi + I_\varepsilon = \int_{\Sigma_\lambda} \left[g(|x|^{N-2} v(x)) v^p - g(|x_\lambda|^{N-2} v(x_\lambda)) v_\lambda^p \right] \varphi + I_\varepsilon$$

dove $p = \frac{N+2}{N-2}$, $\quad I_\varepsilon = \int_{\Sigma_\lambda} [(v - v_\lambda)^+]^2 |\nabla\eta_\varepsilon|^2$.

Poiché g è non crescente, $|x| \geq |x_\lambda|$ e $v(x) \geq v(x_\lambda)$ nell'insieme in cui $\varphi > 0$, abbiamo che $-g(|x_\lambda|^{N-2} v(x_\lambda)) \leq -g(|x|^{N-2} v(x))$, così che

$$\int_{\Sigma_\lambda \cap [2\varepsilon \leq |x-P_\lambda| \leq \frac{1}{\varepsilon}]} |\nabla(v - v_\lambda)^+|^2 \leq \int_{\Sigma_\lambda} \left[g(|x|^{N-2} v(x)) \right] (v^p - v_\lambda^p)\varphi + I_\varepsilon \leq$$
$$\int_{\Sigma_\lambda} \left[g^+(|x|^{N-2} v(x)) \right] (v^p - v_\lambda^p)\varphi + I_\varepsilon = \int_{A_\lambda} \left[g^+(|x|^{N-2} v(x)) \right] (v^p - v_\lambda^p)\varphi + I_\varepsilon \quad (1.6)$$

Inoltre, poiché u è positiva e localmente limitata, esiste $0 < a = a_\lambda < b = b_\lambda < +\infty$ tale che $a < |x|^{N-2} v(x) = u(\frac{x}{|x|^2}) < b \quad \forall\, x \in \Sigma_\lambda \subseteq \mathbb{R}^N \setminus B_r(0)$, così che $0 \leq g^+(|x|^{N-2} v(x)) \leq g^+(a_\lambda) =: C_\lambda$. Osserviamo qui che C_λ è non crescente in λ.

Infine se $0 \leq v_\lambda \leq v$ abbiamo che $v^{\frac{N+2}{N-2}} - v_\lambda^{\frac{N+2}{N-2}} \leq \frac{N+2}{N-2} v^{\frac{4}{N-2}} (v - v_\lambda) \leq C_\lambda \frac{1}{|x|^4} (v - v_\lambda)$, poiché $v \in L^\infty(\Sigma_\lambda)$ per $\lambda > 0$, e decade all'infinito come $\frac{1}{|x|^{N-2}}$.

Dalla stima precedente otteniamo, usando la diseguaglianza di Hölder,

$$\int_{\Sigma_\lambda \cap [2\varepsilon \leq |x-P_\lambda| \leq \frac{1}{\varepsilon}]} |\nabla(v - v_\lambda)^+|^2 \leq \int_{A_\lambda} \left[g^+(|x|^{N-2} v(x)) \right] (v^p - v_\lambda^p)\varphi + I_\varepsilon \leq$$
$$C_\lambda \int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^4} \eta^2 [(v - v_\lambda)^+]^2 + I_\varepsilon \leq C_\lambda \left(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}} \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\Sigma_\lambda} \eta^{2^*} [(v - v_\lambda)^+]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + I_\varepsilon.$$

Osserviamo che il termine I_ε tende a zero per $\varepsilon \to 0$.

Infatti se $B_\varepsilon = \{x \in \Sigma_\lambda : \varepsilon < |x - P_\lambda| < 2\varepsilon \;\text{ o } \frac{1}{\varepsilon} < |x - P_\lambda| < \frac{2}{\varepsilon}\}$, osserviamo che $B_\varepsilon \to \emptyset$ per $\varepsilon \to 0$ e $(v - v_\lambda)^+ \leq v \in L^{2^*}(\Sigma_\lambda)$. Inoltre $|\nabla\eta_\varepsilon|^N |B_\varepsilon| \leq C(\frac{1}{\varepsilon^N}\varepsilon^N + \varepsilon^N \frac{1}{\varepsilon^N}) = C$, così otteniamo $I_\varepsilon \leq \left(\int_{B_\varepsilon} [(v - v_\lambda)^+]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla\eta|^N \right)^{\frac{2}{N}} \leq C \left(\int_{B_\varepsilon} [(v - v_\lambda)^+]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ poiché $(v - v_\lambda)^+ \in L^{2^*}(\Sigma_\lambda)$.

Facendo tendere ε a zero e usando la convergenza monotona e dominata e la diseguaglianza di Sobolev, otteniamo

$$\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v-v_\lambda)^+|^2 \leq C_\lambda \left(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}}\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\Sigma_\lambda} [(v-v_\lambda)^+]^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

$$\leq C_\lambda \left(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}}\right)^{\frac{2}{N}} \int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v-v_\lambda)^+|^2.$$

Il fatto che $(v-v_\lambda)^+$ sta in $W^{1,2}(\Sigma_\lambda)$ è una conseguenza della stima precedente. $\square$

Dimostrazione della Proposizione 1.1. Dalla stima (1.5) deduciamo che se $\lambda > 0$ e $C_\lambda(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}})^{\frac{2}{N}} < 1$ allora $\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v-v_\lambda)^+|^2 = 0$, da cui $v \leq v_\lambda$ in Σ_λ. Questo ci permette di provare i due passi principali del metodo del moving plane abbastanza facilmente.

Passo 1: Poiché $\frac{1}{|x|^{2N}} \in L^1(\Sigma_\lambda)$ per ogni $\lambda > 0$ e $\Sigma_\lambda \to \emptyset$ per $\lambda \to +\infty$, segue che $\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}} \leq \int_{\Sigma_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}} \to 0$ per $\lambda \to +\infty$, così che $C_\lambda(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}})^{\frac{2}{N}} < 1$ se λ abbastanza grande, infatti C_λ è non crescente in λ, cioè $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$, per qualche $\lambda_1 > 0$. Quindi per $\lambda > \lambda_1$ $\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v-v_\lambda)^+|^2 = 0$ e $v \leq v_\lambda$ in Σ_λ. L'insieme Λ precedentemente definito è non vuoto e contiene almeno tutto l'intervallo $(\lambda_1, +\infty)$.

Passo 2: Sia $\lambda_0 = \inf \Lambda$. Supponiamo che λ_0 sia positivo e per assurdo che v non coincida con la sua riflessa v_{λ_0} in Σ_{λ_0}. Mostriamo che $v < v_{\lambda_0}$ nell'insieme $D_{\lambda_0} = \{x \in \Sigma_{\lambda_0} \setminus P_{\lambda_0} : g(|x|^{N-2}v(x)) > 0\} \supset A_{\lambda_0}$.

Questo non è immediato, poiché f non è Lipschitziana e non possiamo applicare il principio di massimo forte. Ma può essere verificato nel seguente modo. Sappiamo che $v \leq v_{\lambda_0}$ in $\Sigma_{\lambda_0} \setminus P_{\lambda_0}$ per continuità, e $|x| > |x_{\lambda_0}|$ in Σ_{λ_0} poiché $\lambda_0 > 0$. Consideriamo l'aperto $O = \{x \in D_{\lambda_0} : |x|^{N-2}v > |x_{\lambda_0}|^{N-2}v_{\lambda_0}\}$. Intanto osserviamo che se $x \in D_{\lambda_0} \setminus O$ allora $|x|^{N-2}v(x) \leq |x_{\lambda_0}|^{N-2}v_{\lambda_0}(x)$ da cui $v(x) \leq (\frac{|x_{\lambda_0}|}{|x|})^{N-2}v_{\lambda_0}(x) < v_{\lambda_0}(x)$. Quindi abbiamo $v < v_{\lambda_0}$ in $D_{\lambda_0} \setminus O$.

Nell'aperto O, g è positiva e non crescente, e poiché $v \leq v_{\lambda_0}$ in Σ_{λ_0}, abbiamo che $-\Delta v(x) = g(|x|^{N-2}v(x))v(x)^{\frac{N+2}{N-2}} \leq g(|x_{\lambda_0}|^{N-2}v(x_{\lambda_0}))v_{\lambda_0}(x)^{\frac{N+2}{N-2}} = -\Delta v_{\lambda_0}$. Possono accadere i due casi

- g è costante su una componente di O,

- g è strettamente decrescente in qualche punto di O.

Consideriamo prima il secondo caso. Se g è strettamente decrescente in qualche punto di O, allora nella componente di O che contiene tale punto abbiamo $-\Delta v \leq -\Delta v_{\lambda_0}$, ma $-\Delta v \neq -\Delta v_{\lambda_0}$ e $v \leq v_{\lambda_0}$, cosi che dal principio forte del massimo classico otteniamo $v < v_{\lambda_0}$. Se g è costante su una componente di O allora $g = c > 0$, poiché $O \subset D_{\lambda_0}$. Se la frontiera di tale componente di O tocca in qualche punto la frontiera di D_{λ_0}, allora $g = 0$ e ciò non può essere. Quindi, se g è costante, sulla frontiera di tale componente di O si ha $|x|^{N-2}v = |x_{\lambda_0}|^{N-2}v_{\lambda_0}$ e poiché $|x| > |x_{\lambda_0}|$ allora $v < v_{\lambda_0}$ sulla frontiera e quindi $v < v_{\lambda_0}$ anche su tale componente di ∂O.

Questo tipo di principio del confronto forte implica che la funzione $\frac{1}{|x|^{2N}}\chi_{A_\lambda}$, dove χ_S indica la funzione caratteristica dell'insieme S, converga puntualmente a zero per $\lambda \nearrow \lambda_0$ in $\mathbb{R}^N \setminus (T_{\lambda_0} \cup \{P_{\lambda_0}\})$ e quindi quasi ovunque in Σ_{λ_0}.

Se $0 < \lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0$ allora $\frac{1}{|x|^{2N}}\chi_{A_\lambda} \leq \frac{1}{|x|^{2N}}\chi_{\Sigma_{\lambda_0-\delta}} \in L^1$, e per convergenza dominata $\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}} \to 0$ per $\lambda \to \lambda_0$, cosi che $C_\lambda(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}})^{\frac{2}{N}} < 1$ per λ in qualche intervallo $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$. Come nel passo precedente ciò implica che $v \leq v_\lambda$ in Σ_λ per $\lambda < \lambda_0$ e prossimo a λ_0, contraddicendo la proprietà di inf di λ_0. Quindi se $\lambda_0 > 0$ deve essere $v \equiv v_{\lambda_0}$.

Per dimostrare l'ultima asserzione della Proposizione supponiamo che $\lambda_0 > 0$, cosi che $v \equiv v_{\lambda_0}$ come appena provato. Ciò implica che v è regolare nell'origine, e quindi u è regolare all'infinito, poiché decade come $v(0)|x|^{2-N}$. Per ogni $x \in \Sigma_{\lambda_0}$ abbiamo $|x| > |x_{\lambda_0}|$ e $-\Delta v(x) = -\Delta v_{\lambda_0}(x)$, che implica che $g(|x|^{N-2}v(x)) = g(|x_{\lambda_0}|^{N-2}v(x_{\lambda_0}))$ poiché $v \equiv v_{\lambda_0}$. Poiché g è non crescente questo implica che $g(t)$ è costante in un intorno destro di t per ogni t della forma $t = |x|^{N-2}v(x) = u(\frac{x}{|x|^2})$, $x^1 > \lambda_0$. Analogamente g è costante in ogni intorno sinistro di ogni $t = u(\frac{x}{|x|^2})$, $x^1 < \lambda_0$, in particolare per ogni t vicino a 0, poiché u tende a zero 0 all'infinito. È facile adesso concludere che se $\lambda_0 > 0$ allora g è costante in $u(\mathbb{R}^N)$. v verifica allora $-\Delta v = cv^{\frac{N+2}{N-2}}$ e deve essere $c \geq 0$ se $v > 0$ in $\mathbb{R}^N$. v è cosi radiale attorno ad un punto dai risultati citati precedentemente. Quindi se g è non costante in $(0, \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u(x))$ non può essere $\lambda_0 > 0$ e deve essere $\lambda_0 = 0$. Ripetendo il ragionamento rispetto alla direzione opposta come prima non può essere $\lambda_0 > 0$ e abbiamo ancora $\lambda_0 = 0$. Dalle due diseguaglianze $v \leq v_0$ e anche

$v_0 \leq v$ abbiamo $v \equiv v_0$ in Σ_0. Questo rispetto ad una qualunque direzione, per cui v è simmetrica rispetto all'origine che è il polo della trasformata di Kelvin. □

Dimostrazione del Teorema 1.2. Innanzitutto se vale (i) allora o $u \equiv 0$ oppure u è positiva in $\mathbb{R}^N$. Infatti preso $u_0 > 0$, nell'aperto $O := \{x \in \mathbb{R}^N \text{ t.c. } 0 \leq u < u_0\}$ abbiamo che $-\Delta u = f(u) = g(u)u^{\frac{N+2}{N-2}} \geq g(u_0)u^{\frac{N+2}{N-2}}$ cosi̇ che $-\Delta u + cu^{\frac{N+2}{N-2}} \geq 0$, che garantisce la validità del principio forte del massimo (vedi [**V**] e [**PSeZ**]).

Se $u \equiv 0$ il Teorema è dimostrato, altrimenti $u > 0$ e dalla Proposizione 1.1 la trasformata di Kelvin v di u centrata in ogni punto P è radialmente simmetrica attorno a qualche punto Q. Inoltre se g non è costante in $(0, \sup_{\mathbb{R}^N} u)$ allora $Q = P$, che implica anche che u é radialmente simmetrica attorno a P. Poiché P è arbitrario segue che u è costante.

Se invece g è costante allora $f(t) = l\, t^{\frac{N+2}{N-2}}$ per ogni $t \in u(\mathbb{R}^N)$ e qualche $l \in \mathbb{R}$. Allora o per ogni scelta del polo P della trasformata di Kelvin abbiamo $\lambda_0 = 0$, nel qual caso u è costante, come abbiamo appena dimostrato, oppure esiste un polo P per cui $\lambda_0 > 0$. In questo caso $v \equiv v_{\lambda_0}$ in Σ_{λ_0}, cosi̇ che 0 non è un punto singolare per la v e u è regolare all'infinito, cioè decade all'infinito come $\frac{v(0)}{|x|^{N-2}}$.

Quindi necessariamente $l > 0$ (altrimenti u sarebbe subarmonica con un massimo in qualche punto) e da risultati classici (vedi [**GNN2**], [**CGS**]) u ha la forma indicata nel Teorema.

□

Osservazione 1.2. Osserviamo che, una volta provata la Proposizione 1.1 il Teorema 1.2 segue immediatamente dall'argomento geometrico di Bianchi (vedi Lemma 7 in [**B**]).

Comunque nel caso del problema nel semispazio con condizione di Dirichlet o condizioni miste sul bordo è necessario discutere separatamente il caso in cui g è costante, quindi ci adattiamo e forniamo nel caso di $\mathbb{R}^N$ lo schema generale della dimostrazione discutendo separatamente i due casi.

Quando si provano risultati di non esistenza utilizzando la trasformata di Kelvin e il metodo del moving plane, la stessa tecnica può essere utilizzata per dimostrare risultati di simmetria per soluzioni *singolari*, oppure risultati di simmetria o non esistenza per problemi simili a (1.3) dove la non linearità dipende anche da $r = |x|$. Come *esempio* il seguente risultato può essere dimostrato con le stesse tecniche. Rimandiamo a [**B**] e alle referenze qui contenute per altri risultati di questo tipo.

TEOREMA 1.4. *Sia* $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap C^0(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ *una soluzione (debole) del problema* (1.3) *in* $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, *dove* $N \geq 3$. *Sia* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *come in Teorema 1.2 e sia* 0 *una singolarità non eliminabile. Allora* u *è radiale attorno all'origine.*

Dimostrazione. Sia v la trasformata di Kelvin di u centrata in un punto $P = (P^1, \ldots, P^N)$ diverso da 0 ma con $P^1 = 0$. Allora v è singolare in due punti che sono: il trasformato O^1 dell'origine in cui la u era singolare e la nuova origine O che diventa un punto di eventuale singolarità dopo la trasformata. Questi due punti *appartengono allo stesso iperpiano centrale* $T_0 = [x^1 = 0]$ proprio per come abbiamo scelto il polo della trasformata. Possiamo applicare il Lemma 1.1 rispetto ad una qualunque direzione che sia perpendicolare ad T_0 e ottenere la stima (1.5) che ci serve per poter poi applicare la Proposizione 1.1. Il Lemma si applica con una leggera modifica, 2 singolarità invece che 1, ma entrambe sullo stesso iperpiano centrale. Siano P_λ il riflesso dell'origine rispetto all'iperpiano T_λ e O^1_λ il simmetrico di O^1 sempre rispetto allo stesso iperpiano. Prendiamo due funzioni *cut-off* η_1 e η_2 la prima definita come nel Lemma 1.1 che si annulla in un intorno di P_λ e che quindi elimina tale punto singolare e all'infinito; la seconda che si annulla solo in un intorno di O^1_λ. Prendiamo come $\varphi_\varepsilon = \eta_1^2 \eta_2^2 (v - v_\lambda)^+$, $\psi_\varepsilon = \eta_1 \eta_2 (v - v_\lambda)^+$ e ripetiamo la dimostrazione precedente. Troviamo

$$\int_{\Sigma_\lambda \cap [2\varepsilon \leq |x - P_\lambda| \leq \frac{1}{\varepsilon}] \cap [2\varepsilon \leq |x - O^1_\lambda|]} |\nabla (v - v_\lambda)^+|^2 \leq \int_{\Sigma_\lambda} |\nabla \psi|^2 =$$

$$C_\lambda \left(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}} \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\Sigma_\lambda} (\eta_1 \eta_2)^{2^*} [(v - v_\lambda)^+]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + I_\varepsilon$$

dove $A_\lambda = \{x \in \Sigma_\lambda \setminus \{P_\lambda, O^1_\lambda\} : g(|x|^{N-2} v(x)) > 0 \,,\, v(x) \geq v_\lambda(x)\}$,

$$I_\varepsilon = \int_{\Sigma_\lambda} \eta_2^2 [(v - v_\lambda)^+]^2 |\nabla \eta_1|^2 + \int_{\Sigma_\lambda} \eta_1^2 [(v - v_\lambda)^+]^2 |\nabla \eta_2|^2 + \int_{\Sigma_\lambda} 2 \eta_1 \eta_2 [(v - v_\lambda)^+]^2 \nabla \eta_1 \cdot \nabla \eta_2 .$$

Anche in questo caso I_ε tende a zero. I primi due termini si comportano esattamente come nel Lemma 1.1 (anche η_2 ha la stessa dipendenza da ε di η_1), quindi tendono a zero, mentre l'ultimo pezzo è nullo se ε sufficientemente piccolo poiché il gradiente di η_2 è non nullo solo in un piccolo intorno di O^1_λ che è distinto da P_λ per come abbiamo fatto l'inversione. Una volta ottenuta la stima (1.5) la Proposizione 1.1 segue immediatamente e questo permette di iniziare il moving plane rispetto alle direzioni che sono perpendicolari a T_0 e di concludere che v è simmetrica rispetto a qualche iperpiano $T_{\lambda_0} = [x^1 = \lambda_0]$. Poiché almeno una singolarità è non eliminabile, necessariamente deve essere $\lambda_0 = 0$ e l'iperpiano di simmetria contiene entrambe le singolarità.

Così v è simmetrica rispetto a $T_0 = [x^1 = 0]$, e ciò implica che anche u è simmetrica rispetto a T_0. Ripetendo la procedura rispetto alle altre direzioni, cioè invertendo rispetto ad un polo $P = (P^1, \dots, P^N)$ sempre diverso da 0 ma con $P^i = 0$, possiamo concludere che u è simmetrica rispetto a $T^i_0 = [x^i = 0]$ per $i = 1, \dots N$ e quindi è radiale attorno all'origine, cioè il punto di singolarità essenziale.

□

Osservazione 1.3. Questa dimostrazione si può generalizzare al caso di più singolarità e ottenere per esempio che se u è una soluzione con due punti di singolarità allora essa è simmetrica rispetto all'asse che passa per i due punti; se u ha tre punti di singolarità e $N \geq 3$ allora u è simmetrica rispetto al piano che contiene i tre punti e così via aumentando i punti di singolarità diminuiscono le simmetrie.

Ora consideriamo il problema nel semispazio con condizioni di Dirichlet sul bordo. Intanto osserviamo che il Teorema 1.3 si applica a soluzioni che non sono necessariamente limitate, ma per soluzioni limitate di (1.4) il Teorema 1.2 e alcuni risultati noti di Dancer e Berestycki, Caffarelli e Nirenberg implicano un generale risultato di non esistenza che ora descriviamo.

Dancer [**D2**] dimostra che se $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione C^1 che verifica $f(0) = 0$, $f'(0) \geq 0$, allora ogni soluzione *limitata* u dell'equazione (1.4) è monotona crescente nella direzione x^N e la funzione $z(x^1, \dots, x^{N-1}) = \lim_{x^N \to \infty} u(x^1, \dots, x^N)$ verifica la stessa equazione in $\mathbb{R}^{N-1}$.

In seguito Berestycki, Caffarelli e Nirenberg hanno dimostrato la monotonia nella direzione x_N di ogni soluzione limitata formulando la sola ipotesi che f sia localmente Lipschitziana in $[0, \infty)$ e $f(0) \geq 0$ se $N > 2$ (vedi [**BCN4**]). Inoltre considerano soluzioni non necessariamente limitate supponendo che f sia globalmente Lipschitziana e dimostrano molti altri risultati su proprietà qualitative di soluzioni positive di problemi ellittici in diversi domini illimitati in una serie di articoli [**BCN**]–[**BCN4**].

Una conseguenza di questi risultati e del Teorema 1.2 è il seguente

COROLLARIO 1.1. *Supponiamo che $N \geq 3$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sia localmente Lipschitziana con $f(0) \geq 0$, e u sia una soluzione* limitata *dell'equazione (1.4). Allora necessariamente $u \equiv 0$ se u tende a zero all'infinito oppure se f verifica*

i) $f(s) > 0$ *se* $s > 0$,
ii) *se* $N > 3$*:* $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{N+1}{N-3}}}$ *è non crescente in* $(0, +\infty)$ *e non costante in ogni intervallo.*

Osserviamo solamente che se $N = 3$ il risultato segue dal fatto che la funzione $z(x^1, x^2) = \lim_{x^3 \to \infty} u(x^1, x^2, x^3)$ è superarmonica e limitata in R^2, e quindi deve essere costante e poiché f è strettamente positiva per $s > 0$, si deve annullare. Se invece $N > 3$ la funzione $z(x^1, \ldots, x^{N-1}) = \lim_{x^N \to \infty} u(x^1, \ldots, x^N)$ verifica lo stesso problema in R^{N-1}. Possiamo applicare il Teorema 1.2 e poiché g è non costante abbiamo $z = c$ con $f(c) = 0$. Dalla stretta positività della f inoltre $c = 0$. Questo implica anche che la u si annulla in $\mathbb{R}^N_+$ a causa della monotonia nella direzione x^N.

Ora dimostriamo il Teorema 1.3.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.3. La dimostrazione è simile a quella del Teorema 1.2. Sia v la trasformata di Kelvin di u centrata in un punto qualunque $P \in \partial\mathbb{R}^N_+$, cioè con $P^N = 0$. Proviamo che v è simmetrica rispetto a qualche iperpiano $T_{\lambda_0} = [x^1 = \lambda_0]$, $\lambda_0 \geq 0$, con $\lambda_0 = 0$ se g non è costante sui valori di u. Naturalmente come direzione x^1 potrei prendere una qualunque direzione ortogonale alla direzione x^N. Se g è costante sui valori di u allora $f(t) = l\, t^{\frac{N+2}{N-2}}$ per qualche $l \geq 0$, ma il caso $\lambda_0 > 0$ non può accadere, sempre che u non sia identicamente nulla, poiché in questo caso v sarebbe regolare in 0, e quindi u tenderebbe a zero all'infinito e sarebbe quindi limitata. Dal Corollario precedente u sarebbe identicamente nulla.

La dimostrazione della simmetria della trasformata di Kelvin di u è essenzialmente la stessa di quella di tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$, con le funzioni test e le soluzioni prese negli spazi di funzioni definiti solo nel semispazio, ma con una differenza fondamentale che è la seguente. Nel caso di tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$ la soluzione u è positiva sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$, così nella dimostrazione del Lemma 1.1 avevamo che se $\lambda > 0$ allora per ogni $x \in \Sigma_\lambda$ il valore $|x|^{N-2}v(x) = u(\frac{x}{|x|^2})$ appartiene a qualche intervallo (a, b) con a, b dipendenti solo da λ, $0 < a < b < \infty$.

In questo caso invece $u(\frac{x}{|x|^2})$ si può annullare sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N_+$, a causa delle condizioni al bordo, e questo è il motivo per cui l'altra ipotesi ii) è stata introdotta. Questa condizione garantisce che $g^+(t)t^{\frac{4}{N-2}} = \frac{f^+(t)}{t}$ sia limitata in ogni intervallo $(0, b)$ e permette di ottenere la stima principale usata nel Lemma 1.1. Spieghiamo meglio, se $\lambda > 0$ e $x \in \Sigma_\lambda$, $|x|^{N-2}v(x) = u(\frac{x}{|x|^2})$ è limitata dall'alto in Σ_λ da un valore b dipendente solo da λ. Allora

$$g^+(|x|^{N-2}v)v^{\frac{4}{N-2}} = \frac{g^+(|x|^{N-2}v)(|x|^{N-2}v)^{\frac{4}{N-2}}}{|x|^4} \leq C\frac{1}{|x|^4}.$$

In questo modo si ottiene la stima (1.5) anche in questo caso e, di conseguenza, possiamo applicare la Proposizione 1.1. Ripetendo la stessa dimostrazione otteniamo che se v è la trasformata di Kelvin di u centrata in $P \in \partial\mathbb{R}^N_+$ e g è non costante, allora v è simmetrica rispetto a P e quindi anche u lo è. Poiché P è scelto in modo arbitrario tale che $P^N = 0$ allora u è costante rispetto ad x^1. Ripetendo la procedura rispetto a tutte le direzioni ortogonali alla direzione x^N, otteniamo che u dipende solo dalla variabile x^N.

Se f verifica inoltre l'ipotesi iii) è facile provare che deve essere $u \equiv 0$ generalizzando nel seguito gli argomenti usati in [**GS2**] per il caso $f(t) = t^p$.

Supponiamo per assurdo che u non sia identicamente nulla, allora dal principio forte del massimo e dal lemma di Hopf $u(t) > 0$ se $t > 0$ con $u(0) = 0$, $u'(0) > 0$, $u''(t) = -f(u(t)) < 0$ per ogni $t > 0$. Da ciò segue che esiste $t_0 > 0$ tale che $u'(t_0) < 0$.

Infatti, se ció non fosse vero, per ogni $t_1 > 0$ e $t \geq t_1$ $u(t) \geq a = u(t_1) > 0$, e poiché f è continua, positiva in $(0, \infty)$ e $\liminf_{t\to\infty} f(t) > 0$, esiste $m > 0$ tale che $f(s) \geq m \,\forall\, s \geq a$, in particolare $u''(t) = -f(u(t)) \leq -m < 0$ per ogni $t \geq t_1$. Dalla formula di Taylor ciò implica che $u(t) = u(t_1) + u'(t_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}u''(\xi)(t - t_1)^2 \leq u(t_1) + u'(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{2}m(t - t_1)^2$, dove $t_1 \leq \xi \leq t$, così che $\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty$, e otteniamo una contraddizione.

D'altra parte se $u'(t_0) < 0$, poiché $u'' \leq 0$ sempre dalla formula di Taylor otteniamo che $u(t) \leq u(t_0) + u'(t_0)(t - t_0) \to -\infty$ per $t \to \infty$ e quindi ancora una contraddizione.

$\square$

1.3. Risultati di non esistenza per il problema (1.2)

Incominciamo questo paragrafo dimostrando il seguente teorema che è solo una prima generalizzazione di un risultato di non esistenza provato in [**BGPa**] (dove è trattato il caso $f(t) = t^{\frac{N+2}{N-2}}$ ed è provato che non esistono soluzioni nello spazio $D^{1,2}(\mathbb{R}^N_+)$); questo teorema ci servirà in seguito per provare il nostro risultato principale (Teorema 1.1).

Come nel paragrafo 1.1 poniamo $A = \mathbb{R}^N_+ \cup \Gamma_1$ e $W = \{\varphi \in C^1_c(\overline{\mathbb{R}^N_+}) : supp\,(\varphi) \subseteq A\}$.

Sia V il completamento di W rispetto alla norma $\|\varphi\| = \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla\varphi|^2$.

Allora $V = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N_+) : u = 0 \text{ su } \Gamma_0\}$ dove $D^{1,2}(\mathbb{R}^N_+) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N_+) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N_+)\}$.

TEOREMA 1.5. *Sia $f(0) \geq 0$ e supponiamo che esistano $C, \alpha > 0$ tali che se $0 \leq a < b$ allora*

$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leq C(a + b)^\alpha. \tag{1.7}$$

Allora non esistono soluzioni (deboli) non banali dell'equazione (1.2) *che appartengono allo spazio $V \cap L^{\alpha\frac{N}{2}} \cap C^0(\mathbb{R}^N_+)$*

OSSERVAZIONE 1.4. Nel caso critico, i.e. quando $\alpha = 2^* - 2 = \frac{4}{N-2}$, abbiamo che $\alpha\frac{N}{2} = \frac{2N}{N-2} = 2^*$, e l'ipotesi si riduce a chiedere $u \in L^{2^*}$, che è già inclusa in modo naturale nella definizione dello spazio V.

Dimostrazione del Teorema 1.5. Utilizziamo le stesse notazioni della Proposizione 1.1 con le opportune modifiche, cioè Σ_λ consiste dei punti x *che stanno in* $\mathbb{R}^N_+$ tali che $x^1 > \lambda$. Vogliamo provare che l'insieme $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $u \leq u_\mu$ in $\Sigma_\mu \, \forall \, \mu \in (\lambda, +\infty)\}$ coincide con $\mathbb{R}$, cioè la soluzione u è monotona decrescente nella direzione x^1, e ciò è impossibile se supponiamo che u appartenga a qualche spazio L^p, sempre che u non sia identicamente nulla (perché u deve tendere a zero all'infinito per essere integrabile). Notiamo che con questa definizione $\inf \Lambda$ può essere negativo.

Innanzi tutto il principio del massimo forte vale, poiché $f(0) \geq 0$ e le ipotesi implicano che f sia localmente Lipschitziana, cosi̇ che se u non è identicamente nulla allora u è positiva in $\mathbb{R}^N_+$.

Poi per provare che $\lambda_0 = \inf \Lambda = -\infty$ è sufficiente provare che se λ_0 è finito allora u deve coincidere con la sua riflessa u_{λ_0}.

Quest'ultima possibilità non può mai accadere a causa delle condizioni sul bordo: se per una soluzione non banale u e per qualche $\lambda > 0$ $u \equiv u_\lambda$ in Σ_λ, allora u sarebbe una soluzione non banale di un problema di Dirichlet (1.4) e sarebbe C^1 fin sul bordo con $\frac{\partial u}{\partial x^N} > 0$ sulla frontiera del semispazio per il Lemma di Hopf, contraddicendo le condizioni sul bordo su Γ_1.

La dimostrazione consiste come al solito nel provare i passi 1 e 2 del metodo del moving plane, ed è completamente analoga a quella della Proposizione 1.1 una volta che abbiamo provato l'analogo del Lemma 1.1, cioè il seguente

Claim Esiste $C_1 > 0$, dipendente dalla costante C in (1.7) e dalla dimensione N, tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ vale la seguente stima

$$\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(u - u_\lambda)^+|^2 \, dx \leq C_1 \left(\int_{A_\lambda} u^{\alpha \frac{N}{2}} \, dx \right)^{\frac{2}{N}} \int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(u - u_\lambda)^+|^2 \, dx \tag{1.8}$$

dove ora $A_\lambda = \{x \in \Sigma_\lambda : u(x) \geq u_\lambda(x)\}$.

Per dimostrare il Claim osserviamo che, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$ è una soluzione (debole) dell'equazione (1.2), la funzione riflessa u_λ risolve (debolmente) il problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = f(u_\lambda) & \text{in } \Sigma_\lambda \\ u_\lambda = 0 & \text{su } \Sigma_\lambda \cap R_\lambda(\Gamma_0) \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial x^N} = 0 & \text{su } \Sigma_\lambda \cap R_\lambda(\Gamma_1). \end{cases}$$

Una funzione test per questo problema deve annullarsi su $\Sigma_\lambda \cap R_\lambda(\Gamma_0)$, se questo insieme è non vuoto, mentre una funzione test per il problema (1.2) deve annullarsi su $\Sigma_\lambda \cap \Gamma_0$. In particolare per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $(u - u_\lambda)^+$ si annulla su entrambi gli insiemi e potrebbe quindi essere presa come funzione test per entrambi i problemi se avesse la regolarità sufficiente.

Poiché $u \in V$ esiste una successione di funzioni $\varphi_j \in W$ tale che

$$\begin{cases} \varphi_j \to u & \text{in } L^{2^*}(\mathbb{R}^N_+) \\ \nabla\varphi_j \to \nabla u & \text{in } L^2(\mathbb{R}^N_+) \end{cases}$$

e a meno di una sottosuccessione $\varphi_j \to u$ e $\nabla\varphi_j \to \nabla u$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^N_+$. Inoltre $\mathit{supp}\,\varphi_j \subset A$, quindi $\varphi_j = 0$ su $\Sigma_\lambda \cap \Gamma_0$ e anche su $\Sigma_\lambda \cap R_\lambda(\Gamma_0)$. Sia $\psi_j = f_{\frac{1}{j}}\,(\varphi_j - (\varphi_j)_\lambda)$ dove $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ è scelta per esempio come

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \le 0. \end{cases}$$

Allora ψ_j è una buona funzione test sia per u sia per u_λ in Σ_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, come si vede facilmente. Testando le equazioni per u e per u_λ in Σ_λ con ψ_j, sottraendo le equazioni e passando a limite per $j \to \infty$ otteniamo, usando le ipotesi, che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(u - u_\lambda)^+|^2\,dx &= \int_{\Sigma_\lambda} [f(u) - f(u_\lambda)](u - u_\lambda)^+\,dx \\ &\le C \int_{A_\lambda} (u_\lambda + u)^\alpha (u - u_\lambda)(u - u_\lambda)^+\,dx \le C' \int_{A_\lambda} u^\alpha [(u - u_\lambda)^+]^2\,dx. \end{aligned}$$

Usando le diseguaglianze di Hölder e di Sobolev come nel paragrafo 1.2 otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(u - u_\lambda)^+|^2\,dx &\le C' \left(\int_{A_\lambda} u^{\alpha\frac{N}{2}}\,dx \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\Sigma_\lambda} [(u - u_\lambda)^+]^{2^*}\,dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\le C_1 \left(\int_{A_\lambda} u^{\alpha\frac{N}{2}}\,dx \right)^{\frac{2}{N}} \int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(u - u_\lambda)^+|^2\,dx. \end{aligned}$$

Procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 2.1 si conclude facilmente. $\square$

Dimostrazione del teorema 1.1. La dimostrazione del fatto che u dipende solo da x^1 e x^N è simile a quella del Teorema 1.3 e consiste nel provare la simmetria della trasformata di Kelvin di u centrata in ogni punto P con $P^1 = P^N = 0$, rispetto ad ogni direzione ortogonale alle direzioni x^1 e x^N.

Perciò osserviamo che la trasformata di Kelvin v della soluzione u, così come le sue riflesse rispetto ad una direzione appartenente allo spazio generato da $e_2, \dots, e_{N-1}$, verificano lo stesso problema misto della soluzione u. Quindi è sufficiente cambiare le funzioni test (possibili) e seguire la dimostrazione precedente nel caso in cui g non è costante sui valori di u. Nel caso in cui $f(t) = l\, t^{\frac{N+2}{N-2}}$, il caso $\lambda_0 > 0$ non può accadere, perché la soluzione originaria u sarebbe regolare all'infinito e il Teorema 1.5 mostra che non esistono tali soluzioni.

Poiché il centro della trasformata di Kelvin è un punto arbitrario P tale che $P^1 = P^N = 0$, e u è simmetrica rispetto agli iperpiani che passano per P e che sono ortogonali ad ogni direzione ortogonale alle direzioni x^1 e x^N, segue che u non dipende da $x^2, \dots x^{N-1}$.

Per ciò che riguarda la monotonia nella direzione x_1 procediamo intanto nello stesso modo, considerando la trasformata di Kelvin v di u centrata all'origine, che verifica lo stesso problema al contorno, e provando che la diseguaglianza $v < v_\lambda$ rimane valida in Σ_λ se $\lambda > 0$ ($\lambda_0 > 0$ non può accadere perché altrimenti tale valore sarebbe assunto e invece l'uguaglianza $v \equiv v_{\lambda_0}$ non è possibile a causa delle condizioni al bordo). L'unica differenza è che adesso non possiamo iniziare il metodo del moving plane nella direzione opposta. Per continuità otteniamo $v \le v_0$ in $\Sigma_0 = \{x \in \mathbb{R}^N_+ : x_1 > 0\}$. Ricordando la definizione di $v(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} u(\frac{x}{|x|^2})$ e osservando che $|x_\lambda| = |x|$ per $\lambda = 0$, otteniamo che $u \le u_0$ in Σ_0.

Lo stesso trucco funziona quando consideriamo la trasformata di Kelvin di $v^\mu(y) = v_{P_\mu}(y) = \frac{1}{|y|^{N-2}} u(P_\mu + \frac{y}{|y|^2})$ centrata in un punto $P = P_\mu$ con $P^2 = \cdots = P^N = 0$, $P^1 = \mu \ge 0$. Essa verifica una condizione di Dirichlet nella parte della frontiera formata dai punti y con $y^N = 0$, $y^1 > 0$ e ciò è sufficiente per provare come prima che per ogni $\lambda > 0$ la diseguaglianza $v^\mu \le v^\mu_\lambda$ vale in Σ_λ per ogni $\lambda > 0$. Poiché $\lambda > 0$ è arbitrario otteniamo $v^\mu \le v^\mu_0$ in Σ_0, i.e. $v^\mu(y^1, y') \le v^\mu_0(y) = v^\mu(-y^1, y')$ per ogni $y = (y^1, y')$ con $y^1 > 0$. In termini di u questo significa che la diseguaglianza $u \le u_\mu$ vale in Σ_μ per ogni $\mu \ge 0$, e in particolare u è non crescente nella direzione x^1nella parte del semispazio in cui $x^1 > 0$.

La dimostrazione della monotonia nella direzione x^1 in tutto lo spazio invece richiede alcune nuove idee, poiché la tecnica precedente non funziona. Infatti vorremmo provare che la relazione $u \le u_\mu$ rimane valida in Σ_μ anche per $\mu < 0$, ma c'è un problema che sorge usando la trasformata di Kelvin $v^\mu(y) = \frac{1}{|y|^{N-2}}u(P_\mu + \frac{y}{|y|^2})$ centrata in $P = P_\mu = (\mu, \dots, 0)$: è impossibile iniziare il metodo del moving plane per questa trasformata da $\lambda = -\infty$ poiché se λ è grande ci sono punti in cui è verificata la condizione di Neumann, e quindi la soluzione è positiva, che sono riflessi in punti in cui la funzione si annulla. In termini di funzioni test, per λ grande la funzione $(v - v_\lambda)^+$ non può essere usata come funzione test per il problema verificato dalla funzione riflessa v_λ, poiché non si annulla nei punti in cui vale la condizione di Dirichlet per v_λ.

Comunque la stima fondamentale usata in tutti i teoremi precedenti vale se λ è vicino a zero, cosi̇̀ l'idea è di continuare la diseguaglianza $v^\mu(y) < v^\mu(y_\lambda)$ per ogni $\lambda > 0$ fissato, muovendosi da μ a $\mu = 0$, dove la diseguaglianza stretta è verificata (poiché $\lambda > 0$), fino a $\mu = \frac{-1}{2\lambda}$.

Rendiamo precise queste considerazioni.

Se $\mu \le 0$ sia v^μ la trasformata di Kelvin della soluzione centrata nel punto $P_\mu = (\mu, 0, \dots, 0)$, i.e. $v^\mu(y) = \frac{1}{|y|^{N-2}}u(P_\mu + \frac{y}{|y|^2})$. Essa verifica la condizione al bordo di Dirichlet nei punti y con $y^N = 0$, $0 < y^1 < \frac{-1}{\mu}$ ($0 < y^1 < \infty$ se $\mu = 0$) e la condizione di Neumann nel resto della frontiera. Se $0 < \lambda < \frac{-1}{2\mu}$ allora v^μ, e quindi anche $(v^\mu - v^\mu_\lambda)^+$, si annulla non solo quando vale la condizione di Dirichlet per $v = v^\mu$, ma anche dove vale la condizione di Dirichlet per la funzione riflessa v^μ_λ. Quindi possiamo prendere, come nel Lemma 1.1, la funzione $\varphi = \varphi_\varepsilon = \eta^2_\varepsilon(v^\mu - v^\mu_\lambda)^+$ come funzione test nel problema verificato da v^μ e v^μ_λ. Procedendo esattamente come nel Lemma otteniamo la stima fondamentale, cioè

$$\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v^\mu - v^\mu_\lambda)^+|^2 \le C_\lambda \left(\int_{A^\mu_\lambda} \frac{1}{|y|^{2N}} \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v^\mu - v^\mu_\lambda)^+|^2 \right) \tag{1.9}$$

dove C_λ dipende da N, λ, ed è non crescente in λ e $A^\mu_\lambda = \{y \in \Sigma_\lambda \backslash P_\lambda : g(|y|^{N-2}v^\mu(y)) > 0\,,\ v^\mu(y) \ge v^\mu_\lambda(y)\}$, dove $P_\lambda = (2\lambda, 0, \dots, 0)$ è il punto riflesso dell'origine, che è il punto singolare di ogni trasformata v^μ.

Se ora fissiamo $\lambda > 0$, allora la stima precedente vale per ogni $\mu \in (\frac{-1}{2\lambda}, 0)$. Inoltre la funzione $\frac{1}{|y|^{2N}}\,\chi_{A^\mu_\lambda}$, dove χ_S indica la funzione caratteristica dell'insieme S, converge puntualmente a zero per $\mu \to 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus (T_\lambda \cup \{P_\lambda\})$.

Procedendo esattamente come nella dimostrazione della Proposizione 1.1 deduciamo che la diseguaglianza $v^\mu \leq v^\mu_\lambda$ vale in Σ_λ per $\mu < 0$ e vicino a 0, e gli stessi argomenti permettono di continuare fino a $\mu = \frac{-1}{2\lambda}$.

Così otteniamo che per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $\mu \geq \frac{-1}{2\lambda}$ la diseguaglianza $v^\mu \leq v^\mu_\lambda$ vale in Σ_λ. Messo in un'altra forma per ogni fissato $\mu < 0$ la diseguaglianza vale per ogni λ con $0 < \lambda < \frac{-1}{2\mu}$. Facendo tendere λ a 0 otteniamo che $v^\mu \leq v^\mu_0$ in Σ_0, i.e. $v^\mu(y^1, y') \leq v^\mu_0(y) = v^\mu(-y^1, y')$ per ogni $y = (y^1, y')$ con $y^1 > 0$. Questo implica come prima che la diseguaglianza $u \leq u_\mu$ vale in Σ_μ, e poiché $\mu < 0$ è arbitrario otteniamo che u è non crescente nella direzione x^1 in tutto il semispazio.

Infine supponiamo che u sia limitata e f verifichi iii). Poiché u dipende solo da x^1 e x^N ed è decrescente nella direzione x^1, per ogni $t \geq 0$ esiste il limite $z(t) = \lim_{x^1 \to -\infty} u(x^1, t)$ ed è facile vedere che z verifica la stessa equazione in $\mathbb{R}_+$ (vedi e.g. [**D2**]), con una condizione di Neumann in 0. Mostriamo che $z(t) \equiv 0$ in $\mathbb{R}_+$. La dimostrazione ricalca quella fatta nella parte finale del Teorema 1.3. Se $z(t) = 0$ in $\mathbb{R}_+$ allora anche $u(x^1, t) = 0$ dalla monotonia nella direzione x^1 e il Teorema è dimostrato. Supponiamo quindi per assurdo che $z(t) \neq 0$ in $\mathbb{R}_+$. Dal principio del massimo forte $z > 0$ in $\mathbb{R}_+$. Inoltre $z'' = -f(z) < 0$ per ogni $t > 0$. Da qui deduciamo che esiste $t_0 > 0$ tale che $z'(t_0) < 0$. Se non fosse così infatti per ogni fissato $t_1 > 0$ e per ogni $t \geq t_1$, $z(t) \geq a = u(t_1) > 0$, e poiché f è continua e strettamente positiva $m = \inf_{[a, \sup z]} f(t) > 0$. Quindi sviluppando la z con la formula di Taylor abbiamo $z(t) = z(t_1) + z'(t_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}z''(\xi)(t - t_1)^2 \leq z(t_1) + z'(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{2}m(t - t_1)^2$, con $t_1 \leq \xi \leq t$ così che $\lim_{t \to \infty} z(t) = -\infty$ e quindi una contraddizione. Infine se esiste t_0 tale che $z'(t_0) < 0$ sempre dalla formula di Taylor abbiamo $z(t) = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}z''(t_0)(t - t_0)^2 \leq z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0)$ e anche in questo caso $\lim_{t \to \infty} z(t) = -\infty$ ottenendo ancora una contraddizione.

$\square$

Osservazione 1.5. Supponiamo che $f(0) \geq 0$, che è una conseguenza dell'ipotesi (i) e che f sia la somma di una funzione Lipschitziana e di una funzione non decrescente. Come nel Teorema 1.5 se u è una soluzione non banale l'uguaglianza $u \equiv u_\lambda$ non può valere in Σ_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ a causa delle condizioni sul bordo. Allora dal principio del confronto forte e dal lemma di Hopf otteniamo $u < u_\lambda$ in Σ_λ e $(u - u_\lambda)_{x^1} = 2u_{x^1} < 0$ su $T_\lambda \cap \mathbb{R}^N_+$. Poiché $\lambda \geq 0$ è arbitrario otteniamo che (u dipende solo da x^1 e x^N e) $u_{x^1}(x) < 0 \quad$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N_+$.

Dimostrazione alternativa della monotonia della $u(x)$. Forniamo qui la seconda dimostrazione della monotonia di $u(x)$ nella direzione x^1 sfruttando un'idea di [**AB**]. Le due dimostrazioni sono completamente diverse, le riportiamo entrambe poiché tale monotonia permette di ottenere la non esistenza delle soluzioni limitate per il problema (1.2), sotto l'ipotesi *iii*) e quindi il risultato principale di questo capitolo. Questa dimostrazione consiste nello scegliere in modo opportuno il centro e il raggio della trasformata di Kelvin. Più precisamente se facciamo tendere i centri b dell'inversione all'infinito in modo che la palla $B_R(b)$ sia sempre internamente tangente all'iperpiano T_{-a}, allora la trasformata di Kelvin, tende alla simmetria rispetto a T_{-a}. Definiamo un po' di notazioni. Sia $b = (b, 0, \ldots, 0)$, $b > 0$, un qualunque punto su Γ_0. Operiamo una trasformata di Kelvin con centro in tale punto b e che inverta rispetto ad una palla di raggio R, dove R sarà scelto in seguito; quindi

$$y_b(x) = b + \frac{x-b}{|x-b|^2} R^2,$$

$$v_b(x) = \frac{R^{N-2}}{|x-b|^{N-2}} u\left(y_b(x)\right) = \frac{R^{N-2}}{|x-b|^{N-2}} u\left(b + \frac{x-b}{|x-b|^2} R^2\right).$$

La trasformata v_b verifica l'equazione

$$-\Delta v_b = \frac{1}{|x|^{N+2}} f\left(|x|^{N-2} v_b(x)\right), \qquad \text{in } \mathbb{R}^N_+ \setminus \{b\}$$

e la trasformata è singolare in b. In particolare scegliamo $R = |b - a|$ dove a è un qualunque punto su Neumann ovvero $a = (-a, 0, \ldots, 0)$, $a > 0$. $R = b + a$. Per come abbiamo definito la trasformata abbiamo che l'interno della palla di centro b e raggio R diventa dopo la trasformazione l'esterno della palla di centro b e raggio R e viceversa.

Inoltre siccome prendiamo il punto b, centro di inversione, sull'iperpiano $x^N = 0$ allora il semispazio si trasforma in sé e la frontiera del semispazio anch'essa si trasforma in sé. Vogliamo vedere ora come si trasformano Γ_0 e Γ_1. Dalla definizione di y_b abbiamo

$$y_b - b = \frac{x-b}{|x-b|^2}(b+a)^2; \qquad |y_b - b| = \frac{1}{|x-b|}(b+a)^2,$$

$$x - b = \frac{y_b - b}{|y_b-b|^2}(b+a)^2; \qquad x = b + \frac{y_b - b}{|y_b-b|^2}(b+a)^2;$$

quindi Γ_0 che è definito da $x^1 > 0$ diventa

$$x^1 = b + \frac{y^1 - b}{|y-b|^2}(b+a)^2 > 0,$$

$$(y^1-b)^2 + \left(y^2\right)^2 + \cdots + \left(y^N\right)^2 + (y^1-b)\frac{(b+a)^2}{b} > 0,$$

$$\left(y^1\right)^2 - y^1\left(2b - \frac{(b+a)^2}{b}\right) + b^2 - (b+a)^2 + \left(y^2\right)^2 + \cdots + \left(y^N\right)^2 > 0,$$

$$\left(y^1\right)^2 - \frac{2b^2 - b^2 - a^2 - 2ab}{b}y^1 - a^2 - 2ab + \left(y^2\right)^2 + \cdots + \left(y^N\right)^2 > 0,$$

$$\left(y^1 - \frac{b^2 - 2ab - a^2}{b}\right)^2 + \left(y^2\right)^2 + \cdots + \left(y^N\right)^2 > \left(\frac{b^2-2ab-a^2}{b}\right)^2 + a^2 + 2ab.$$

La condizione di Dirichlet va a finire nell'esterno della palla di centro $\left(\frac{b^2-2ab-a^2}{b}, 0, \dots, 0\right)$ e raggio $\left(\left(\frac{b^2-2ab-a^2}{b}\right)^2 + a^2 + 2ab\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{b^2-2ab-a^2}{b}$. Chiamiamo questa palla B_b. Sia $\tilde{b}$ il centro di B_b. Osserviamo intanto che poiché v è singolare in b allora $b \in \partial B_b$ e $b > \tilde{b}$. Insomma v_b verifica

$$\begin{cases} -\Delta v_b = \frac{1}{|x|^{N+2}} f\left(|x|^{N-2} v_b(x)\right) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \setminus \{b\} \\ v_b \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \setminus \{b\} \\ v_b = 0 & \text{se } x \in \partial\mathbb{R}^N_+ \text{ t.c. } x \notin B_b \\ \frac{\partial v}{\partial x^N} = 0 & \text{se } x \in \partial\mathbb{R}^N_+ \text{ t.c. } x \in B_b. \end{cases}$$

Applichiamo il moving plane alla funzione u con le notazioni definite in precedenza, mentre per quanto riguarda la trasformata v_b applichiamo il moving plane rispetto alla direzione opposta $-x^1$. Siano ora $\Sigma_b(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^N_+ : x^1 < \lambda\}$, $\tilde{\Sigma}_b(\lambda) = \Sigma_b(\lambda) \setminus \{b_\lambda\}$, $v_{b,\lambda}(x) = v_b(x_\lambda)$, $z_{b,\lambda} = v_b - v_{b,\lambda}$. Possiamo applicare il moving plane nella direzione $-x^1$, e confrontare v_b con $v_{b,\lambda}$ come in precedenza, e ottenere la stima equivalente alla (1.5) per il semispazio, da cui in seguito $z_{b,\lambda}(x) \leq 0$ in $\tilde{\Sigma}_b(\lambda)$ per opportuni valori di λ. Possiamo arrivare al massimo fino a $\lambda = \tilde{b}$, perché se superiamo tale punto allora $(v - v_\lambda)^+$ non è più ammissibile come funzione test per l'equazione verificata dalla $v_{b,\lambda}$. Inoltre per $\lambda < \tilde{b}$ il moving plane non si può fermare sempre a causa della condizione di Neumann, altrimenti avrei simmetria della v_b, $v_b = v_{b,\lambda}$, e questo non è possibile se $\lambda < \tilde{b}$. Comunque scegliendo b sufficientemente grande $\tilde{b} > 0$ e, applicando il moving plane, possiamo arrivare fino a $\lambda = -a < 0$. Ovvero troviamo $v < v_\lambda$ per ogni $x \in \tilde{\Sigma}_b(\lambda)$ e $\lambda \leq -a$.

Ora facciamo tendere b a $+\infty$. Per ogni valore di b compiamo un'inversione rispetto alla palla $B_R(b)$ e, per come ho scelto R, per ogni valore di b tale palla è sempre tangente all'iperpiano $T_{-a}[x^1 = -a]$. Quindi al limite per $b \to +\infty$ la trasformata di Kelvin tende alla simmetria rispetto all'iperpiano T_{-a}. Ossia $\lim_{b\to\infty} v_b(x) = u(x_{-a})$. Sia $x \in \Sigma_{-a}$, per b grande x è contenuto nell'interno della palla $B_R(b)$, quindi il suo trasformato $y_b(x)$ risulta esterno a tale palla. Inoltre, se b sufficientemente grande $y_b(x) \in \tilde{\Sigma}_b(-a) = \{y : y^1 < -a\}$. Osserviamo anche che il punto di singolarità b_λ tende a $-\infty$. Inoltre per ogni valore di b abbiamo $z_{b,-a}(y_b) = v_b\,(y_b(x)) - v_{b,-a}\,(y_b(x)) \leq 0$ se $y_b(x) \in \tilde{\Sigma}_b(-a)$, quindi anche $\lim_{b\to\infty} z_{b,-a}\,(y_b(x)) \leq 0$, per ogni $x \in \Sigma_{-a}$. Osserviamo inoltre che $\lim_{b\to\infty} v_b\,(y_b(x)) = \lim_{b\to\infty} \frac{R^2}{|y_b(x)-b|^2} u\,(y_b\,(y_b(x))) = u(x)$. Infine quindi $w_{-a}(x) = \lim_{b\to\infty} z_{b,\lambda}\,(y_b(x)) = \lim_{b\to\infty} v_b(y_b) - v_{b,-a}(y_b) = u(x) - u(x_{-a}) \leq 0$. Dall'arbitrarietà di a abbiamo $w_\lambda(x) \leq 0$ per ogni $\lambda < 0$. Unitamente alla monotonia della u rispetto alla direzione x^1 fino a $\lambda = 0$ ottengo che u è non crescente nella direzione x^1 in tutto il semispazio. □

1.4. Alcuni risultati in una striscia

Sia S una striscia, $S = \{(x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}^N,$ tali che $0 < x^N < 1\}$, poniamo $\partial S = S_1 \cup S_2$ dove $S_1 = \{(x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}^N,$ tali che $x_N = 0\}$ ed $S_2 = \{(x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}^N,$ tali che $x_N = 1\}$. In tale striscia considero il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } S \\ u = 0 & \text{su } S_1 \\ u = a & \text{su } S_2 \\ 0 \leq u \leq a & \text{in } S \end{cases} \tag{1.11}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Mostriamo il seguente

TEOREMA 1.6. *Sia* $u \in W^{1,2}_{loc}(S) \cap L^\infty_{loc}(S) \cap C^0(S)$ *soluzione debole di (1.11) con* $N \geq 3$ *e sia* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua che verifica*

i) $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$ *è non crescente in* $(0, +\infty)$.

ii) $\frac{f(t)^+}{t}$ *è limitato per* $t \to 0$.

Allora u *dipende solo dalla variabile* x^N.

Dimostrazione. Fissiamo l'origine in un punto qualsiasi di S_1 e operiamo un inversione rispetto a tale origine. Sia v la trasformata di Kelvin di u centrata nell' origine, cioè

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} u(\frac{x}{|x|^2}), \quad x \in S' \setminus \{0\}$$

dove S' è il trasformato di S rispetto all'inversione $y = \frac{x}{|x|^2}$. Essa verifica (in senso debole) in $S' \setminus \{0\}$ l'equazione

$$-\Delta v(x) = \frac{1}{|x|^{N+2}} f(|x|^{N-2} v(x))$$

che può anche essere scritta come

$$-\Delta v(x) = g(|x|^{N-2} v(x)) v(x)^{\frac{N+2}{N-2}}$$

dove $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$. Inoltre S' è cosi̇ definito: $S' = \{(x^1, \ldots, x^N) \in \mathbb{R}^N,$ tali che $x^N > 0, x \notin \overline{B_{\frac{1}{2}}(A)}\}$ e $A = (0, \ldots, 0, \frac{1}{2})$. Quindi S' è il semispazio $\mathbb{R}^N_+$ privato della palla $B_{\frac{1}{2}}(A)$, con centro in A e raggio $\frac{1}{2}$, tangente alla frontiera del semispazio nell'origine e tutta contenuta in esso. Inoltre l'origine è un punto di singolarità per la v. Le condizioni al bordo per la v diventano

$$v = 0 \text{ su } \partial \mathbb{R}^N_+ \setminus \{0\}$$

e

$$v = \frac{a}{|x|^{N-2}} \text{ su } \partial B_{\frac{1}{2}}(A) \setminus \{0\}.$$

Osserviamo anche che la limitazione

$$0 \leq u \leq a$$

diventa

$$0 \leq v \leq \frac{a}{|x|^{N-2}};$$

quindi v ha massimo sulla frontiera della palla $B_{\frac{1}{2}}(A)$ ed è eventualmente singolare nell' origine. Poiché u è continua in S, v è continua in $S' \setminus \{0\}$ e decade all'infinito come $u(0)|x|^{2-N}$ cosi̇ che $u \in L^{2^*} \cap L^\infty(S' \setminus B_r(0))$ per ogni $r > 0$.

Introduciamo le solite notazioni per applicare il metodo del moving plane; fissiamo una direzione perpendicolare alla direzione x_N, che per comodità considereremo sempre come x^1. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ siano

$$\Sigma_\lambda := \{x \in S' : x^1 > \lambda\},$$

$$T_\lambda := \{x \in S' : x^1 = \lambda\};$$

e per $x \in \Sigma_\lambda$ indichiamo con

$$x_\lambda = R_\lambda(x)$$

il riflesso di x rispetto all'iperpiano T_λ e

$$v_\lambda(x) = v(x_\lambda)$$

la funzione riflessa. Indichiamo inoltre con P_λ il riflesso dell'origine rispetto all'iperpiano T_λ e con B_λ il riflesso della palla $B_{\frac{1}{2}}(A)$. Essa è tangente alla frontiera del semispazio in P_λ. Scriviamo esplicitamente le equazioni verificate da v e v_λ.

$$\begin{cases} -\Delta v = g(|x|^{N-2}v(x))v(x)^{\frac{N+2}{N-2}} & \text{in } S' \\ v = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ \setminus \{0\} \\ v = \frac{a}{|x|^{N-2}} & \text{su } \partial B_{\frac{1}{2}}(A) \setminus \{0\} \\ 0 \leq v \leq \frac{a}{|x|^{N-2}}; \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda = g(|x_\lambda|^{N-2}v_\lambda(x))v_\lambda(x)^{\frac{N+2}{N-2}} & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \setminus B_\lambda \\ v_\lambda = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ \setminus \{P_\lambda\} \\ v_\lambda = \frac{a}{|x_\lambda|^{N-2}} & \text{su } \partial B_\lambda \setminus \{P_\lambda\} \\ 0 \leq v_\lambda \leq \frac{a}{|x_\lambda|^{N-2}}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Osserviamo che per ogni $\lambda > 0$ per come è stato definito Σ_λ abbiamo $B_\lambda \cap \Sigma_\lambda \neq \emptyset$. Quindi non possiamo confrontare v con v_λ su tutto Σ_λ, come in precedenza, perché v_λ non è definita su B_λ. Ci limitiamo a confrontare v e v_λ sull'insieme $\Sigma'_\lambda = \Sigma_\lambda \setminus B_\lambda$.

Osserviamo anche che su $\partial\Sigma'_\lambda \setminus \{P_\lambda\}$ abbiamo $v - v_\lambda = 0$ se $x^N = 0$ oppure se $x \in T_\lambda$, e $v < v_\lambda$ se $x \in (\partial B_\lambda \setminus \{P_\lambda\}) \cap \overline{\Sigma_\lambda}$. Infatti poiché $|x| > |x_\lambda|$ abbiamo $v \leq \frac{a}{|x|^{N-2}} < \frac{a}{|x_\lambda|^{N-2}} = v_\lambda$ su ∂B_λ.

Come detto prima per ogni $\lambda > 0$ v e $(v - v_\lambda)^+$ appartengono a $L^{2^*} \cap L^\infty(\Sigma'_\lambda)$.

Per $\varepsilon > 0$ piccolo sia $\eta = \eta_\varepsilon \in C^1_0(\mathbb{R}^N)$ una cut-off tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 1$ se $2\varepsilon \leq |x - P_\lambda| \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $\eta(x) = 0$ se $|x - P_\lambda| < \varepsilon$ oppure se $|x - P_\lambda| > \frac{2}{\varepsilon}$ $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ se $\varepsilon < |x - P_\lambda| < 2\varepsilon$, $|\nabla\eta| \leq 2\varepsilon$ se $\frac{1}{\varepsilon} < |x - P_\lambda| < \frac{2}{\varepsilon}$.

Tale cut-off permette di eliminare il punto di singolarità P_λ e di ridurci per ogni ε ad un insieme limitato. Testiamo le equazioni di v e v_λ in Σ'_λ con la funzione $\varphi_\varepsilon = \eta_\varepsilon^2 (v - v_\lambda)^+$. Osserviamo che $(v - v_\lambda)$ si annulla su T_λ per costruzione e su $\partial\mathbb{R}^N_+ \setminus \{P_\lambda\} \cap \partial\Sigma'_\lambda$ per le condizioni al bordo. Inoltre $\partial\Sigma'_\lambda = \Big(\partial\Sigma_\lambda \setminus \partial B_{\frac{1}{2}}(A)\Big) \cup \big(\partial B_\lambda \cap \overline{\Sigma}_\lambda\big) \subset T_\lambda \cup \big(\partial\mathbb{R}^N_+ \cap \overline{\Sigma}_\lambda\big) \cup \big(\partial B_\lambda \cap \overline{\Sigma}_\lambda\big)$ e su $\partial B_\lambda \cap \overline{\Sigma}_\lambda$ abbiamo $(v - v_\lambda)^+ = 0$ poiché $|x| > |x_\lambda|$ e $v \le \frac{a}{|x|^{N-2}} < \frac{a}{|x_\lambda|^{N-2}} = v_\lambda$ su ∂B_λ. Quindi per ogni $\lambda > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Sigma'_\lambda)$ ed è una buona funzione test per entrambe le equazioni (1.12) e (1.13) in Σ'_λ.

Sottraendo le equazioni e ragionando come nel Lemma 1.1 e usando l'ipotesi *ii)* come nel caso del problema nel semispazio con condizione di Dirichlet, dalle diseguaglianze di Hölder e di Sobolev, possiamo passare a limite dentro l'integrale per convergenza dominata, per $\varepsilon \to 0$, e ottenere la stima

$$\int_{\Sigma'_\lambda} |\nabla(v - v_\lambda)^+|^2 \le C_\lambda \left(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}}\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\Sigma'_\lambda} |\nabla(v - v_\lambda)^+|^2\right) \tag{1.14}$$

dove $D_\lambda = \{x \in \Sigma'_\lambda \setminus P_\lambda : g(|x|^{N-2}v(x)) > 0\}$ e $A_\lambda = \{x \in D_\lambda : v(x) \ge v_\lambda(x)\}$, e $C_\lambda > 0$ è tale che C_λ dipende da N e λ ed è non crescente in λ (e finito per ogni $\lambda > 0$). Con questa stima è possibile ottenere i due passi del moving plane, come nei casi trattati precedentemente. In questo caso indichiamo con $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N_+ \ t.c.\,, \ \forall \mu \in (\lambda, +\infty)\,, \, v(x) \le v_\mu(x) \text{ in } \Sigma'_\mu\}$.

Passo 1: Poiché $\frac{1}{|x|^{2N}} \in L^1(\Sigma'_\lambda)$ per ogni $\lambda > 0$ e $\Sigma'_\lambda \to \emptyset$ per $\lambda \to +\infty$, segue che$\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}} \le \int_{\Sigma'_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}} \to 0$ e $C_\lambda(\int_{A_\lambda} \frac{1}{|x|^{2N}})^{\frac{2}{N}} < 1$ per ogni λ in qualche intervallo $(\lambda_1, +\infty)$.

Passo 2: Sia $\lambda_0 = \inf \Lambda > 0$ e supponiamo che v non coincida con la sua riflessa v_{λ_0} in Σ'_{λ_0}. Allora abbiamo $v < v_{\lambda_0}$ in D_{λ_0}.

Ciò non è immediato poiché, f non è Lipschitziana per ipotesi, e Σ'_λ non è connesso se $\lambda \le \frac{1}{2}$, ma può essere verificato nel modo seguente. Sappiamo che $v \le v_{\lambda_0}$ in $\Sigma'_{\lambda_0} \setminus P_{\lambda_0}$ per continuitá, e $|x| > |x_{\lambda_0}|$ in Σ_{λ_0} poiché $\lambda_0 > 0$. Consideriamo l'aperto $O = \{x \in D_{\lambda_0} : |x|^{N-2}v > |x_{\lambda_0}|^{N-2}v_{\lambda_0}\}$. Come nella dimostrazione della Proposizione 1.1 $v < v_{\lambda_0}$ in $D_{\lambda_0} \setminus O$. Consideriamo adesso una componente di O. Se su tale componente g è non costante allora $v < v_{\lambda_0}$ sempre come nella Proposizione 1.1, altrimenti se g è costante allora $g = c > 0$ e la frontiera di tale componente o contiene dei punti di ∂O e quindi ancora $v < v_{\lambda_0}$ oppure cade tutta su $\partial\Sigma'_{\lambda_0}$. In questo caso comunque almeno una parte di tale frontiera cade su $\partial B_{\lambda_0} \setminus \{P_{\lambda_0}\}$ e quindi $v < v_{\lambda_0}$ in tali punti e sempre dal principio del massimo $v < v_{\lambda_0}$ anche in tale componente. Alla fine $v < v_{\lambda_0}$ in D_{λ_0}.

Questo implica che la funzione $\frac{1}{|x|^{2N}}\chi_{A_\lambda}$, converge puntualmente a zero per $\lambda \to \lambda_0$ in $S' \setminus (T_{\lambda_0} \cup \{P_{\lambda_0}\})$ e quindi quasi ovunque. Se $0 < \lambda_0 - \delta < \lambda_0$ allora $\frac{1}{|x|^{2N}}\chi_{A_\lambda} \leq \frac{1}{|x|^{2N}}\chi_{\Sigma'_{\lambda_0-\delta}} \in L^1$, per convergenza dominata $\int_{A_\lambda}\frac{1}{|x|^{2N}} \to 0$ per $\lambda \to \lambda_0$, così che $C_\lambda(\int_{A_\lambda}\frac{1}{|x|^{2N}})^{\frac{2}{N}} < 1$ per λ in un certo intervallo $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$. Come precedentemente questo implica che $v \leq v_\lambda$ in Σ_λ per $\lambda < \lambda_0$ e vicino a λ_0, contraddicendo la proprietà di inf di λ_0.

Se invece $v \equiv v_{\lambda_0}$ in Σ'_{λ_0} allora su ∂B_{λ_0} abbiamo $v_{\lambda_0} = \frac{a}{|x_{\lambda_0}|^{N-2}} > \frac{a}{|x|^{N-2}} \geq v(x)$ e quindi questo caso non può accadere.

Necessariamente deve essere $\lambda_0 = 0$ e $v \leq v_0$ in $\Sigma_0 = \Sigma'_0$. La palla $B_{\frac{1}{2}}(A)$ è infatti simmetrica rispetto all'iperpiano T_0. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento partendo dalla direzione opposta $-x^1$ ottenendo ancora $\lambda_0 = 0$ e quindi $v \equiv v_0$ in Σ_0. Poiché $|x| = |x_0|$ allora dall'ultima uguaglianza ricaviamo anche $u = u_0$ in $A_0 = \{x \in S : x^1 > 0\}$. Poiché l'origine è stata scelta in modo arbitrario abbiamo che u deve essere costante rispetto alla variabile x^1, ovvero u non dipende da x^1. Possiamo ripetere il ragionamento per ogni direzione x^i per $i = 1, \ldots, N-1$ ottenendo così che la soluzione dipende solo dalla variabile x^N. $\square$

Osservazione 1.6. Il Teorema precedente si può enunciare per un problema leggermente più generale, cioé per il seguente

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } S \\ u = b & \text{su } S_1 \\ u = a & \text{su } S_2 \\ b \leq u(x) \leq a, & \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Siccome cerchiamo soluzioni positive deve essere $b \geq 0$. Inoltre se $b \neq 0$ possiamo eliminare l'ipotesi *ii*) del Terorema 1.6 ed ottenere che la soluzione debole dipende solo da x^N.

Come caso particolare consideriamo il seguente

TEOREMA 1.7. *Sia* $u \in W^{1,2}_{loc}(S) \cap L^{\infty}_{loc}(S) \cap C^0(S)$ *soluzione debole di*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & in\ S \\ u = a > 0 & su\ \partial S \\ 0 \leq u \leq a & in\ S \end{cases} \tag{1.16}$$

dove $N \geq 3$ *e* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua che verifica*

i) $g(t) = \frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$ *è non crescente in* $(0, +\infty)$.

Allora u *dipende solo da* x^N. *Inoltre se* f *è strettamente positiva in* $(0, a)$ *allora il problema (1.16) possiede solo la soluzione costante* $u = a$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione del fatto che u dipenda solo da x^N è equivalente a quella del Teorema precedente tranne per il fatto che non serve l'ipotesi *ii)* poiché la v in questo caso non si annulla più su una parte del bordo di Σ_λ ma è ivi strettamente positiva. Non ripetiamo quindi il procedimento.

Sia ora f strettamente positiva in $(0, a)$, u è una soluzione del problema

$$\begin{cases} -u'' = f(u) & 0 < s < 1 \\ u(0) = a = u(1) \\ 0 \leq u \leq a \end{cases} \tag{1.17}$$

In questo caso u è anche soluzione classica ed è almeno di classe $C^2(0, 1)$. Se $u = cost = a$ allora $f(a) = 0$. Supponiamo ora che u sia una soluzione non costante in $(0, 1)$. Allora u avrà almeno un minimo interno. Sia s_0 il più piccolo valore di $s \in (0, 1)$ tale che $u'(s_0) = 0$ e $u(s_0) < a$. Dall'equazione $-u''(s) = f(u(s)) \geq 0$ quindi $u'(s) \leq 0$ in $(0, s_0)$. Inoltre esiste $s_1 \in [0, s_0)$ tale che $u(s_0) < u(s) < a$ per ogni $s \in (s_1, s_0)$. Moltiplichiamo l'equazione per u' e integriamo su (s, s_0) con $s_1 < s < s_0$

$$-u''u' = f(u)u',$$

$$\int_s^{s_0} -u''u'dt = -\int_{u'(s)}^{u'(s_0)} u'du' = \frac{1}{2}\left(u'(s)\right)^2 = \int_s^{s_0} f(u)u'dt =,$$

$$= \int_{u(s)}^{u(s_0)} f(u)du = -\int_{u(s_0)}^{u(s)} f(t)dt < 0.$$

Abbiamo ottenuto la contraddizione $0 \leq \frac{1}{2}\left(u'(s)\right)^2 = -\int_{u(s_0)}^{u(s)} f(t)dt < 0$, da cui otteniamo che $u = a$ è l'unica soluzione.

□

Osservazione 1.7. Nel caso del Teorema 1.6 anche supponendo f strettamente positiva in $(0, a)$ non è possibile ottenere la non esistenza delle soluzioni come mostra il seguente esempio:
consideriamo la funzione $y(x) = a\sin(\frac{\pi}{2}x)$ per $0 < x < 1$. Essa verifica

$$y(0) = 0, \quad y(1) = a, \quad y'' = -a\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(\frac{\pi}{2}x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y(x).$$

In questo caso quindi $f(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 t$ è strettamente positiva in $(0, a)$ e verifica entrambe le ipotesi del Teorema 1.6, cioè $\frac{t}{t^{\frac{N+2}{N-2}}}$ decrescente poiché $\frac{N+2}{N-2} > 1$ e $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ limitato.

Osservazione 1.8. Siccome i Teoremi precedenti si applicano a soluzioni deboli, a maggior ragione valgono per soluzioni classiche di classe $C^2(S)$ degli stessi.

Proviamo adesso un risultato per soluzioni classiche. Consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } S \\ u = b & \text{su } S_1 \\ u = a & \text{su } S_2 \\ u \geq 0 & \text{in } S \end{cases} \tag{1.18}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq b, \leq a$ e non entrambi nulli. Sia $u \in C^2(S)$ una soluzione di (1.18). Indichiamo con $Z = \{x \in S : \nabla u(x) = 0\}$. Diciamo che Z dipende solo da x^N se per ogni $\tilde{x} \in Z$, $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N)$ anche $(x^1, \dots, x^{N-1}, \tilde{x}^N) \in Z$ per ogni $x^1, \dots x^N \in \mathbb{R}^{N-1}$.

TEOREMA 1.8. *Sia $u \in C^2(S)$ soluzione classica di (1.18). Sia f localmente Lipschtziana in $[0, \infty)$ e tale che verifichi le ipotesi i) e ii) del Teorema 1.6. Allora u dipende solo da x^N se e solo se Z dipende solo da x^N.*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa su un'idea di Reichel in [**R**]. Se u dipende solo da x^N allora anche Z. Proviamo l'altra implicazione. Se u non ha né massimo né minimo interno ad S allora u verifica le ipotesi del Teorema 1.6, infatti $b \leq u \leq a$ in S, e quindi u dipende solo da x^N. Supponiamo ora che $Z \neq \emptyset$ e che u non sia costante in S. Indichiamo con $S(t) := \{x \in S : x^N = t\}$ per ogni $t \in (0, 1)$.

Possiamo scrivere $Z = \cup_{t\in T} S(t)$, con $T \subset (0,1)$. Mostreremo che T non ha punti di accumulazione e quindi $Z = \cup_{i=1}^{n} S(t_i)$. Ora dividiamo la striscia S in n striscie $A_1, \ldots, A_n$ delimitate dagli insiemi $S(t_i)$. In ognuna di queste strisce A_i la soluzione u è compresa fra i valori che la u assume sul bordo e tali valori sono non negativi di cui almeno uno strettamente positivo. Siamo nelle ipotesi per poter applicare il Teorema 1.6 e ottenere che u dipende solo da x^N in ognuno degli A_i. Poiché $\cup_{i=1}^{n} \overline{A}_i = \overline{S}$, allora u dipende solo da x^N.

Rimane da mostrare che T non possiede punti di accumulazione. Per assurdo supponiamo che esista una successione $t_k \in T$ tale che $t_k \to \bar{t}$. In $S(t_k)$ abbiamo $u = cost = u_{t_k}$ e $\nabla u(x) = 0$. Per continuità otteniamo anche $u = u_{\bar{t}}$ e $\nabla u(x) = 0$ in $S(\bar{t})$. Per ogni direzione x^i , $i = 1, \ldots N-1$ abbiamo $\frac{\partial^2 u}{\partial (x^i)^2} = 0$ su $S(\bar{t})$ poiché $u_{\bar{t}}$ è costante e x^i è tangente ad $S(\bar{t})$. Consideriamo ora la direzione x^N. Essa è perpendicolare ad $S(\bar{t})$. Sia $x \in S(\bar{t})$. Consideriamo la retta passante per x parallela ad x^N. Su tale retta prendiamo una successione di punti x_k tali che $x_k \in S(t_k)$. Abbiamo $x_k \to x$, e anche
$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x^N}^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial_N u(x_k) - \partial_N u(x)}{x_k^N - x^N} = 0$$
dove indichiamo con ∂_N la derivata parziale rispetto ad x^N. Quindi in $S(\bar{t})$ abbiamo $-\Delta u = 0$ e anche $f(u_{\bar{t}}) = 0$. Sia $w = u(x) - u_{\bar{t}}$; essa verifica l'equazione
$$\Delta w + c(x) w = \Delta u + f(u) - f(u_{\bar{t}}) = 0$$
dove $c(x)$ è localmente limitato poiché f Lipschitziana. Inoltre $u(x) = u_{\bar{t}}$ e $\nabla u(x) = 0 = \nabla u_{\bar{t}}$ in $S(\bar{t})$. Dalla proprietà di continuazione unica per equazioni ellittiche otteniamo $u = u_{\bar{t}}$ in tutto S contro l'ipotesi che u fosse non costante. $\square$

CAPITOLO 2

STIME VICINO ALLA FRONTIERA E CONVESSITÀ DELLE SOLUZIONI DI UN PROBLEMA SINGOLARE

2.1. Introduzione

In questo capitolo studiamo il seguente problema singolare

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-\gamma} & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

dove Ω è un dominio limitato e regolare di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, che verifica la condizione di sfera interna ed esterna uniformemente e $\gamma > 0$.

Per $N = 1$ questo problema è stato studiato da [**NC**] e scaturisce in certi problemi di meccanica dei fluidi pseudo-plastici (vedi [**NC**] per le definizioni rigorose e per come derivare l'equazione dal modello). In [**NC**] e [**GOW**] si trovano per $N = 1$ alcuni risultati parziali di esistenza e unicità delle soluzioni. Per $N \geq 1$ [**St**] ha studiato il problema con condizione di Neumann sulla frontiera ed ha mostrato l'esistenza di soluzioni classiche. In particolare in questo caso il problema è legato allo studio della temperatura in un conduttore attraversato da una corrente stazionaria. Per $N > 1$ il problema è stato studiato in una forma più generale in [**CRT**], per domini generali, e in [**GOW**] nel caso di soluzioni radiali in una palla e $\gamma \in (0,1)$, inoltre da [**LM**] e [**K1**]. In [**CRT**] è dimostrato che la soluzione esiste se Ω è di classe C^3 e in modo abbastanza complicato è stata trovata una stima del primo ordine della soluzione $u(x)$ vicino alla frontiera in termini di $\delta(x)$. Inoltre se $\gamma > 1$ la soluzione non sta in $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. In [**LM**] è dimostrato che se Ω è regolare e $\gamma > 0$ il problema ha un'unica soluzione positiva che sta in $C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ ed è trovata una stima di $u(x)$ vicino alla frontiera in termini della prima autofunzione ϕ_1 relativa al dominio Ω considerato. Gli autori mostrano inoltre che se $\gamma > 3$ allora $u \notin W^{1,2}(\Omega)$. Anche in [**K1**] è provata esistenza e unicità della soluzione ed una stima vicino alla frontiera sempre del primo ordine. Qui miglioriamo i risultati di [**CRT**], [**K1**] e [**LM**] trovando una stima del comportamento di $u(x)$ vicino alla frontiera, in termini di $\delta(x)$ fino al secondo ordine. I metodi usati sono una stima degli infinitesimi, lo studio di equazioni alle derivate parziali ordinarie e il principio del confronto. La stima del secondo ordine è trovata tramite opportune sopra e sottosoluzioni del problema (2.1). Metodi simili si possono trovare in [**BM**], [**BM2**], [**BP**], [**GP**]. In questi articoli è stato trattato il caso di una soluzione che diverge sulla frontiera del dominio, per nonlinearità tali che $f(0) = 0$.

Per $\gamma > 1$ troviamo la seguente stima

$$|u(x) - b_0 \delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x)| < \beta\delta(x),$$

dove b_0 dipende solo da γ e $\delta(x)$ indica la distanza di x da $\partial\Omega$, e $\beta > 0$ è una costante opportuna. Osserviamo quindi che il modo in cui la soluzione decresce vicino alla frontiera è indipendente dalla geometria del dominio e dipende solo dalla distanza $\delta(x)$ del punto x dalla frontiera. Anche per $\gamma = 1$ proviamo che $\nabla u \to \infty$ per $x \to \partial\Omega$, quindi la soluzione non può stare in $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, completando il risultato di regolarità di [**CRT**] e [**LM**].

Ci occupiamo poi della convessità delle soluzioni. Questo problema è stato studiato da diversi autori, per esempio, [**BL**], [**CS**] [**K1**], [**K2**], [**K3**], [**Ko**] e [**KoL**], e molti altri, vedi referenze di [**K2**] per esempio, e da [**GrP2**], [**GrP1**] nel caso di soluzioni che divergono sulla frontiera. La concavità o convessità delle soluzioni positive di equazioni differenziali, o di funzioni da esse derivate, permette di osservare che gli insiemi di livello della soluzione sono convessi. In tale senso se Ω è convesso gli insiemi di livello mantengono la convessità del dominio. Brascamp e Lieb in [**BL**] mostrano, fra le altre cose, che se u è la prima autofunzione del laplaciano, con condizione di Dirichlet al bordo, in un dominio convesso allora $\log u$ è concava in Ω. Mostreremo che questo risultato è in certo senso ottimale. In seguito altri autori in [**CS**], [**K2**], [**K3**] hanno studiato la concavità nel caso di equazioni semilineari, in particolare Kawohl mostra che se u risolve $-\Delta u = u^p$, $p > 0$ e se Ω è convesso, la funzione $\nu(x) = u(x)^{\frac{2}{1-p}}$ è concava in Ω.

Il nostro contributo a questo problema consiste nel mostrare che se $u(x)$ è una soluzione positiva del problema (2.1), con $\gamma > 0$ e Ω è un dominio convesso allora la funzione $\nu(x) = u^{\frac{2}{\gamma+1}}(x)$ è strettamente concava in Ω. Da ciò segue appunto che gli insiemi di livello di $u(x)$ sono convessi e la soluzione ha un unico punto di massimo. Mostriamo inoltre che tale risultato di concavità è ottimale.

Per studiare la concavità della soluzione utilizziamo la funzione concavità $\mathcal{C}$ introdotta da Korevaar, per esempio in [**Ko**]; mostriamo che tale funzione verifica una certa diseguaglianza differenziale e tramite principi di massimo otteniamo $\mathcal{C}(x, y) > 0$ e quindi la concavità della funzione ν.

Infine troviamo i seguenti risultati ottimali sulla concavità. Sia $u(x)$ una soluzione del problema (2.1) e sia $\varepsilon > 0$. Allora

1) se $\gamma = 0$, la funzione $\nu = u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ non è concava in un certo dominio convesso;

2) se $\gamma = -1$, la funzione $\nu = u^{\varepsilon}$ non è concava in un certo dominio convesso;

3) se $\gamma \geq 1$ la funzione $\nu = u^{\frac{\gamma+1}{2}+\varepsilon}$ non è concava nemmeno nel caso radiale.

Per $p > 1$ studiamo il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{-\gamma} & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

dove Δ_p è il p-Laplaciano. A partire da un problema approssimante proviamo che esiste una funzione $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, $u > 0$ tale che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega} u^{-\gamma} \psi \qquad \psi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Osserviamo che il metodo classico di [**CRT**] per problemi singolari si può applicare anche all'operatore degenere. Tale soluzione è inoltre unica. Possiamo guadagnare regolarità e abbiamo che $u \in C^1(\Omega)$.

Possiamo considerare il comportamento della soluzione vicino alla frontiera $\partial\Omega$. Otteniamo che il modo in cui $u(x)$ decresce vicino al bordo non dipende dalla geometria del dominio Ω ma solo dalla distanza dalla frontiera. Per $p = 2$ questi risultati erano già noti in [**LM**] e sono stati migliorati in [**BGP**] dove si è trovata una stima del secondo ordine. Per $p \neq 2$ il comportamento vicino alla frontiera è simile a quello del caso $p = 2$.

Questo capitolo è così organizzato: nel paragrafo 2.2 otteniamo la stima della soluzione positiva del problema (2.1) vicino alla frontiera; nel paragrafo 2.3 studiamo la concavità della funzione ν definita precedentemente; nel paragrafo 2.4 mostriamo che alcuni risultati sulla concavità sono ottimali; nel paragrafo 2.5 ci occupiamo invece del problema (2.2) e mostriamo esistenza e unicità della soluzione positiva; infine nel paragrafo 2.6 ricaviamo anche per il problema (2.2) la stima vicino alla frontiera.

2.2. Stime vicino al bordo

LEMMA 2.1. *Se $v(r)$ è una soluzione radiale positiva del problema (2.1) con $\gamma > 1$ in una palla $B(R)$ di raggio $R > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $r_0 > 0$, dipendente da ε, $r_0 < R$ tale che*

$$v(r) > (1-\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma+1}} \left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}} (R-r)^{\frac{2}{\gamma+1}} \qquad \forall r \in (r_0, R) \tag{2.3}$$

DIMOSTRAZIONE. La soluzione radiale verifica l'equazione

$$\begin{cases} v'' + \frac{N-1}{r}v' + v^{-\gamma} = 0 \quad \text{in } B(R) \\ v'(0) = 0 \\ v(R) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Inoltre è facile vedere che se v non è identicamente nulla $v'(r) < 0$ in $(0, R)$, vedi per esempio il Lemma seguente. Moltiplichiamo l'equazione (2.4) per v', otteniamo

$$v''v' + v'v^{-\gamma} < 0.$$

Integrando su $(0, r)$ otteniamo

$$\frac{(v'(r))^2}{2} < \frac{v^{1-\gamma}(r) - v^{1-\gamma}(0)}{\gamma-1} < \frac{v^{1-\gamma}(r)}{\gamma-1}.$$

Dall'ultima diseguaglianza ricaviamo

$$v' > -\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1-\gamma}{2}}. \tag{2.5}$$

Inserendo l'equazione (2.5) nell'equazione (2.4) abbiamo

$$v'' - \frac{N-1}{r}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1-\gamma}{2}} + v^{-\gamma} < 0,$$

da cui

$$v'' + v^{-\gamma}\left[-\frac{N-1}{r}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1+\gamma}{2}} + 1\right] < 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $v(r) \to 0$ per $r \to R$, esiste $r_\varepsilon < R$ tale che

$$v'' + v^{-\gamma}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < 0 \qquad \text{in } (r_\varepsilon, R).$$

Poiché $v'(r) < 0$ dall'ultima disequazione troviamo

$$v''v' + v^{-\gamma}v'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$$

e integrando fra r_ε e $r < R$

$$\frac{(v'(r))^2}{2} - \frac{(v'(r_\varepsilon))^2}{2} + \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{1-\gamma}\left[v^{1-\gamma}(r) - v^{1-\gamma}(r_\varepsilon)\right] > 0.$$

Per qualche $r_0 \geq r_\varepsilon$, abbiamo

$$\frac{(v'(r))^2}{2} > \frac{1-\varepsilon}{\gamma-1} v^{1-\gamma}(r) \qquad \forall r \in (r_0, R) \tag{2.6}$$

o anche

$$v^{\frac{\gamma-1}{2}}(r)v'(r) < -(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando fra (r, R) otteniamo la stima (2.3). □

Sia $\mathcal{A}(\rho, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : \rho < |x| < R\}$, per $0 < \rho < R$.

LEMMA 2.2. *Se $w(r)$ è una soluzione radiale del problema (2.1) con $\gamma > 1$ in una corona circolare $\mathcal{A}(\rho, R)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r_\varepsilon > 0$ tale che w verifica*

$$w(r) < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma+1}}\left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}} (r-\rho)^{\frac{2}{\gamma+1}} \qquad \forall r \in (\rho, r_\varepsilon). \tag{2.7}$$

DIMOSTRAZIONE. Per $\rho < r < R$, w verifica

$$w'' + \frac{N-1}{r}w' + w^{-\gamma} = 0 \qquad w(\rho) = 0, \qquad w(R) = 0. \tag{2.8}$$

Sia r_1 un punto compreso fra (ρ, R) tale che $w'(r_1) = 0$, moltiplichiamo (2.8) per w' e integriamo fra r ed r_1, troviamo per ogni $\rho < r < r_1$

$$\frac{(w'(r))^2}{2} = (N-1)\int_r^{r_1} \frac{1}{t}(w'(t))^2\,dt + \frac{w^{1-\gamma}(r) - w^{1-\gamma}(r_1)}{\gamma-1}. \tag{2.9}$$

Dall'equazione (2.8) abbiamo anche

$$w'(r) = \frac{1}{r^{N-1}}\int_r^{r_1} t^{N-1}w^{-\gamma}(t)dt < \frac{r_1^{N-1}}{\rho^{N-1}}\int_r^{r_1} w^{-\gamma}(t)dt.$$

Dall'ultima diseguaglianza usando il Teorema di De l'Õpital troviamo

$$\lim_{r\to\rho}\frac{(\gamma-1)\int_r^{r_1}\frac{1}{t}\left(w'(t)\right)^2 dt}{w^{1-\gamma}(r)}=\lim_{r\to\rho}\frac{w'(r)}{rw^{-\gamma}(r)}\le\lim_{r\to\rho}\frac{r_1^{N-1}\int_r^{r_1}w^{-\gamma}(t)dt}{r\rho^{N-1}w^{-\gamma}(r)}.$$

Usando ancora il Teorema de l'Õpital otteniamo

$$\lim_{r\to\rho}\frac{(\gamma-1)\int_r^{r_1}\left(\frac{1}{t}\right)\left(w'(t)\right)^2 dt}{w^{1-\gamma}(r)}\le\frac{r_1^{N-1}}{\rho^N}\lim_{r\to\rho}\frac{w(r)}{\gamma w'(r)}=0.$$

Ricordiamo che $w(r)\to 0$ per $r\to\rho$ e che dall'equazione (2.9) $w'(r)\to\infty$ per $r\to\rho$. Se l'integrale di $\frac{1}{r}\left(w'(r)\right)^2$ su $(0,r_1)$ è finito allora non si può applicare il Teorema di de l'Õpital però comunque il limite è uguale a zero anche in questo caso. Inserendo questa ultima stima nella (2.9) per $\varepsilon>0$, abbiamo

$$\frac{\left(w'(r)\right)^2}{2}<\frac{1+\varepsilon}{\gamma-1}w^{1-\gamma}(r)\qquad\forall r\in(\rho,r_\varepsilon).$$

Integrando fra (ρ,r) con $r<r_\varepsilon$ si ottiene

$$\frac{2}{\gamma+1}w^{\frac{\gamma+1}{2}}<\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(r-\rho),$$

e da qui la stima cercata, cioè la (2.7). □

LEMMA 2.3. *Se $u(x)$ è una soluzione positiva del problema (2.1) con $\gamma>1$, allora*

$$\lim_{x\to\partial\Omega}\frac{u(x)}{\delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x)}=\left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}},$$

dove $\delta(x)$ indica la distanza di x da $\partial\Omega$.

DIMOSTRAZIONE. Nelle nostre ipotesi Ω verifica la condizione di sfera interna ed esterna uniformemente, quindi esiste $\rho>0$ tale che per ogni punto x_0 di $\partial\Omega$ esistono due palline di raggio ρ tangenti a $\partial\Omega$ in x_0, una tutta contenuta in Ω e l'altra tutta esterna a Ω. A meno di un cambiamento di coordinate possiamo assumere che $x_0=(\rho,0,\dots,0)$, che Ω contenga la palla $B_\rho(0)$ di raggio ρ e centro l'origine e che Ω sia tutto contenuto nella corona circolare $\mathcal{A}(\rho;R)$ di centro $(2\rho,0,\dots,0)$ ed R grande (ricordo che Ω è limitato). $B_\rho(0)$ e $\mathcal{A}(\rho;R)$ sono tangenti a $\partial\Omega$ nel punto x_0. Se $u(x)$ è la soluzione in Ω, $w(x)$ è la soluzione in $\mathcal{A}(\rho,R)$ e $v(x)$ è la soluzione in $B(\rho)$, dal principio del confronto per funzioni decrescenti (vedi [**GT**]) abbiamo

$$v(x)\le u(x)\le w(x)\qquad\forall x\in B.$$

Sia $0 < r < \rho$. Se prendiamo un punto $x = (r, 0, \dots, 0)$, allora usando le stime (2.3) e (2.7) abbiamo

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma+1}} \left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x) < u(x) < (1+\varepsilon)^{\frac{2}{\gamma+1}} \left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \delta^{\frac{1}{\gamma+1}}(x).$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

TEOREMA 2.1. *Se $u(x)$ è una soluzione positiva del problema (2.1) con $\gamma > 1$, allora esiste $\beta > 0$ tale che*

$$\left|\frac{u(x)}{\delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x)} - \left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}}\right| < \beta \delta^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(x) \qquad \forall x \in \Omega,$$

dove $\delta(x)$ indica la distanza di x da $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Come in [**BP**], poniamo

$$W(x) = b_0 \delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x) + \beta\delta(x),$$

dove

$$b_0 = \left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}},$$

e $\beta > 0$ verrà fissato in seguito. Scriviamo δ al posto di $\delta(x)$, abbiamo

$$W_i = b_0 \frac{2}{\gamma+1} \delta^{\frac{2}{\gamma+1}-1} \delta_i + \beta\delta_i,$$

$$W_{ii} = b_0 \frac{2}{\gamma+1} \left[\frac{2}{\gamma+1} - 1\right] \delta^{\frac{2}{\gamma+1}-2} \delta_i^2 + b_0 \frac{2}{\gamma+1} \delta^{\frac{2}{\gamma+1}-1} \delta_{ii} + \beta\delta_{ii},$$

dove indichiamo con $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, inoltre supponiamo $\partial\Omega$ almeno di classe C^2, quindi la funzione $\delta(x)$ è C^2 in un intorno di $\partial\Omega$ e verifica $\sum_i \delta_i\delta_i = 1$ e $-\Delta\delta = (N-1)K = H$, dove H è la curvatura media delle superfici di livello di $\delta(x)$,(ovvero la curvatura media delle superfici $\{x \in \Omega \text{ t.c. } \delta(x) = const\}$), troviamo

$$-\Delta W = b_0^{-\gamma} \delta^{\frac{-2\gamma}{\gamma+1}} + b_0 \frac{2}{\gamma+1} H \delta^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} + \beta H. \tag{2.10}$$

Ora consideriamo la funzione

$$f(t) = \left(b_0 \delta^{\frac{2}{\gamma+1}} + \beta t\right)^{-\gamma}$$

la sviluppiamo in serie di Taylor con punto iniziale 0 e otteniamo

$$f(\delta) = f(0) + f'(0)\delta + \frac{1}{2} f''(0)\delta^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi)\delta^3$$

dove ξ è un punto compreso fra 0 e δ; inoltre poiché il resto $f'''(\xi)\delta^3$ è sempre negativo abbiamo

$$f(\delta) < b_0^{-\gamma}\delta^{\frac{-2\gamma}{\gamma+1}} - \gamma b_0^{-1-\gamma}\beta\delta^{-1} + \frac{(1+\gamma)\gamma}{2}b_0^{-2-\gamma}\beta^2\delta^{\frac{-2}{\gamma+1}}$$

e poiché $f(\delta) = W^{-\gamma}$ anche

$$W^{-\gamma} < b_0^{-\gamma}\delta^{\frac{-2\gamma}{\gamma+1}} - \gamma b_0^{-1-\gamma}\beta\delta^{-1} + \frac{(1+\gamma)\gamma}{2}b_0^{-2-\gamma}\beta^2\delta^{\frac{-2}{\gamma+1}}.$$

Mostreremo che per $\delta(x) < \delta_0$ e per β grande abbastanza abbiamo

$$-\gamma b_0^{-1-\gamma}\beta\delta^{-1} + \frac{(1+\gamma)\gamma}{2}b_0^{-2-\gamma}\beta^2\delta^{\frac{-2}{\gamma+1}} < b_0\frac{2}{\gamma+1}H\delta^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} + \beta H \tag{2.11}$$

e quindi che

$$-\Delta W - W^{-\gamma} > 0 \text{ se } \{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}.$$

Mostriamo intanto la (2.11). Moltiplicando per δ la possiamo riscrivere come

$$\begin{aligned}\beta\frac{\gamma}{2}b_0^{-\gamma-1} - \gamma b_0^{-1-\gamma}\beta + \frac{(1+\gamma)\gamma}{2}b_0^{-2-\gamma}\beta^2\delta^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} &= b_0^{-\gamma-2}\beta\frac{\gamma}{2}\left[-b_0 + \beta(\gamma+1)\delta^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right] \\ &< \beta\frac{\gamma}{2}b_0^{-\gamma-1} + b_0\frac{2}{\gamma+1}H\delta^{\frac{2}{\gamma+1}} + \beta H\delta.\end{aligned}$$

Il termine fra parentesiquadre può essere reso negativo per $\delta < \delta_0$ prendendo

$$\beta\delta_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{b_0}{\gamma+1}. \tag{2.12}$$

Ora possiamo far crescere β e diminuire δ_0 in modo che il termine a destra sia positivo. Questo è possibile poiché a causa delle regolarità di $\partial\Omega$, H è limitata vicino a $\partial\Omega$, e così la (2.11) è provata. Ora $W(x) = u(x)$ su $\partial\Omega$. Possiamo far crescere β e diminuire δ_0 sempre in modo che sia verificata la (2.12) finché non abbiamo $W(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Osserviamo che questo è possibile dal Lemma 2.3.

Quindi dal principio del confronto per funzioni decrescenti (vedi [**GT**]), abbiamo

$$u(x) < W(x) = b_0\delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x) + \beta\delta(x), \tag{2.13}$$

per ogni $x \in \Omega$ tale che $\delta(x) \leq \delta_0$. Infine consideriamo la funzione

$$W(x) = b_0\delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x) - \beta\delta(x),$$

con β e δ_0 come in precedenza. Come prima

$$W_i = b_0\frac{2}{\gamma+1}\delta^{\frac{2}{\gamma+1}-1}\delta_i - \beta\delta_i,$$

$$W_{ii} = b_0\frac{2}{\gamma+1}\left[\frac{2}{\gamma+1} - 1\right]\delta^{\frac{2}{\gamma+1}-2}\delta_i^2 + b_0\frac{2}{\gamma+1}\delta^{\frac{2}{\gamma+1}-1}\delta_{ii} - \beta\delta_{ii},$$

$$-\Delta W = b_0^{-\gamma}\delta^{\frac{-2\gamma}{\gamma+1}} + b_0\frac{2}{\gamma+1}H\delta^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} - \beta H. \tag{2.14}$$

Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione

$$f(t) = (b_0\delta^{\frac{2}{\gamma+1}} - \beta t)^{-\gamma}$$

si trova, siccome il resto del secondo ordine è sempre positivo e $W^{-\gamma} = f(\delta)$,

$$W^{-\gamma} > b_0^{-\gamma}\delta^{\frac{-2\gamma}{\gamma+1}} + \gamma b_0^{-\gamma-1}\beta\delta^{-1}.$$

Inoltre, eventualmente ancora aumentando β e diminuendo δ_0,

$$\gamma b_0^{-\gamma-1}\beta + H\delta\beta > b_0\frac{2}{\gamma+1}H\delta^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

e quindi

$$\gamma b_0^{-\gamma-1}\beta\delta^{-1} > b_0\frac{2}{\gamma+1}H\delta^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} - \beta H.$$

Dalle ultime due stime otteniamo

$$-\Delta W - W^{-\gamma} < 0 \qquad \text{se } \{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}.$$

Ancora $W(x) = u(x) = 0$ su $\partial\Omega$ e eventualmente aumentando β e diminuendo δ_0 possiamo fare in modo che $W(x) < u(x)$ se $\delta(x) = \delta_0$ e, applicando il principio del confronto, anche in questo caso,

$$u(x) > b_0\delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x) - \beta\delta(x), \tag{2.16}$$

per ogni x in Ω tale che $\delta(x) \leq \delta_0$.

Siccome la costante β in (2.14) e (2.13) può essere presa con lo stesso valore abbiamo

$$\left|\frac{u(x)}{\delta^{\frac{2}{\gamma+1}}} - b_0\right| < \beta\delta^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(x)$$

sempre per ogni x tale che $\delta(x) < \delta_0$. Aumentando ancora β eventualmente, la stima si può estendere a tutto il dominio Ω. □

Usando il Teorema 2.1 si trova facilmente che il gradiente della soluzione $u(x)$ è non limitato vicino alla frontiera. Infatti se x_0 è un punto della frontiera e $x \in \Omega$ tale che $|x - x_0| = \delta(x)$, allora

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} > b_0\frac{\delta^{\frac{2}{\gamma+1}}(x)}{x - x_0} - \varepsilon$$

se x è sufficientemente vicino a x_0. Se $\gamma > 1$ allora $\frac{2}{\gamma+1} < 1$ e il termine a destra tende all'infinito per $x \to x_0$.

Per $\gamma = 1$ invece il Teorema 2.1 non vale, quindi diamo una stima esplicita del gradiente in questo caso, migliorando un risultato di [**LM**].

Consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x)u^{-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.17}$$

dove Ω è come in precedenza e $p(x)$ è una funzione regolare che verifica $0 < p_1 \leq p(x)$.

PROPOSIZIONE 2.1. *Se $u(x)$ è una soluzione di (2.17), e $p(x)$ come sopra allora il gradiente di $u(x)$ è illimitato in ogni punto di $\partial\Omega$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $v = v(r)$ una soluzione radiale di un problema simile al problema (2.17) in una palla $B(R)$ di raggio R. Cioè sia $v(r)$ soluzione di

$$\begin{cases} v'' + \frac{N-1}{r}v' + p_1 v^{-1} = 0 & \text{se } 0 < r < R \\ v'(0) = 0 \\ v(R) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Dalla positivitá di p_1 abbiamo che $\left(r^{N-1}v'\right)' < 0$ e quindi dalla condizione iniziale sulla derivata prima anche $v'(r) < 0$ in $0 < r < R$. Moltiplichiamo l'equazione (2.17) per v' e ricaviamo

$$v''v' + p_1 v^{-1} v' < 0.$$

Integrando fra 0 e r

$$\frac{(v')^2}{2} + p_1 \log \frac{v(r)}{v(0)} < 0,$$

e anche

$$(vv')^2 < 2p_1 v^2(r) \log \frac{v(0)}{v(r)}.$$

L'ultima diseguaglianza implica

$$\lim_{r \to R} vv' = 0.$$

Ora sia $r_0 \in \left(\frac{R}{2}, R\right)$ tale che

$$-vv' < \frac{p_1 R}{4(N-1)} \qquad \text{per } r_0 < r < R.$$

Utilizzando l'equazione (2.18) su (r_0, R), troviamo (ricordo che $r_0 > \frac{R}{2}$)

$$v'' = \frac{1}{v}\left(-\frac{N-1}{r}vv' - p_1\right) < \frac{1}{v}\left(\frac{p_1 R}{4r} - p_1\right) < -\frac{p_1}{2v}.$$

Poiché $v' < 0$ dall'ultima diseguaglianza ricaviamo

$$v''v' > -\frac{p_1}{2}\frac{v'}{v}.$$

Integriamo fra (r_0, r)

$$(v'(r))^2 - (v'(r_0))^2 > p_1 \log \frac{v(r_0)}{v(r)};$$

infine,

$$-v'(r) > \sqrt{p_1 \log \frac{v(r_0)}{v(r)}} \qquad \text{in } (r_0, R). \tag{2.19}$$

Ora consideriamo il problema (2.18) in Ω. Sia x_0 un punto di $\partial\Omega$ e sia $B(R)$ una palla tangente in x_0 a $\partial\Omega$ e tutta contenuta in Ω (Ω verifica la condizione della sfera interna uniformemente). Sia $v(r)$ la soluzione del problema (2.18) nella palla $B(R)$. Poiché $p_1 \leq p(x)$, abbiamo

$$-\Delta v - p(x)v^{-1} \leq 0 \qquad \text{in } B(R)$$

e dal principio del confronto otteniamo $u(x) \geq v(x)$ in B. Come conseguenza se x è un punto vicino ad x_0 abbiamo

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{|x - x_0|} \geq \frac{v(x) - v(x_0)}{|x - x_0|}.$$

Passando a limite per $x \to x_0$ ed usando la (2.19) abbiamo la tesi. $\square$

2.3. Convessità

In questo paragrafo il dominio Ω è un dominio regolare limitato e convesso. Sia $u(x)$ soluzione del problema (2.1) con $\gamma > 0$. Proveremo che la funzione $\nu = u^{\frac{\gamma+1}{2}}$ è concava e quindi le linee di livello della soluzione u sono convesse come il dominio.

Usando l'equazione (2.1), otteniamo che la funzione ν verifica il seguente problema:

$$\begin{cases} -\Delta\nu = \frac{1}{\nu}\left[\frac{1-\gamma}{\gamma+1}|\nabla\nu|^2 + \frac{\gamma+1}{2}\right] & \text{in } \Omega \\ \nu(x) = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

Intanto mostriamo che la funzione

$$Q(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma+1}|\nabla\nu|^2 + \frac{\gamma+1}{2} \tag{2.21}$$

è positiva in Ω. Questo è immediato se $\gamma \leq 1$, quindi discutiamo solo il caso $\gamma > 1$.

LEMMA 2.4. *Sia $u(x)$ soluzione del problema (2.1) con $\gamma > 1$, e sia $\nu = u^{\frac{\gamma+1}{2}}$. Allora la funzione $Q(x)$ definita nella (2.21) è positiva in Ω.*

Dimostrazione. Poniamo

$$P(x) = \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{u^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

quindi

$$Q(x) = \frac{1-\gamma^2}{2} u^{\gamma-1} P(x).$$

Proveremo che $P(x) < 0$ in Ω.

Sia $\varepsilon > 0$, consideriamo una soluzione $u(x)$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-\gamma} & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varepsilon & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.22}$$

la corrispondente funzione $P(x)$ (cioé la funzione corrispondente alla soluzione u_ε) verifica

$$P_i = \sum_k u_k u_{ki} + u^{-\gamma} u_i.$$

Utilizzando la diseguaglianza di Schwarz otteniamo

$$\left(P_i - u^{-\gamma} u_i\right)^2 = \left(\sum u_k u_{ki}\right)^2 \leq |\nabla u|^2 \sum_k u_{ki}^2,$$

$$\sum_{k,i} u_{ki}^2 \geq \sum_i \frac{P_i - 2u^{-\gamma} u_i}{|\nabla u|^2} P_i + u^{-2\gamma}.$$

Inoltre

$$P_{ii} = \sum_k u_{ki}^2 + \sum_k u_k u_{kii} - \gamma u^{-\gamma-1} u_i^2 + u^{-\gamma} u_{ii}.$$

Ancora dall'equazione (2.22) segue

$$\Delta P = \sum_i P_{ii} = \sum_{i,k} u_{ki}^2 + \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta u - \gamma u^{-\gamma-1} |\nabla u|^2 + u^{-\gamma} \Delta u$$

$$\Delta P = \sum_{i,k} u_{ki}^2 + \gamma u^{-\gamma-1} \sum_k u_k^2 - \gamma u^{-\gamma-1} |\nabla u|^2 - u^{-2\gamma},$$

$$\Delta P = \sum_{i,k} u_{ki}^2 - u^{-2\gamma},$$

e, dalla stima precedente,

$$\Delta P + \sum_i \frac{2u^{-\gamma} u_i - P_i}{|\nabla u|^2} P_i \geq 0.$$

Da un principio di massimo di [**PP**] P (che corrisponde alla funzione $\phi(x, 2)$ di [**PP**]) assume il suo massimo o nei punti in cui $\nabla u = 0$ oppure sulla frontiera $\partial\Omega$, (vedi

Teorema 1 in [**PP**]). Inoltre poiché Ω è convesso P non può assumere massimo sulla frontiera (vedi Corollario 1, sempre in [**PP**]) dal lemma di Hopf, quindi

$$P(x) = \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{u^{1-\gamma}}{1-\gamma} \leq \frac{M_\varepsilon^{1-\gamma}}{1-\gamma} < 0$$

dove M_ε indica il massimo della $u_\varepsilon(x)$ in Ω, e la $u_\varepsilon(x)$ è una soluzione del problema (2.22). Il Lemma segue facendo tendere ε a zero. $\square$

Per discutere la concavità delle soluzioni dell'equazione (2.20) utilizziamo la funzione di concavità di Korevaar vedi [**Ko**], [**K2**]

$$C(x,y) = 2\nu\left(\frac{x+y}{2}\right) - \nu(x) - \nu(y), \qquad x, y, \in \overline{\Omega}. \tag{2.23}$$

La funzione ν è concava in Ω se e solo se $C(x,y) \geq 0$ in $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

PROPOSIZIONE 2.2. *Se ν è una soluzione positiva dell'equazione (2.20) allora la funzione $C(x,y)$ definita in (2.23), non può avere un minimo negativo in Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Dal Lemma 2.4 la funzione $\frac{1}{\nu}Q(x)$ è positiva in Ω e decrescente rispetto a ν. La dimostrazione segue da [**K2**], vedi Teorema 3.13, p 116. Vedi anche [**GrP1**], [**Ko**]. $\square$

Per avere la positività della funzione $C(x,y)$ sulla frontiera di $\Omega \times \Omega$ abbiamo il seguente

LEMMA 2.5. *Sia $\nu(x)$ una soluzione positiva dell'equazione (2.20) e sia $y \in \partial\Omega$, allora la funzione*

$$\psi(x) = 2\nu(z) - \nu(x), \qquad \textit{con} \qquad z = \frac{x+y}{2}$$

è non negativa in $\overline{\Omega}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $x \in \partial\Omega$, allora $\psi(x) = 2\nu(z) \geq 0$. Se invece $x \in \Omega$, allora

$$\nabla\psi = \nabla\nu(z) - \nabla\nu(x),$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}\Delta\nu(z) - \Delta\nu(x).$$

Usando l'equazione (2.20), abbiamo

$$\Delta\psi = -\frac{1}{2\nu(z)}\left(A|\nabla\nu(z)|^2 + B\right) + \frac{1}{\nu(x)}\left(A|\nabla\nu(x)|^2 + B\right),$$

dove $A = \frac{1-\gamma}{\gamma+1}$ e $B = \frac{\gamma+1}{2}$. Utilizzando le stime precedenti possiamo riscrivere tale equazione come

$$\begin{cases} \Delta\psi + a^i\psi_i = \frac{1}{2\nu(z)\nu(x)}\left(A|\nabla\nu(z)|^2 + B\right)\psi & \text{in } \Omega, \\ \psi \geq 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

per opportune funzioni regolari a^i. Dal Lemma 2.4 il coefficiente di ψ è positivo, quindi dal principio del massimo abbiamo che $\psi(x)$ assume il suo minimo sulla frontiera di Ω. □

COROLLARIO 2.1. *Se $\nu(x)$ è una soluzione positiva del problema (2.20), allora la funzione $C(x,y)$ definita in (2.23) è non negativa su $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue dal Lemma 2.5 e dalla Proposizione 2.2. □

TEOREMA 2.2. *Se $\nu(x)$ è una soluzione positiva del problema (2.20) in un dominio convesso Ω, allora è strettamente concava in Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Dall'equazione (2.20) e da Lemma 2.4 la funzione $w = -\nu$ verifica

$$-\Delta w = \frac{1}{w}\left(A|\nabla w|^2 + B\right) > 0,$$

con A e B come in precedenza. Dal Corollario (2.1), w è convessa. Inoltre la funzione $w \to \frac{1}{w}\left(A|\nabla w|^2 + B\right)$ è convessa. Da un teorema di Korevaar e Lewis ,[**KoL**], possiamo affermare che l'Hessiano di ν ha rango costante in Ω. Ora ν assume il suo massimo su un sottoinsieme compatto $K \subset \Omega$ poiché è nulla sul bordo, ma non identicamente nulla. In questo caso in ogni intorno U di K esiste un punto $x_0 \in U$ in cui la matrice Hessiana di ν è strettamente negativa, vedi [**Ba**]. Segue che ν è strettamente concava in Ω. □

COROLLARIO 2.2. *Se $u(x)$ è una soluzione del problema (2.1) allora assume il suo massimo in un unico punto di Ω.*

2.4. Alcuni risultati sulla concavità sono ottimali

In questo paragrafo mostriamo che alcuni risultati sulla concavità delle soluzioni sono ottimali.

1) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio convesso e sia $u(x)$ soluzione positiva del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.25}$$

ottenuto per $\gamma = 0$. È noto da [**K3**] che $\nu(x) = u^{\frac{1}{2}}(x)$ è concava in Ω. Mostriamo che l'esponente $\frac{1}{2}$ è ottimale.

Sia $N = 2$ e sia Ω un triangolo equilatero di vertici $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, e $(0, 1)$. La funzione

$$u(x, y) = \frac{y}{4}\left[(1-y)^2 - 3x^2\right]$$

é una soluzione del problema (2.25) nel triangolo. Sia $\psi(y) = 4u(0, y)$. Allora

$$\psi(y) = y(1-y)^2.$$

Inoltre la funzione $\sqrt{\psi(y)} = (1-y)\sqrt{y}$ é concava per $y \in (0,1)$ perché ha derivata seconda negativa. Invece se $\alpha > \frac{1}{2}$ la funzione $\psi(y)^\alpha$ non è più concava vicino a $y = 1$. Infatti se $F(y) = \psi(y)^\alpha$ allora

$$F'(y) = \alpha\psi(y)^{\alpha-1}\psi'(y),$$

$$\begin{aligned} F''(y) &= \alpha\left[\psi(y)\right]^{\alpha-1}\psi''(y) + \alpha(\alpha-1)\left[\psi(y)\right]^{\alpha-2}\left(\psi'(y)\right)^2 = \\ &= \alpha\left[\psi(y)\right]^{\alpha-2}\left[y(1-y)^2 2(3y-2) + (\alpha-1)\left((1-y)^2 - 2y(1-y)\right)^2\right] = \\ &= \alpha\left[\psi(y)\right]^{\alpha-2}(1-y)^2\left[2y(3y-2) + (\alpha-1)(9y^2-6y+1)\right]. \end{aligned}$$

Ora $(\psi(y))^{\alpha-2} \geq 0$, quindi il segno di $F''(y)$ dipende dal segno di $P(y) = 2y(3y-2) + (\alpha-1)(9y^2-6y+1)$ ed è facile vedere che $P(1) = 2 + 4(\alpha-1) > 0$ proprio per $\alpha > \frac{1}{2}$. Quindi la funzione $F(y)$ non è concava in un intorno di 1.

Se $N > 2$ si può ottenere lo stesso risultato usando la funzione

$$u(x) = \frac{x_N}{4}\left[(1-x_N)^2 - \frac{3}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2\right].$$

2) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio convesso e sia $\varphi_1(x)$ soluzione positiva del problema

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 & \text{in } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove λ_1 è il primo autovalore per il laplaciano nel dominio Ω considerato. Anche in questo caso è noto da [**BL**],[**K2**], [**K3**] e altri che $\nu(x) = \log\varphi_1(x)$ è concava in Ω.

Esiste qualche esponente $\varepsilon > 0$ tale che $\nu = \varphi_1^\varepsilon$ sia concava per ogni dominio convesso?

Rispondiamo a questo domanda in modo negativo con il seguente esempio. In questo modo possiamo affermare che la concavità di $\nu(x) = \log\varphi(x)$ è ottimale.

Sia $N = 2$ e sia $\Omega = \{0 < r < a, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{m}\}$. Dove r e ϑ sono le coordinate polari del piano, m è un intero qualunque e a è il primo zero della $m-$esima funzione di Bessel $J_m(r)$. La prima autofunzione di questo particolare dominio Ω è

$$\varphi_1(x, y) = J_m(r) sin\,(m\vartheta)\,,$$

È noto che J_m si comporta come r^m per $r \to 0$. Quindi bisogna prendere $\varepsilon \leq \frac{1}{m}$ se vogliamo che φ^ε sia concava. Siccome m può essere preso grande come si vuole abbiamo la contraddizione.

3) Sia $v(x)$ soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta v = v^{-1} & \text{in } B \\ v = 0 & \text{su } \partial B \end{cases} \tag{2.27}$$

dove B è una palla. Dal Teorema 2.1, $v(x)$ è concava. Mostriamo che l'esponente 1 è ottimale. Mostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione $\nu(x) = v^{\frac{1}{1-\varepsilon}}(x)$ non è concava vicino a ∂B. Infatti

$$v = \nu^{1-\varepsilon}, \qquad \nabla v = (1-\varepsilon)\nu^{-\varepsilon}\nabla\nu,$$

$$\Delta v = (1-\varepsilon)\nu^{-\varepsilon}\Delta\nu - \varepsilon(1-\varepsilon)\nu^{-\varepsilon-1}|\nabla\nu|^2.$$

Utilizzando l'equazione (2.27) abbiamo

$$\nu^{1-2\varepsilon}\Delta\nu = \varepsilon\nu^{-2\varepsilon}|\nabla\nu|^2 - \frac{1}{1-\varepsilon},$$

$$\nu^{-\varepsilon}|\nabla\nu| = \frac{1}{1-\varepsilon}|\nabla v|,$$

$$\nu^{1-2\varepsilon}\Delta\nu = \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^2 |\nabla v|^2 - \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Inoltre abbiamo visto con la Proposizione 2.1, vedi (2.19), $\nabla v \to \infty$ per $x \to \partial\Omega$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ fissato il termine a destra diventa positivo vicino alla frontiera di B. Quindi $\Delta\nu > 0$ vicino alla frontiera e ν non può essere concava.

4) Infine se $v(r)$ è una soluzione radiale del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = v^{-\gamma} & \text{in } B \\ v = 0 & \text{su } \partial B \end{cases}$$

con $\gamma > 1$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione $\nu = v^{\frac{1+\gamma-2\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}}$, dove $\frac{1+\gamma-2\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} > \frac{1+\gamma}{2}$, non è concava vicino a ∂B. Infatti v verifica l'equazione (2.4). Poniamo per semplicità $k = \frac{1+\gamma-2\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}$

$$v = \nu^{\frac{1}{k}} \qquad\qquad v' = \frac{1}{k}\nu^{\frac{(1-k)}{k}}\nu'$$

$$v'' = \frac{1}{k}\nu^{\frac{1-k}{k}}\nu'' + \frac{1}{k}\frac{(1-k)}{k}\nu^{\frac{1-2k}{k}}(\nu')^2.$$

Usando l'equazione (2.4) ricaviamo

$$\frac{1}{k}\nu^{\frac{1-k}{k}}\nu'' + \frac{1}{k}\frac{(1-k)}{k}\nu^{\frac{1-2k}{k}}(\nu')^2 + \frac{(N-1)}{r}\frac{1}{k}\nu^{\frac{1-k}{k}}\nu' + \nu^{-\frac{\gamma}{k}} = 0$$

$$\nu^{\frac{1-k}{k}}\nu'' = \frac{k-1}{k}\nu^{\frac{1-2k}{k}}(\nu')^2 - \frac{N-1}{r}\nu^{\frac{1-k}{k}}\nu' - k\nu^{-\frac{\gamma}{k}}$$

$$\nu^{\frac{1-k+\gamma}{k}}\nu'' = \frac{k-1}{k}\nu^{\frac{1+\gamma-2k}{k}}(\nu')^2 - \frac{N-1}{r}\nu^{\frac{1+\gamma-k}{k}}\nu' - k.$$

Poiché $v' < 0$ anche $\nu' < 0$ in B,

$$\nu^{\frac{1-k+\gamma}{k}}\nu'' > \frac{k-1}{k}\nu^{\frac{1+\gamma-2k}{k}}(\nu')^2 - k$$

$$\nu^{\frac{1-k+\gamma}{k}}\nu'' > \frac{k-1}{k}\nu^{\frac{1+\gamma-2k}{k}}k^2\nu^{\frac{2k-2}{k}}(v')^2 - k$$

$$\nu^{\frac{1-k+\gamma}{k}}\nu'' > k\left[(k-1)\nu^{\frac{\gamma-1}{k}}(v')^2 - 1\right]$$

$$\nu^{\frac{1-k+\gamma}{k}}\nu'' > k\left[(k-1)v^{\gamma-1}(v')^2 - 1\right].$$

In virtù della stima (2.6) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste r_0, dipendente da ε, $r_0 < R$ tale che

$$\frac{v'(r)^2}{2} > \frac{1-\varepsilon}{\gamma-1}v^{1-\gamma}(r) \qquad \forall r \in (r_0, R).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ ho che la stima (2.6) vale vicino alla frontiera. Quindi

$$\nu^{\frac{1-k+\gamma}{k}}\nu'' > k\left[(k-1)\frac{2(1-\varepsilon)}{\gamma-1} - 1\right] = 0$$

per come abbiamo scelto k se $r \in (r_0, R)$. Abbiamo quindi che vicino alla frontiera $\nu'' > 0$ e la funzione non è concava.

2.5. Esistenza e unicità

In questo paragrafo ci occupiamo del problema (2.2). Per $p = 2$ tale problema si riduce al problema (2.1) e l'esistenza e l'unicità della soluzione è stata studiata in [**CRT**], [**K1**], [**LM**]. Per il caso più generale di $p > 1$ mostriamo qui esistenza e unicità della soluzione debole. In particolare ci occupiamo di un problema un po' più generale, cioè

$$\begin{cases} \Delta_p u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.29}$$

dove Ω è un dominio limitato contenuto in $\mathbb{R}^N$. La funzione $f(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ è decrescente, localmente lipschitziana e verifica le condizioni

$$\text{(F-1)} \qquad \int_\lambda^\infty f(s)ds < \infty, \ \lambda > 0, \ \lim_{t \to 0^+} \int_t^\infty f(s)ds = \infty.$$

L'ipotesi (F-1) implica che $f(t)$ sia non limitata per $t = 0$ e che tenda a zero per t che va all'∞.

Le soluzioni del problema (2.29) sono intese in senso debole. Da risultati di regolarità, vedi per esempio [**To2**] e [**diBe**], comunque tali soluzioni sono anche classiche nei punti in cui $\nabla u \neq 0$.

Consideriamo intanto il caso di una soluzione unidimensionale. Sia $v \in C^1$ soluzione di

$$r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r) + \int_0^r t^{N-1} f(v(t))dt = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(0) = v_0 > 0. \tag{2.30}$$

LEMMA 2.6. *Sia $f(t)$ positiva e decrescente. Se $v(r)$ è una soluzione positiva del problema (2.30) allora $v(r)$ e $v'(r)$ sono decrescenti.*

DIMOSTRAZIONE. Dall'equazione (2.30) e dalla positività di f segue che $v'(r) < 0$ per $r > 0$. Possiamo riscrivere l'equazione (2.30) nel seguente modo

$$(-v'(r))^{p-1} = r^{1-N} \int_0^r t^{N-1} f(v(t))dt.$$

Abbiamo

$$\left(r^{1-N}\int_0^r t^{N-1}f(v(t))dt\right)' = f(v(r)) + (1-N)r^{-N}\int_0^r t^{N-1}f(v(t))dt$$
$$> f(v(r)) + (1-N)r^{-N}f(v(r))\int_0^r t^{N-1}dt = \frac{1}{N}f(v(r)); \quad (2.31)$$

abbiamo usato la monotonia di $f(v(t))$ che come funzione composta di due funzioni decrescenti, è crescente. La funzione $(-v'(r))^{p-1}$ é crescente, quindi $v'(r)$ è decrescente.

□

LEMMA 2.7. *Sia $f(t)$ come nel Lemma precedente e sia verificata l'ipotesi (F-1). Se $(0, R)$ è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema (2.30), allora*

$$\lim_{r\to R} v(r) = 0 \qquad e \qquad \lim_{v_0\to 0} R(v_0) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per $r > 0$, $v'(r) \neq 0$ e l'equazione (2.30) è equivalente a

$$(p-1)|v'|^{p-2}v'' + \frac{N-1}{r}|v'|^{p-2}v' + f(v) = 0.$$

Sia $p' = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato di p. Moltiplichiamo per v' e integriamo su $(0, r)$,

$$\frac{1}{p'}(-v')^p + (N-1)\int_0^r \frac{(-v')^p}{s}ds = \int_v^{v_0} f(t)dt,$$

da cui segue

$$\frac{1}{p'}|v'|^p < \int_v^{v_0} f(t)dt. \qquad (2.32)$$

La diseguaglianza (2.32) e l'ipotesi (F-1) implicano che $|v'(r)| < \infty$ se $v(r) > 0$. Segue la prima parte del Lemma.

Nella dimostrazione del Lemma 2.6 abbiamo trovato la diseguaglianza

$$\left((-v')^{p-1}\right)' > \frac{1}{N}f(v).$$

Moltiplichiamo per $-v'$

$$\frac{1}{p'}\left((-v')^p\right)' > \frac{1}{N}f(v)(-v').$$

Integriamo ancora su $(0, r)$ e otteniamo

$$(-v')^p > \frac{p'}{N}\int_v^{v_0} f(t)dt. \qquad (2.33)$$

Possiamo riscrivere la (2.33) come

$$\left(\frac{p'}{N}\right)^{\frac{1}{p}} dr < \frac{-dv}{\left(\int_v^{v_0} f(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Integriamo su $(0, R)$ e troviamo

$$\left(\frac{p'}{N}\right)^{\frac{1}{p}} R < \int_0^{v_0} \frac{ds}{\left(\int_s^{v_0} f(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$< \int_0^{v_0} \frac{ds}{(f(v_0)(v_0 - s))^{\frac{1}{p}}} = p' \frac{(v_0)^{\frac{1}{p'}}}{[f(v_0)]^{\frac{1}{p}}},$$

abbiamo usato la decrescenza di $f(t)$. Quindi, $R(v_0) \to 0$ per $v_0 \to 0$. Il Lemma è dimostrato □

TEOREMA 2.3. *Supponiamo che sia verificata l'ipotesi* (F-1). *Se Ω è un dominio regolare e limitato allora il problema (2.29) ha un'unica soluzione $u \in C^1(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\epsilon > 0$. Intanto cerchiamo una soluzione positiva $u = u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\psi - f(u+\epsilon)\psi\right) dx = 0 \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.34}$$

La funzione $u_1(x) = 0$ è una sottosoluzione dell'equazione (2.34), infatti verifica $-\Delta_p u_1 < f(u_1+\varepsilon)$ in Ω e $u_1 = u_\varepsilon$ su $\partial\Omega$. Consideriamo ora la funzione $u_2(x) = A - |x|^2$, dove A è una costante positiva.

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\psi = -2(2)^{p-2}\int_\Omega |x|^{p-2}x \cdot \nabla\psi$$

usando la formula di integrazione per parti e ricordando che $\psi = 0$ su $\partial\Omega$ abbiamo

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\psi = (2)^{p-1}(N+p-2)\int_\Omega |x|^{p-2}\psi.$$

Per $\psi \geq 0$ e A abbastanza grande, troviamo

$$\int_\Omega \left(2^{p-1}|x|^{p-2}(N+p-2) - f(\varepsilon + A - |x|^2)\right)\psi dx > 0$$

e $u_2(x) = A - |x|^2 \geq 0$ su $\overline{\Omega}$, quindi u_2 verifica $-\Delta_p u_2 > f(u_2+\varepsilon)$ in Ω e $u_2 \geq u_\varepsilon$ su $\partial\Omega$. Quindi, $u_2(x) = A - |x|^2$ è una soprasoluzione. Usando un metodo standard vedi [**S**], a partire da una sottosoluzione e una soprasoluzione si ottiene una soluzione non negativa e regolare $u = u_\epsilon$ del problema (2.34), perché siamo nel caso di f_ε regolare in $0 < s < \max_{\overline{\Omega}} A - |x|^2$. Osserviamo che dalla validità del principio del confronto debole per funzioni f decrescenti, vedi [**To1**], e del principio di massimo forte posso applicare tale metodo all'operatore degenere. Inoltre, sempre dal principio di confronto debole per f decrescenti, $0 \leq u_\varepsilon \leq A - |x|^2$ per ogni $\varepsilon > 0$. Per soluzione regolare intendiamo una funzione $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Da risultati di regolarità, vedi [**diBe**], otteniamo poi che $u_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^{1+\alpha}(\Omega)$. Dal principio del massimo forte poiché u_ε verifica $-\Delta_p u_\varepsilon = f(u_\varepsilon + \varepsilon) > 0$ in Ω e $u_\varepsilon = 0$ su $\partial\Omega$, u_ε è strettamente positiva in Ω. Dalla monotonia di $f(t)$, se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ e u_{ε_1} e u_{ε_2} sono le rispettive soluzioni abbiamo $-\Delta_p u_{\varepsilon_1} - f(u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_2) \leq -\Delta_p u_{\varepsilon_1} - f(u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1) = -\Delta_p u_{\varepsilon_2} - f(u_{\varepsilon_2} + \varepsilon_2)$ e $u_{\varepsilon_1} = u_{\varepsilon_2}$ su $\partial\Omega$. Dal principio del confronto debole di [**To1**] $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$ in Ω. Inoltre $u_{\varepsilon_1} < u_{\varepsilon_2}$. Quindi $u_\epsilon(x)$ cresce come ϵ decresce e rimane limitato (infatti $u_\varepsilon \leq A - |x|^2$). Il limite di $u_\epsilon(x)$ per ϵ che tende a zero è ben definito e non negativo. Dalla monotonia di u_ε abbiamo inoltre $u_\varepsilon > u_1 > 0$ per ogni $0 < \varepsilon < 1$ e quindi anche il limite $u \geq u_1 > 0$ in Ω. Contemporaneamente $\epsilon + u_\epsilon$ decresce per ε che va a 0. Infatti, se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, sia $A = \{x \in \Omega \text{ t.c. } \varepsilon_1 + u_{\varepsilon_1} < \varepsilon_2 + u_{\varepsilon_2}\}$, su A abbiamo $-\Delta_p(u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1) = -\Delta_p u_{\varepsilon_1} = f(u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1) > f(u_{\varepsilon_2} + \varepsilon_2) = -\Delta_p u_{\varepsilon_2} = -\Delta_p(u_{\varepsilon_2} + \varepsilon_2)$, e $\varepsilon_1 + u_{\varepsilon_1} = \varepsilon_2 + u_{\varepsilon_2}$ su ∂A (perché $\overline{A} \subset \Omega$) e sempre dal principio del confronto $\varepsilon_1 + u_{\varepsilon_1} \geq \varepsilon_2 + u_{\varepsilon_2}$ in A, mentre avevamo la diseguaglianza opposta. Usando un metodo standard vedi [**CRT**], otteniamo $\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}_{loc}} \leq C$, possiamo passare a limite per $\varepsilon \to 0$ nell'equazione (2.34), per ogni $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, e si ottiene che il limite di $u_\epsilon(x)$ dà una soluzione positiva $u(x) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ del problema (2.29), soluzione nel senso debole che abbiamo spiegato prima. Dalla regolarità $u(x) \in C^1(\Omega)$. L'unicità segue dalla monotonia di $f(t)$ e dal principio di confronto debole di [**To1**]. $\square$

2.6. Stime vicino al bordo

Definiamo

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{(p'F(\tau))^{\frac{1}{p}}}, \quad p' = p/(p-1), \quad F(\tau) = \int_\tau^\infty f(s)ds.$$

La funzione $\psi(t)$ è crescente e convessa. La sua inversa $\phi(r)$ è crescente e concava.

Aggiungiamo le seguenti ipotesi su f che sono verificate dal problema modello $f(t) = t^{-\gamma}$,

$$\text{(F-2)} \qquad \exists \epsilon > 0,\ M > 1 :\ F(t/2) < MF(t) \qquad \forall t \in (0, \epsilon).$$

LEMMA 2.8. *Siano verificate le ipotesi* (F-1) *e* (F-2). *Se $v(r)$ è una soluzione radiale e positiva del problema (2.29) in una palla $B(R)$ allora per ogni $\epsilon > 0$ piccolo, esiste una costante $\beta > 0$ dipendente da f, R, p tale che*

$$v(r) > \phi(R-r) - (R-r)\beta \qquad \forall r \in (R-\epsilon, R). \tag{2.35}$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome $v'(r) < 0$ per $r < 0$, allora la funzione $v(r)$ verifica l'equazione in senso classico

$$(p-1)|v'|^{p-2}v'' + \frac{N-1}{r}|v'|^{p-2}v' + f(v) = 0, \quad v'(0) = v(R) = 0.$$

Moltiplichiamo per v' e integriamo su $(R/2, r)$. Si ha

$$\frac{1}{p'}|v'(r)|^p + 2\frac{N-1}{R}\int_{\frac{R}{2}}^{r} |v'(s)|^{p-1}(-v'(s))ds > F(v(r)) - \int_{v(\frac{R}{2})}^{\infty} f(t)dt.$$

Dal Lemma 2.7 $|v'(s)|^{p-1}$ è crescente , dall'ultima diseguaglianza troviamo

$$\frac{1}{p'}|v'|^p + c_1|v'(r)|^{p-1} > F(v(r)) - c_2,$$

dove c_1 e c_2 dipendono da R, p, f ma sono indipendenti da r. Dall'equazione (2.32) segue

$$|v'(r)| < (p'F(v(r)))^{\frac{1}{p}}\,. \tag{2.38}$$

Se inseriamo quest'ultima stima nella precedente otteniamo

$$\frac{1}{p'}|v'|^p + c_1\left(p'F(v(r))\right)^{\frac{p-1}{p}} > F(v(r)) - c_2,$$

e con una stima sugli infinitesimi,

$$\frac{1}{p'}|v'|^p > F(v(r))\left(1 - \frac{\alpha}{(F(v(r)))^{\frac{1}{p}}}\right), \quad \forall r \in (R-\epsilon, R), \tag{2.39}$$

per un piccolo $\epsilon > 0$ e un opportuno α indipendente da r. Abbiamo anche

$$\frac{-v'(r)}{(p'F(v(r)))^{\frac{1}{p}}} > 1 - \frac{\alpha}{(F(v(r)))^{\frac{1}{p}}}.$$

Integriamo su (r, R) con $r > R - \epsilon$ e utilizzando la monotonia di $F(v(r))$ si ottiene

$$\psi(v(r)) = \int_0^{v(r)} \frac{ds}{(p'F(s))^{\frac{1}{p}}} > R - r - (R-r)\frac{\alpha}{(F(v(r)))^{\frac{1}{p}}}.$$

Utilizzando ϕ, la funzione inversa di ψ, si ha

$$v(r) > \phi(R-r) - \phi'(\omega)(R-r)\frac{\alpha}{(F(v(r)))^{\frac{1}{p}}},$$

con

$$R-r > \omega > R-r-(R-r)\frac{\alpha}{(F(v(r)))^{\frac{1}{p}}} > (R-r)/2$$

per $r \in (R-\epsilon, R)$. Osserviamo che questo valore di ϵ può essere più piccolo di quello in (2.39). Poiché ϕ' è decrescente si ha

$$v(r) > \phi(R-r) - \phi'\left(\frac{R-r}{2}\right)(R-r)\frac{\alpha}{(F(v(r)))^{\frac{1}{p}}}.$$

Dalla definizione di ϕ inoltre

$$\phi'(r) = (p'F(\phi(r)))^{\frac{1}{p}}.$$

Quindi,

$$v(r) > \phi(R-r) - \left(p'F\left(\phi\left(\frac{R-r}{2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}(R-r)\frac{\alpha}{(F(v(r)))^{\frac{1}{p}}}. \qquad (2.40)$$

Ora possiamo stimare $v(r)$ rispetto a $\phi(R-r)$. Dalla (2.38)

$$\frac{-v'}{(p'F(v))^{\frac{1}{p}}} < 1.$$

Integrando su (r, R) e, ricordando che $v(R) = 0$, si trova

$$\psi(v(r)) < R-r,$$

ovvero

$$v(r) < \phi(R-r).$$

Con questa stima, la (2.40) ci dà

$$v(r) > \phi(R-r) - \alpha_1 \frac{(p'F(\phi((R-r)/2)))^{\frac{1}{p}}}{(p'F(\phi(R-r)))^{\frac{1}{p}}}(R-r). \qquad (2.41)$$

Dalla concavità di ϕ si ha

$$\phi(\delta/2) > \phi(\delta)/2.$$

Quindi dalla (2.41) e dall'ipotesi (F-2), segue $-F\left(\phi((R-r)/2)\right)^{\frac{1}{p}} > -MF\left(\phi(R-r)\right)^{\frac{1}{p}}$ e quindi la stima (2.35). $\square$

LEMMA 2.9. *Siano verificate le ipotesi* (F-1) *e* (F-2). *Se* $w(r)$ *è una soluzione radiale positiva del problema (2.29) in* $\mathcal{A}(\rho, R)$ *allora, esistono* $\epsilon > 0$ *e* $\beta > 0$ *tali che*

$$w(r) < \phi(r-\rho) + (r-\rho)\beta \qquad \forall r \in (\rho, \rho+\epsilon). \tag{2.42}$$

DIMOSTRAZIONE. w verifica l'equazione

$$(p-1)|w'|^{p-2}w'' + \frac{N-1}{r}|w'|^{p-2}w' + f(w) = 0, \quad w(\rho) = w(R) = 0. \tag{2.43}$$

Una soluzione $w \in C^1(\rho, R)$ di (2.43) ha almeno un massimo locale in un punto che chiamiamo r_0. Riscriviamo la (2.43) come

$$-r^{N-1}|w'|^{p-2}w' + \int_r^{r_0} t^{N-1} f(w)dt = 0.$$

In questo modo si vede che $w'(r)$ é positivo in (ρ, r_0) e negativo in (r_0, R). Se $r \in (\rho, r_0)$ si ha

$$(w'(r))^{p-1} = r^{1-N} \int_r^{r_0} t^{N-1} f(w)dt,$$

da cui segue che $w'(r)$ é decrescente in (ρ, r_0).

Moltiplichiamo la (2.43) per $w'(r)$ e integriamo su (r, r_0). Si trova

$$(p-1)\int_r^{r_0} (w')^{p-1}w''ds + (N-1)\int_r^{r_0} \frac{(w')^p}{s}ds + \int_r^{r_0} f(w)w'ds = 0,$$

$$\frac{1}{p'}(w')^p = (N-1)\int_r^{r_0} \frac{(w')^p}{s}ds + F(w) - \int_{w(r_0)}^{\infty} f(t)dt.$$

Questa stima implica che $w'(r) \to \infty$ per $r \to \rho$, per l'ipotesi (F-1). Inoltre,

$$\frac{1}{p'}(w')^p < \frac{N-1}{\rho}\int_r^{r_0} (w')^{p-1}w'ds + F(w).$$

Poiché $w'(r)$ è decrescente, dall'ultima diseguaglianza abbiamo

$$\frac{1}{p'}(w')^p < c_1(w')^{p-1} + F(w), \tag{2.45}$$

con $c_1 = w(r_0)(N-1)/\rho$. Usando la diseguaglianza di Young, dalla (2.45) otteniamo

$$\frac{1}{2p'}(w')^p < F(w) + c_2 < 2F(w)$$

per $r \in (\rho, \rho+\epsilon)$. Inserendo questa stima sempre nella (2.45) si trova

$$\frac{1}{p'}(w')^p < c_3\left(F(w)\right)^{1-\frac{1}{p}} + F(w),$$

da cui

$$\frac{w'}{(p'F(w))^{\frac{1}{p}}} < 1 + \frac{c_4}{(p'F(w))^{\frac{1}{p}}}.$$

Integriamo fra (ρ, r) con $r < \rho + \epsilon$ e utilizzando la monotonia di $F(w)$ si ha

$$\psi(w(r)) < r - \rho + \frac{(r-\rho)c_4}{(p'F(w))^{\frac{1}{p}}},$$

da cui, usando ϕ la funzione inversa di ψ

$$w(r) < \phi(r-\rho) + \phi'(\omega)(r-\rho)\frac{c_4}{(p'F(w))^{\frac{1}{p}}}$$

con $r - \rho \leq \omega \leq r - \rho + \frac{(r-\rho)c_4}{(p'F(w))^{\frac{1}{p}}}$. Dalla decrescenza di ϕ'

$$w(r) < \phi(r-\rho) + \phi'(r-\rho)(r-\rho)\frac{c_4}{(p'F(w))^{\frac{1}{p}}}. \tag{2.46}$$

Ora mostriamo che $(r-\rho)\phi'(r-\rho) < \phi(r-\rho)$. Sia $(r-\rho) = \psi(\delta)$, si ha

$$\frac{(r-\rho)\phi'(r-\rho)}{\phi(r-\rho)} = \psi(\delta)\frac{(p'F(\delta))^{\frac{1}{p}}}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \frac{(p'F(\delta))^{\frac{1}{p}}}{(p'F(t))^{\frac{1}{p}}}dt < 1.$$

Quindi, la (2.46) implica, poiché $\frac{c_4}{(p'F(w))^{\frac{1}{p}}} < 1$,

$$w(r) < 2\phi(r-\rho) \qquad \forall r \in (\rho, \rho+\epsilon). \tag{2.47}$$

Inoltre,

$$\phi'(r-\rho) = (p'F(\phi(r-\rho)))^{\frac{1}{p}}.$$

Utilizzando quest'ultima stima insieme alle (2.46) e (2.47) e la monotonia di $f(w)$, abbiamo

$$w(r) < \phi(r-\rho) + c_4\frac{(F(\phi(r-\rho)))^{\frac{1}{p}}}{(F(2\phi(r-\rho)))^{\frac{1}{p}}}(r-\rho).$$

Il Lemma segue dall'ipotesi (F-2). □

TEOREMA 2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regolare che verifica una condizione di sfera interna ed esterna uniforme. Siano verificate* (F-1) *e* (F-2). *Se $u(x)$ è una soluzione positiva del problema (2.29) in Ω allora esiste una costante $\beta > 0$ tale che*

$$|u(x) - \phi(\delta(x))| < \beta\delta(x).$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è standard la riportiamo per completezza seguendo [**GP**], e [**BGP**]. Sia x_0 un punto di $\partial\Omega$. Dopo una traslazione e una rotazione , possiamo supporre che $x_0 = (\rho, 0, \ldots, 0)$, e che Ω sia tutto contenuto nella corona $\mathcal{A}(\rho, R)$ con centro in $(2\rho, 0, \ldots, 0)$, e che Ω contenga la palla $B(\rho)$ con centro in $(0, \ldots, 0)$. Sia, $\mathcal{A}(\rho, R)$ che $B(\rho)$ sono tangenti a $\partial\Omega$ in x_0. Sia $u(x)$ una soluzione del problema

(2.29) in Ω, e sia $v(x)$ la corrispondente soluzione nella palla $B(\rho)$ e $w(x)$ la soluzione nella corona circolare $\mathcal{A}(\rho, R)$. Dal principio del confronto , si ha

$$v(x) \leq u(x) \leq w(x) \qquad \forall x \in B(\rho).$$

La tesi segue ora dai Lemmi 2.9, 2.8 e dalle stime (2.35) e (2.42) $\square$

COROLLARIO 2.3. *Sotto le stesse ipotesi del Teorema 2.4 si ha*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{u(x)}{\phi(\delta(x))} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Il corollario segue dal Teorema 2.4 perché

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t}{\phi(t)} = \lim_{t \to 0^+} \psi'(\phi(t)) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{(p' F(\phi(t)))^{\frac{1}{p}}} = 0.$$

$\square$

CAPITOLO 3

ESISTENZA DI SOLUZIONI IN DOMINI APPROSSIMANTI

3.1. Introduzione

Nel 1988, in [**D1**], Dancer mostra l'esistenza di domini in cui l'equazione

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

$1 < q < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, $1 < q < \infty$ se $N = 2$, possiede più soluzioni positive. In particolare per ogni numero naturale n fissato trova un dominio in cui esistono esattamente $2^n - 1$ soluzioni positive per il problema (3.1). La dimostrazione si ottiene considerando una successione di domini Ω_n che approssima un aperto fissato Ω. Per n grande, dall'esistenza di una soluzione in Ω si ricava l'esistenza in Ω_n. Un'ipotesi rilevante è che tutti gli insiemi Ω e Ω_n siano contentenuti in una palla B sufficientemente grande. In questo modo Dancer considera le soluzioni estese a zero fuori Ω_n su tutto B, e questo permette di lavorare negli spazi $L^r(B)$ oppure $L^\infty(B)$ oppure $W_0^{-1,2}(B)$. Permette inoltre di ottenere delle stime sulle norme delle soluzioni che non dipendono dal particolare dominio Ω, o Ω_n considerato. L'esistenza di una soluzione in Ω_n si ottiene da un argomento di grado topologico.

Questo risultato si può estendere a funzioni f più generali facendo un'opportuna ipotesi sul grado della soluzione in Ω. Dancer considera essenzialmente il caso in cui $\Omega = \cup_{i=1}^s B_i$ è unione finita di s palle con $\overline{B}_i$ disgiunte e Ω_n è una successione ottenuta da Ω unendo le palle con dei piccoli tubicini e regolarizzando. In particolare scegliendo Ω non connesso, abbiamo molteplicità delle soluzioni non negative in Ω che può essere estesa al dominio Ω_n, per n grande. Il dominio Ω_n si può prendere anche stellato come detto in precedenza.

Dancer noto il numero delle soluzioni in Ω riesce a sapere esattamente quante sono le soluzioni in Ω_n. Infatti per ogni soluzione u_0 in Ω trova un'unica soluzione u_n in

Ω_n che sia vicina alla u_0 in una norma opportuna. Per ottenere l'unicità locale Dancer utilizza la non degenerazione della soluzione u_0.

In questo capitolo ci occupiamo di estendere tale tecnica all'operatore degenere p- laplaciano e mostriamo l'esistenza delle soluzioni nei domini approssimanti Ω_n sotto un'opportuna ipotesi sull'indice della soluzione in Ω. Non possiamo estendere al p-laplaciano la parte che riguarda l'unicità locale poiché il funzionale associato al p-laplaciano non è derivabile due volte e non si può parlare di linearizzata.

Come applicazione otteniamo un risultato di molteplicità per soluzioni positive di alcuni problemi ellittici sottocritici in particolari domini.

Rendiamo precise alcune notazioni. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ abbastanza regolare, e sia Ω_n una successione di domini limitati che approssima Ω e tali che esiste un insieme compatto $E \subset \mathbb{R}^N$, di misura nulla, per cui sono verificate le seguenti proprietà:

I) comunque preso un compatto K contenuto in Ω esiste n_0 dipendente da K tale che $K \subset \Omega_n$ per $n > n_0$,

II) comunque preso un aperto A che contiene $E \cup \overline{\Omega}$, allora $\Omega_n \subset A$ se n grande.

Sia B una palla che contiene $\Omega \cup \Omega_n$ per ogni n.

Le ipotesi I) e II) si adattano perfettamente al caso trattato da Dancer e sono un po' più generali. Gli Ω_n posssono approssimare Ω sia dall'interno che dall'esterno e se Ω è sconnesso il compatto E è un insieme di misura nulla che connette le sue parti sconnesse. Nel caso delle due palle E è un segmento che le unisce.

Ω deve essere abbastanza regolare, intendendo con questo che se $u \in W_0^{1,p}(B)$ e $u(x) = 0$ se $x \notin \Omega$ allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Per esempio se Ω verifica la proprietà di cono locale o di segmento allora è sufficientemente regolare vedi [**RT**]. Noi considereremo sempre Ω regolare.

Consideriamo il caso in cui Ω è unione di due palle tangenti in un punto. Anche se Ω non verifica la proprietà di segmento nel punto di tangenza, sono comunque verificate le condizioni di regolarità, almeno nel caso in cui $p \leq N$, vedi osservazione 3.1.

Questo fornisce il risultato di molteplicità in domini stellati. Il caso dei domini Ω_n stellati è interessante perché si pensava che l'unicità o la molteplicità delle soluzioni fosse legata all'esistenza o meno delle soluzioni per l'esponente critico, mentre in quel caso per tutti i domini stellati abbiamo la non esistenza delle soluzioni. La congettura è che l'unicità valga in domini convessi, almeno per $p = 2$.

Questo capitolo è così organizzato. Nel paragrafo 3.2 mostriamo un Teorema di convergenza delle soluzioni in Ω_n nel caso che l'operatore sia lineare cioè per il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g_{|\Omega} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Le soluzioni u_n dell'equazione (3.2) in Ω_n, convergono alla soluzione u_0 in Ω in un opportuno spazio funzionale. Mostriamo inoltre alcuni risultati classici di regolarità, vedi Lemmi 3.1, 3.2, che permettono di ottenere delle stime della soluzione u_n, relativa al dominio Ω_n, in opportune norme, che non dipendono dal dominio Ω_n ma solo dalla palla B. Tale risultato di convergenza si può generalizzare al caso in cui $g_n \to g$ in un opportuno spazio funzionale, e questo ci servirà per provare il nostro Teorema principale.

Nel paragrafo 3.3 proviamo il nostro risultato principale, cioè l'esistenza di soluzioni nei domini Ω_n nel caso in cui l'operatore sia non lineare, ovvero per l'equazione

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

sotto opportune ipotesi sulla f. Ci limitiamo al caso di soluzioni non negative. In particolare ci interessa il caso in cui $f(u) = u^q$ per $p - 1 < q < \frac{Np-N+p}{N-p}$, $p < N$. Per la dimostrazione si utilizzano degli argomenti di grado topologico. Per ottenere soluzioni positive inoltre calcoliamo il grado nel convesso $\mathcal{C} := \{v \in L^r(B) \text{ tali che } v(x) \geq 0 \text{ in } B\}$. Tali soluzioni u_n relative al dominio Ω_n convergono alla u_0, soluzione nell'aperto Ω,in opportuni spazi funzionali.

Nel paragrafo 3.4 utilizziamo un'idea presa da [**DEM**] per calcolare il grado nel convesso $\mathcal{C}$ della soluzione positiva e della soluzione nulla in una palla di raggio unitario per un problema sottocritico. Per poter applicare il Teorema astratto abbiamo infatti bisogno che il grado di queste soluzioni sia non nullo. Tale grado si calcola facilmente per $p = 2$, poiché l'operatore è derivabile. Ci serviamo dei risultati noti per $p = 2$ per calcolare l'indice nel caso $p \neq 2$.

Tale omotopia fornisce dei limiti nella scelta degli esponenti p e q che dipendono dal metodo e speriamo di migliorare in futuro.

Nel paragrafo 3.5 infine forniamo l'applicazione del Teorema astratto, utilizzando i risultati del paragrafo 3.4,e otteniamo la molteplicità delle soluzioni positive di alcuni problemi sottocritici.

Rimandiamo all'Appendice per alcune considerazioni sull'indice.

3.2. Caso lineare

In questo paragrafo ci occupiamo del problema (3.2).

Mostriamo intanto alcuni risultati di regolarità. La dimostrazione è nota, vedi per esempio [**P**], la riportiamo per esplicitare il fatto che le stime possono essere rese indipendenti dal dominio Ω_n o Ω, e che dipendono solo da B.

LEMMA 3.1. *Sia Ω una aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluzione debole di*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g & in\ \Omega \\ u = 0 & su\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Se $g \in L^r(\Omega)$ con $r > \frac{N}{p}$ e $p \leq N$, allora $u \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u\|_\infty \leq C(N, p, \|g\|_r, |\Omega|, S, r)$ dove S è la migliore costante per l'immersione di Sobolev, $S = S(N, p)$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si può trovare in [**P**] la riportiamo per completezza. Consideriamo intanto il caso $p < N$. Per $k > 0$ consideriamo la funzione $v = sign(u)\,(|u| - k)^+$

$$v = \begin{cases} u - k & \text{se } u \geq k \\ 0 & \text{se } -k < u < k \\ u + k & \text{se } u \leq -k \end{cases}$$

allora $u = v + ksign(u)$ e $u_{x_i} = v_{x_i}$ in $A(k) = \{x \in \Omega \text{ t.c. } |u(x)| \geq k\}$, $v = 0$ in $\Omega \backslash A(k)$ e $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Usiamo v come funzione test nell'equazione (3.4) e otteniamo

$$\int_{A(k)} |\nabla v|^p = \int_{A(k)} gv,$$

$$S^p\Big(\int_{A(k)}|v|^{p^*}\Big)^{\frac{p}{p^*}} \leq \int_{A(k)}|\nabla v|^p \leq \Big[\int_{A(k)} g^r\Big]^{\frac{1}{r}}\Big[\int_{A(k)}|v|^{p^*}\Big]^{\frac{1}{p^*}}|A(k)|^{1-\left(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}\right)};$$

$$S^p\left(\int_{A(k)}|v|^{p^*}\right)^{\frac{p-1}{p^*}} \leq \left[\int_{\Omega} g^r\right]^{\frac{1}{r}}|A(k)|^{1-\left(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}\right)}; \tag{3.6}$$

dove $p^* = \frac{Np}{N-p}$ ed S è la migliore costante per l'immersione di Sobolev che dipende solo da p e da N. Abbiamo usato la diseguaglianza di Sobolev in Ω, che è aperto e limitato, e la diseguaglianza di Hölder. Per $h > k > 0$ abbiamo $A(h) \subseteq A(k)$, quindi

$$|A(h)|^{\frac{1}{p^*}}(h-k) = \Big(\int_{A(h)}(h-k)^{p^*}\Big)^{\frac{1}{p^*}} \leq \Big(\int_{A(h)}|v|^{p^*}\Big)^{\frac{1}{p^*}} \leq \Big(\int_{A(k)}|v|^{p^*}\Big)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Inserendo questa stima nella (3.6), otteniamo

$$S^p|A(h)|^{\frac{p-1}{p^*}}(h-k)^{p-1} \leq S^p\left(\int_{A(k)}|v|^{p^*}\right)^{\frac{p-1}{p^*}} \leq \|g\|_r|A(k)|^{1-\left(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}\right)},$$

$$|A(h)|^{\frac{p-1}{p^*}} \leq \frac{\|g\|_r}{S^p(h-k)^{p-1}}|A(k)|^{1-\left(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}\right)},$$

$$|A(h)| \leq \frac{\|g\|_r^{\frac{p^*}{p-1}}}{S^{\frac{pp^*}{p-1}}}\frac{1}{(h-k)^{p^*}}|A(k)|^{\frac{1}{p-1}\left(p^*-1-\frac{p^*}{r}\right)},$$

dove $\frac{1}{p-1}\left(p^*-1-\frac{p^*}{r}\right) > 1$ proprio per come abbiamo scelto r. Applichiamo ora il

Claim : *Se $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione non crescente tale che se $h > k > k_0$ per qualche $\alpha > 0$, $\beta > 1$, verifica*

$$\Phi(h) \leq \frac{c}{(h-k)^{\alpha}}\left[\Phi(k)\right]^{\beta}$$

allora $\Phi(k_0 + d) = 0$ dove $d^{\alpha} = c2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}\left[\Phi(k_0)\right]^{\beta-1}$.

Nel nostro caso $\Phi(h) = |A(h)|$ è non crescente, $\alpha = p^*$ e $\beta = \frac{1}{p-1}\left(p^*-1-\frac{p^*}{r}\right) > 1$, $c = \frac{\|g\|_r^{\frac{p^*}{p-1}}}{S^{\frac{pp^*}{p-1}}}$. Prendiamo $k_0 = 0$, $\Phi(0) = |\Omega|$. Otteniamo quindi $\Phi(d) = 0$ per

$$d = 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}\frac{\|g\|_r^{\frac{1}{p-1}}}{S^{\frac{p}{p-1}}}|\Omega|^{\gamma},$$

dove $\gamma = \frac{1}{p^*}(\beta-1) = \left(\frac{1}{p-1}\left(p^*-1-\frac{p^*}{r}\right)-1\right)\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^*(p-1)} - \frac{1}{r(p-1)} - \frac{1}{p^*} > 0$. Da ciò segue $|A(d)| = 0$ ovvero $|u| \leq d$ quasi ovunque in Ω, e

$$\|u\|_{\infty} \leq d = C\left(N, p, \|g\|_r, |\Omega|, S, r\right).$$

Se $p = N$ posso ripetere la dimostrazione prendendo $r > 1$ e un esponente $q > \frac{Nr}{r-1} > 1$ qualunque al posto di p^*.

□

DIMOSTRAZIONE DEL CLAIM. Sia $k_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n}$, allora

$$\Phi(k_1) \leq \frac{c}{\left(\frac{d}{2}\right)^\alpha} [\Phi(k_0)]^\beta = \frac{c2^\alpha [\Phi(k_0)]^\beta}{c2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} [\Phi(k_0)]^{\beta-1}} = \frac{\Phi(k_0)}{2^{\frac{\alpha}{\beta-1}}};$$

$$\Phi(k_2) \leq \frac{c}{\left(\frac{d}{2^2}\right)^\alpha} [\Phi(k_1)]^\beta \leq \frac{c2^{2\alpha} [\Phi(k_0)]^\beta}{c2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} [\Phi(k_0)]^{\beta-1}\, 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}} = \frac{\Phi(k_0)}{2^{\frac{2\alpha}{\beta-1}}};$$

così per ricorrenza

$$\Phi(k_n) \leq \frac{\Phi(k_0)}{2^{\frac{n\alpha}{\beta-1}}}.$$

Allora

$$0 = \lim_{n\to\infty} \Phi(k_n) \geq \Phi(k_0 + d) \geq 0.$$

□

Sia Ω_n una successione di domini che verifica le ipotesi $I)$ e $II)$ dell'introduzione e sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$. Sia B come nell'introduzione. Sia $g \in L^r(B)$ per qualche $r > 1$ opportuno. Considero il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = g_{|\Omega_n} & \text{in } \Omega_n \\ u_n = 0 & \text{su } \partial\Omega_n. \end{cases} \tag{3.7}$$

LEMMA 3.2. *Siano Ω_n una successione di domini che verifica le ipotesi I) e II), e siano $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n)$ soluzioni dell'equazione (3.7) in Ω_n. Sia $g \in L^r(B)$ con $r > \max\{1, \frac{N}{p}\}$. Siano $\tilde{u}_n$ sono ottenute dalle u_n prolungandole a zero fuori Ω_n su tutto B. Allora $\tilde{u}_n \in L^\infty(B)$ e $\|u_n\|_\infty = \|\tilde{u}_n\|_\infty \leq C(N, p, \|g\|_r, |B|, r)$. Ovvero le $\tilde{u}_n$ sono limitate in norma L^∞ uniformemente in n.*

DIMOSTRAZIONE. Caso $p \leq N$. Per $k > 0$ sia $\tilde{v}_n = sign(\tilde{u}_n)(\tilde{u}_n - k)^+$. $\tilde{v}_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n)$, la possiamo usare come funzione test nell'equazione (3.7) e ripetere la dimostrazione del Lemma 3.1, fino a ottenere la stima

$$|A(h)| \leq \frac{\|g\|_r^{\frac{p^*}{p-1}}}{S^{\frac{pp^*}{p-1}}} \frac{1}{(h-k)^{p^*}} |A(k)|^{\frac{1}{p-1}\left(p^*-1-\frac{p^*}{r}\right)}$$

dove $A(k)$ in questo caso è così definito $A(k) = \{x \in B \text{ t. c. } |\tilde{u}_n| \geq k\}$ e la norma di g è intesa in $L^r(B)$. Siamo sempre nelle ipotesi per poter applicare il Claim, con $k_0 = 0$ e $\Phi(0) = |B|$. Otteniamo quindi la stima

$$\|u_n\|_\infty = \|\tilde{u}_n\|_\infty \leq d = C(N, p, \|g\|_r, |B|, S, r).$$

Se invece $p > N$ poiché $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n)$ allora $\tilde{u}_n \in W_0^{1,p}(B)$ e $\|\tilde{u}_n\|_{C(\overline{B})} = \sup_B |\tilde{u}_n(x)| \leq C\|\tilde{u}_n\|_{1,p} = C\|u_n\|_{1,p}$, dove $C = C(N, p, |B|)$ non dipende da n. Usando u_n come funzione test nell'equazione (3.7), otteniamo

$$\|u_n\|_{1,p}^p = \int_{\Omega_n} g u_n \leq \|u_n\|_\infty \|g\|_1 \leq C\|u_n\|_{1,p}\|g\|_1 \leq C\|u_n\|_{1,p}\|g\|_r |B|^{\frac{1}{r'}},$$

dove r' è l'esponente coniugato di r, e infine

$$\|u_n\|_{1,p}^{p-1} \leq C\|g\|_r |B|^{\frac{1}{r'}}.$$

Abbiamo quindi

$$\|\tilde{u}_n\|_{W_0^{1,p}(B)} = \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega_n)} \leq C\|g\|_r^{\frac{1}{p-1}} |B|^{\frac{1}{r'(p-1)}}$$

da cui, utilizzando la diseguaglianza di Sobolev,

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leq C\|u_n\|_{1,p} \leq C'\|g\|_r^{\frac{1}{p-1}} |B|^{\frac{1}{r'(p-1)}} = C(N, p, \|g\|_r, |B|, r).$$

□

Osserviamo in particolare che questa stima non dipende dai domini Ω_n ma solo dal dominio B in cui sono tutti contenuti ed è uniforme in n. Questo fatto sarà cruciale nella dimostrazione dei Teorema 3.1, e 3.2.

TEOREMA 3.1. *Siano Ω e Ω_n una successione di domini che verifica I) e II) con Ω regolare. Supponiamo che $g \in L^r(B)$ con $r > \max\{1, \frac{N}{p}\}$. Se $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n)$ risolve in senso debole l'equazione (3.7), allora $u_n \to u_0$ in $W_0^{1,p}(B) \cap L^q(B)$ per ogni $1 < q < \infty$, dove $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ è l'unica soluzione (debole) del problema (3.7) in Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che le u_n esistono e si trovano come minimi del funzionale associato. Inoltre sono uniche dal principio di confronto debole, vedi [**P**], [**Da**].

Passo1 : Estendiamo le u_n a zero fuori Ω_n su tutto B, in questo modo $u_n \in W_0^{1,p}(B)$ per ogni n e $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(B)} = \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega_n)}$. Ora $g \in L^r(B)$ con $r > \max\{1, \frac{N}{p}\}$ quindi, dal Lemma 3.2, le u_n stanno anche in $L^\infty(B)$ per ogni n e $\|u_n\|_\infty \le C(N, p, \|g\|_r, |B|, r)$. Dalla stima uniforme di u_n in norma L^∞ otteniamo anche una stima uniforme in $W_0^{1,p}(B)$ infatti

$$\int_B |\nabla u_n|^p = \int_B g u_n \le \left(\int_B g^r\right)^{\frac{1}{r}} \|u_n\|_\infty^{\frac{1}{r'}} |B|^{\frac{1}{r'}} \le C$$

dove r' è l'esponente coniugato di r. Quindi $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(B)} \le C(N, p, \|g\|_r, |B|, r)$ e $\|u_n\|_\infty \le C(N, p, \|g\|_r, |B|, r)$. Queste stime sono uniformi in n; non dipendono dal dominio Ω_n ma solo dalla palla B.

La successione u_n è limitata in $W_0^{1,p}(B)$, possiamo estrarre una sottosuccessione che continuiamo a chiamare u_n tale che

- u_n converge a $u \in W_0^{1,p}(B)$ debolmente,
- u_n converge a u quasi ovunque in B,
- u_n converge a u forte in $L^q(B)$, per ogni $q \in [1, p^*)$ dove $p^* = \frac{Np}{N-p}$ se $p < N$, e $p^* = \infty$ se $p = N$, altrimenti se $p > N$ u_n converge a u forte in $C(\overline{B})$.

Intanto $\|u_n\|_\infty \le C$ implica anche $u \in L^\infty(B)$. Dalla convergenza puntuale infatti, esiste un insieme A di misura nulla (ottenuto facendo l'unione numerabile di insiemi di misura nulla) tale che in $B \setminus A$ abbiamo

$$u_n(x) \to u(x),$$

per ogni $x \in B \setminus A$. Dalla convergenza puntuale ottengo appunto $u(x) \le C'$ in $B \setminus A$ e $\|u\|_\infty \le C'$. Dalla convergenza forte di u_n a u in L^q per qualche q, se $p < N$, otteniamo convergenza in L^s per ogni $1 < s < \infty$, infatti

$$\int_B |u_n - u|^s \le \int_B \|u_n - u\|_\infty^{s-q} |u_n - u|^q \le C\|u_n - u\|_q^q \to 0$$

quindi u_n converge forte ad u in $L^s(B)$ per ogni $s > 1$.

Passo 2 : Mostriamo che $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Qui serve un po' di regolarità su $\partial\Omega$. Abbiamo che u appartiene a $W_0^{1,p}(B)$, inoltre $u = 0$ quasi ovunque fuori Ω; infatti se K è un compatto tale che $K \cap (\overline{\Omega} \cup E) = \emptyset$ allora $B \setminus K$ è aperto tale che $\overline{\Omega} \cup E \subset B \setminus K$ e quindi $\Omega_n \subset B \setminus K$ per $n > \bar{n}$, dall'ipotesi II). Inoltre $\Omega_n \cap K = \emptyset$ per ogni $n \ge \bar{n}$, e poiché $u_n(x) = 0$ in $K \subset B \backslash \Omega_n$ per costruzione e $u_n \to u$ quasi ovunque in B, abbiamo $u(x) = 0$ quasi ovunque in K e $u(x) = 0$ quasi ovunque su $B \setminus \left(\overline{\Omega} \cup E\right)$. Infine poiché $\partial\Omega \cup E$ ha misura nulla allora $u(x) = 0$ quasi ovunque fuori Ω.

Per ogni $x \in \partial\Omega$ sia n_x il versore normale interno a $\partial\Omega$ in x. Se x_0 appartiene a $\partial\Omega$, per continuità (dalla regolarità di $\partial\Omega$) esiste un intorno V_{x_0} di x_0 in $\overline{\Omega}$ tale che $n_x \cdot n_{x_0} \geq 0$ se $x \in V_{x_0} \cap \partial\Omega$. Un numero finito di V_{x_i} ricopre $\partial\Omega$ poiché è compatto. Per $i = 1, \ldots, h$ consideriamo le funzioni $\varphi_i \in C^\infty$

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_i \leq 1 & \\ \varphi_i = 1 & \text{in } \tilde{V}_{x_i} \\ \varphi_i = 0 & \text{fuori } V_{x_i} \end{cases} \tag{3.8}$$

dove $\tilde{V}_{x_i}$ è un più piccolo intorno di x_i, $\tilde{V}_{x_i} \subset V_{x_i}$. Vicino a $\partial\Omega$ $u = \sum_{i=1}^h \frac{u\varphi_i}{\sum \varphi_i}$, infatti il denominatore non si annulla mai in un intorno di $\partial\Omega$. In particolare $\sum \varphi_i > 0$ fuori un compatto $W \subset \Omega$. Sia ora $\psi \in C^\infty$ tale che $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ su $\overline{W}$ e zero in un intorno di $\partial\Omega$. Abbiamo

$$u = u\psi + u\,(1-\psi) \sum_{i=1}^h \frac{\varphi_i}{\sum \varphi_i}.$$

Ora $u\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ perché $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, *supp* $(u\psi) \subset \Omega$. Quindi u sta in $W_0^{1,p}(\Omega)$ se $u\,(1-\psi) \sum \frac{\varphi_i}{\sum \varphi_i} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ovvero se $w_i = u\,(1-\psi) \frac{\varphi_i}{\sum \varphi_i} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, h$. Trasliamo le w_i nella direzione n_{x_i} in modo che siano supportate solo dentro Ω. Notiamo che *supp* $w_i \subset V_{x_i}$. Ovvero definiamo

$$w_{i,t}(x) = w_i(x + tn_{x_i}).$$

Per ogni $t > 0$, $w_{i,t} = 0$ in un intorno di $\partial\Omega$, *supp* $w_{i,t} \subset \Omega$ quindi $w_{i,t} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Ora mostriamo che $w_{i,t}(x) \to w_i(x)$ per $t \to 0$ forte in $W_0^{1,p}(\Omega)$, quindi che $w_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e così anche u. Basta provare che se w appartiene ad L^p allora $w_{i,t} \to w$ forte in L^p.

Estendiamo w_i e $w_{i,t}$ a zero fuori Ω e lavoriamo in $W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Sia $\Phi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ una successione tale che $\Phi_k \to w_i$ in $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Abbiamo $\|w_i - \Phi_k\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$ se $k > \bar{k}$. Allora

$$\begin{aligned} \|w_{i,t} - \Phi_{k,t}\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |w_i\,(x + tn_{x_i}) - \Phi_k\,(x + tn_{x_i})\,|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |w_i(y) - \Phi_k(y)|^p = \|w_i - \Phi_k\|_p^p < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

sempre se $k > \bar{k}$. Sia ora $k > \overline{k}$ fissato, per $t \to 0$ $\Phi_k(x + tn_{x_i}) \to \Phi_k(x)$ puntualmente, inoltre

$$|\Phi_k(x + tn_{x_i}) - \Phi_k(x)|^p \leq C\left(|\Phi_k|^p + |\Phi_k(x + tn_{x_i})|^p\right)$$

e sia Φ_k che $\Phi_k(x + tn_{x_i})$ sono p-integrabili in $\mathbb{R}^N$. Possiamo passare a limite per convergenza dominata e ottenere

$$\|\Phi_{k,t} - \Phi_k\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

per $k > \overline{k}$ fissato se $t > \bar{t}$. Quindi, sia $k > \overline{k}$ fissato, abbiamo

$$\|w_{i,t} - w_i\|_p \leq \|w_{i,t} - \Phi_{k,t}\|_p + \|\Phi_{k,t} - \Phi_k\|_p + \|\Phi_k - w_i\|_p < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

se $t > \bar{t}$. Quindi $w_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si può ripetere per ogni $i = 1, \ldots, h$, così $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Passo 3 : Proviamo che u risolve l'equazione (3.7) in Ω, così per l'unicità della soluzione $u \equiv u_0$. Dalla convergenza debole in $W_0^{1,p}(B)$ abbiamo che $\nabla u_n \to \nabla u$ quasi ovunque in B a meno di una sottosuccessione. Sia $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$, dall'ipotesi I) $\Phi \in C_0^\infty(\Omega_n)$ per n grande e possiamo usarla come funzione test nell'equazione (3.7) ,

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\Phi = \int_{\Omega_n} g\Phi,$$

$$\int_B |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\Phi = \int_B g\Phi.$$

Siamo nelle ipotesi di convergenza dominata poiché $\|u_n\|_{1,p} \leq C$, possiamo passare a limite nell'integrale a sinistra e otteniamo

$$\int_B |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\Phi = \int_B g\Phi,$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\Phi = \int_\Omega g\Phi$$

per ogni $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Quindi u risolve l'equazione (3.7) (in senso debole) e $u \equiv u_0$ per l'unicità di tale soluzione.

Osserviamo inoltre che tutta la successione u_n deve tendere alla u_0, che è l'unico punto di accumulazione.

Passo 4 : $u_n \to u$ debole in $W_0^{1,p}(B)$. Mostriamo che anche $\|u_n\|_{1,p} \to \|u\|_{1,p}$. Usiamo u_n come funzione test nell'equazione (3.7)

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^p = \int_{\Omega_n} gu_n,$$

$$\int_B |\nabla u_n|^p = \int_B g u_n.$$

Dalla convergenza forte di u_n a u in L^s per ogni $s > 1$ abbiamo che

$$\int_B g u_n \to \int_B g u$$

quindi

$$\int_B |\nabla u_n|^p = \int_B g u_n \to \int_B g u = \int_B |\nabla u|^p$$

poiché u risolve l'equazione in Ω. Cosi̇̀ $\|u_n\|_{1,p} \to \|u\|_{1,p}$ e $u_n \to u$ forte in $W_0^{1,p}(B)$, vedi [**RN**]. $\square$

Osservazione 3.1. Consideriamo ora un dominio Ω formato da due palle tangenti in un punto x_0. Si può trovare una successione di domini Ω_n regolari e stellati che tendono ad Ω. Nel punto di contatto x_0 non è verificata la proprietà di segmento, quindi non possiamo ripetere il passo 2 nella dimostrazione del Teorema precedente. Comunque se $p \leq N$ possiamo ottenere come prima che se $u \in W_0^{1,p}(B)$ e $u = 0$ fuori Ω allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Questo si può verificare nel seguente modo.

Consideriamo una pallina B_ε di raggio $\varepsilon > 0$ centrata nel punto di contatto x_0, allora $u(x) \in W_0^{1,p}(B)$ e $u(x) = 0$ quasi ovunque fuori $\overline{\Omega}$ implica $u \in W_0^{1,p}(\Omega \cup B_\varepsilon)$, per ogni $\varepsilon > 0$, (l'aperto $\Omega \cup B_\varepsilon$ verifica le proprietà di regolarità, ha frontiera Lipschitziana).

Sia η_ε una cut-off tale che $\eta(x) = 1$ per $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ e $\eta(x) = 0$ per $x \in B \setminus B_\varepsilon(x_0)$, $|\nabla \eta| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ se $\frac{\varepsilon}{2} < |x - x_0| < \varepsilon$. Abbiamo $(1 - \eta_\varepsilon)u \in W_0^{1,p}(B)$, inoltre $u = 0$ in $B \setminus \left(\Omega \cup B_{\frac{\varepsilon}{4}}\right)$ e $(1 - \eta_\varepsilon) = 0$ in $B_{\frac{\varepsilon}{2}}$, quindi $(1 - \eta_\varepsilon)u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$. Mostriamo che $(1 - \eta_\varepsilon)u$ tende ad u in $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla(1 - \eta_\varepsilon)u - \nabla u|^p = \int_\Omega |(1 - \eta_\varepsilon)\nabla u - u\nabla\eta_\varepsilon - \nabla u|^p \leq$$

$$\leq C_p \int_\Omega \eta_\varepsilon^p |\nabla u|^p + u^p |\nabla \eta_\varepsilon|^p \leq C_p \int_\Omega |\nabla u|^p + C_p \int_B |\nabla \eta_\varepsilon|^p \leq C$$

ricordando che la u è limitata in norma L^∞, poiché u e η_ε sono limitate in Ω, $\|u\|_{1,p}$ è limitata e

$$\int_\Omega |\nabla \eta_\varepsilon|^p \leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^p |B_\varepsilon| = 2^p \frac{\varepsilon^N}{\varepsilon^p} \omega_N = C\varepsilon^{N-p} \leq C$$

dove ω_N è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^N$, per $\varepsilon \to 0$, quindi è limitato se $p \leq N$. Inoltre $\eta_\varepsilon \to 0$ e $\nabla\eta_\varepsilon \to 0$ quasi ovunque in B, e per convergenza dominata possiamo passare a limite dentro l'integrale e ottenere che $(1-\eta_\varepsilon)u \to u$ forte in $W_0^{1,p}(\Omega)$, quindi $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Abbiamo cosi̇̀ ottenuto il passo 2 del Teorema 3.1 anche in questo caso.

Inoltre essendo Ω aperto sconnesso le funzioni test $C_0^\infty(\Omega)$ devono annullarsi in un intorno di x_0, quindi essere soluzione debole in Ω vuol dire essere soluzione nei due aperti disgiunti (come nel caso delle due palle separate) e tutte le buone proprietà degli spazi di Sobolev come la diseguaglianza di Sobolev valgono perché valgono nei due aperti separati e poi per densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Il passo 3 e il passo 4 seguono allo stesso modo.

Osservazione 3.2. Quanto detto detto sopra si può estendere come in [**D3**] al caso di domini stellati Ω_n che approssimano k aperti disgiunti. Sia Ω_1 una aperto stellato di $\mathbb{R}^N$ tale che $\partial\Omega_1$ ha frontiera regolare lontano da zero e tale che $\Omega_1 \cup \{0\}$ è stellato rispetto a zero ed è contenuto in un cono $\mathcal{C}_1$ su un corpo convesso che non contiene 0 e con vertice in 0. Siccome possiamo prendere il cono $\mathcal{C}_1$ che sia 'stretto' a piacere, possiamo prendere $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ che verifichino le ipotesi precedenti e tali che $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \{0\}$ per $i \neq j$. Anche in questo caso otteniamo la regolarità di $\Omega = \cup_{i=1}^k \Omega_i$ usando la cut-off nell'origine come nel caso delle due palle tangenti. Anche in questo caso ci limitiamo al caso $p \leq N$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Se $g_n \to g$ in $L^r(B)$ con $r > \max\{1, \frac{N}{p}\}$ ed u_n sono soluzioni di*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = g_{n|\Omega_n} & \text{in } \Omega_n \\ u_n = 0 & \text{su } \partial\Omega_n \end{cases} \tag{3.9}$$

e u_0 è soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 = g_{|\Omega} & \text{in } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora $u_n \to u_0$ in $L^q(B) \cap W_0^{1,p}(B)$ per ogni $1 < q < \infty$.

Dimostrazione. Dalla convergenza di g_n a g in L^r abbiamo che esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$, $\|g_n\|_r \leq \|g\|_r + 1$, quindi le g_n sono uniformemente limitate in norma L^r, se n grande. Con la scrittura $\| - \|_r$ intendiamo qui sempre la norma in $L^r(B)$. Possiamo applicare il Lemma 3.2 e otteniamo per ogni $n > n_0$, $\|u_n\|_\infty \leq C(N, p, \|g_n\|_r, |B|, r)$. Quando si ottiene tale stima come nel Lemma 3.2, la $\|g_n\|_r$ può essere maggiorata con $\|g\|_r + 1$, ottenendo una maggiorazione uniforme in n, ovvero $\|u_n\|_\infty \leq C(N, p, \|g\|_r, |B|, r)$, sia per $p \leq N$, che per $p > N$. Da questa otteniamo poi una limitazione in norma $W_0^{1,p}(B)$ delle u_n,

$$\|u_n\|_{1,p}^p = \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^p = \int_{\Omega_n} g_n u_n \leq \|g_n\|_r \|u_n\|_\infty |B|^{\frac{1}{r'}} \leq$$

$$\leq C(\|g\|_r + 1)|B|^{\frac{1}{r'}} = C(N, p, \|g\|_r, |B|, r),$$

dove r' è l'esponente coniugato di r. Anche in questo caso la norma $\| - \|_{1,p}$ è intesa come la norma in $W_0^{1,p}(B)$ che comunque coincide con la norma in $W_0^{1,p}(\Omega_n)$. Dalla u_n possiamo estrarre una sottosuccessione, che chiamiamo ancora u_n, che converge debolmente a z in $W_0^{1,p}(B)$, forte in $L^s(B)$ almeno per qualche s piccolo e quasi ovunque in B. A questo punto la dimostrazione ricalca quella del Teorema 3.1. Dalla limitazione in norma L^∞ delle u_n otteniamo una limitazione in norma L^∞ della z e la convergenza forte di u_n a z in $L^q(B)$ per ogni $1 < q < \infty$. Come nel passo 2 otteniamo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Ripetendo il passo 3 (utilizzando anche la convergenza di g_n a g in $L^r(B)$), abbiamo che z risolve l'equazione (3.7) in Ω e dall'unicità della soluzione debole $z = u_0$. Infine ripetiamo il passo 4; usiamo u_n come funzione test e dalla convergenza forte di u_n a u in $L^q(B)$ per ogni $q > 1$ e di g_n a g in $L^r(B)$ abbiamo anche la convergenza

$$\int_B g_n u_n \to \int_B g u,$$

e quindi la convergenza della norma $\|u_n\|_{1,p}$ a $\|u\|_{1,p}$ da cui otteniamo infine la convergenza forte di u_n a u in $W_0^{1,p}(B)$. $\square$

3.3. Caso non lineare

In questo paragrafo dimostriamo il nostro Teorema principale. Siccome la dimostrazione e l'enunciato sono un po' articolati introduciamo intanto alcune notazioni.

Siano Ω e Ω_n come nel Teorema 3.1. Sia u_0 soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

e u_n soluzione dello stesso problema in Ω_n. Ricordiamo che Ω e tutti gli Ω_n sono contenuti in B. Quindi, d'ora in poi, consideriamo le u_n e u_0 estese a zero fuori Ω_n e Ω e definite su tutto B.

Consideriamo le seguenti mappe

$$i_n : L^r(\Omega_n) \to L^r(B)$$

$$i_n(u)(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega_n \\ 0 & x \in B \backslash \Omega_n \end{cases}$$

i_n è una mappa lineare continua tale che $\| i_n \| = 1$, per ogni n; e la restrizione

$$r_n : L^r(B) \to L^r(\Omega_n)$$

$$r_n(u)(x) = u(x) \quad x \in \Omega_n$$

r_n è anch'essa lineare continua tale che $\| r_n \| = 1$, per ogni n.

Indichiamo con P_n l'operatore inverso di $-\Delta_p$ ristretto ad Ω_n con condizione di Dirichlet al bordo e con

$$\tilde{A}_n : L^r(\Omega_n) \to L^r(\Omega_n),$$

$\tilde{A}_n = P_n \circ f$. Infine

$$A_n : L^r(B) \to L^r(B),$$

$A_n = i_n \circ \tilde{A}_n \circ r_n$. Indico con P_0 l'operatore inverso di di $-\Delta_p$ ristretto a Ω, $\tilde{A} = P_0 \circ f$ e A di conseguenza.

Sia $\mathcal{C} = \{v \in L^r(B) \text{ tali che } v(x) \geq 0 \text{ in } B\}$ e in generale $\mathcal{C}_{\Omega_n} = \{v \in L^r(\Omega_n) \text{ t.c. } v(x) \geq 0 \text{ in } \Omega_n\}$. $\mathcal{C}_\Omega$ in modo analogo.

Possiamo ora enunciare il nostro risultato principale

TEOREMA 3.2. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, $f(s) > 0$ per ogni $s > 0$ e $|f(s)| \leq C|s|^q$ per s grandi, per qualche $q > 0$. Sia $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione (3.11) tale che*

$$index_{\mathcal{C}}(I - A, u_0) \neq 0.$$

Sia $r > 1$ *tale che* $\frac{r}{q} > \max\{1, \frac{N}{p}\}$. *Se* Ω_n *è una successione di domini che verifica le ipotesi del Teorema 3.1 con* Ω *sufficientemente regolare, esiste una soluzione* $u_n \in L^\infty(\Omega_n) \cap W_0^{1,p}(\Omega_n)$ *del problema in* Ω_n

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = f(u_n) & in\ \Omega_n \\ u_n \geq 0 & in\ \Omega_n \\ u_n = 0 & su\ \partial\Omega_n \end{cases} \tag{3.13}$$

tale che $u_n \to u_0$ *in* $W_0^{1,p}(B) \cap L^s(B)$ *per ogni* $1 < s < \infty$.

A prima vista l'ipotesi sull'indice dell'operatore $I - A$ sembrerebbe di difficile verifica. Comunque come vedremo nell'Appendice in realtà tale ipotesi si riduce a richiedere $index_{\mathcal{C}_\Omega}\left(I - \tilde{A}, u_0\right) \neq 0$. Quindi l'ipotesi richiesta è ricavabile direttamente a partire dalla soluzione u_0 in Ω.

Riportiamo il seguente Lemma che sarà utile per la dimostrazione:

LEMMA 3.3. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua e tale che* $|f(y)| \leq C|y|^q$ *per* $|y|$ *grande per qualche* $q > 0$. *Allora la mappa* $F : u(x) \to f(u(x))$ *è continua da* $L^s(\Omega) \to L^{\frac{s}{q}}(\Omega)$ *e manda limitati in limitati, se* $0 < q < s < \infty$.

Omettiamo la dimostrazione del Lemma che si può trovare per esempio in [**DF**].

Dimostrazione. La dimostrazione è un po' elaborata la dividiamo quindi in alcuni passi.

Passo 1 : Mostriamo che l'operatore $\tilde{A}_n$ è ben definito di $L^r(\Omega_n)$ in sé ed è precompatto. Intanto $\tilde{A}_n$ è continuo poiché f è continua di $L^r(\Omega_n)$ in $L^{\frac{r}{q}}$ e P_n è continuo di $L^{\frac{r}{q}}$ in L^∞, come si può ricavare dal Lemma 3.1.

Sia $v \in L^r(\Omega_n)$. Dal Lemma 3.3 $f(v) \in L^{\frac{r}{q}}(\Omega_n)$ e poiché $\frac{r}{q} > \max\{1, \frac{N}{p}\}$, applicando il Lemma 3.2, segue $w := \tilde{A}_n(v) = (-\Delta_p)^{-1}(f(v)) \in L^\infty(\Omega_n)$ e quindi anche $w \in L^r(\Omega_n)$. $\tilde{A}_n$ è ben definito di $L^r(\Omega_n)$ in sé. Osserviamo inoltre che quando applichiamo il Lemma 3.2 la stima L^∞ si può rendere indipendente da n.

Mostriamo che $\tilde{A}_n$ manda limitati in limitati. Sia V un insieme limitato in $L^r(\Omega_n)$. Dal Lemma 3.3 $f(V)$ è limitato in $L^{\frac{r}{q}}(\Omega_n)$. P_n è continuo di $L^{\frac{r}{q}}(\Omega_n)$ in $L^\infty(\Omega_n)$ e manda limitati in limitati dal Lemma 3.2, quindi $\tilde{A}_n(V)$ è limitato in $L^\infty(\Omega_n)$ e anche in $L^r(\Omega_n)$.

Osserviamo che da una limitazione in L^∞ si ricava anche una limitazione in $W_0^{1,p}$; infatti se $v \in V$ e $w := \tilde{A}_n(v)$, w verifica

$$\int_{\Omega_n} |\nabla w|^p = \int_{\Omega_n} f(v)w,$$

$$\int_{\Omega_n} |\nabla w|^p \leq \int_{|v|<C} f(v)w + C\int_{|v|>C} |v|^q w,$$

$$\int_{\Omega_n} |\nabla w|^p \leq M\|w\|_\infty |\Omega_n| + C(\|v\|_r)^q \|w\|_\infty |\Omega_n|^s,$$

dove s é l'esponenete coniugato di $\frac{r}{q}$ ed $M = \sup_{[0,C]} f(s)$. ($\frac{r}{q} > \max\{1, \frac{N}{p}\} \geq 1$ e $r > q$, $r > 1$).

Sia v_k una successione in V. Poniamo per notazione $w_k := \tilde{A}_n(v_k)$. Dal Lemma 3.3 $f(v_k)$ è limitato in $L^{\frac{r}{q}}$, e dal Lemma 3.2 si ha $\|w_k\|_\infty \leq C(N, p, \|f(v_k)\|_{\frac{r}{q}}, |B|, r)$. Comunque poiché $f(v_k)$ è limitato in $L^{\frac{r}{q}}$ si può ottenere una limitazione della norma L^∞ di w_k che sia uniforme in k, come fatto nella Proposizione 3.1. Ovvero $\|w_k\|_\infty \leq C(N, p, \sup_{v\in V} \|f(v)\|_{\frac{r}{q}}, |B|, r)$. Da questa limitazione uniforme in k si ottiene una limitazione (sempre uniforme in k) della norma $W_0^{1,p}(\Omega_n)$ di w_k, come fatto sopra. È possibile estrarre una sottosuccessione, che chiamiamo ancora w_k, tale che :

- $w_k \to w$ debole in $W_0^{1,p}(\Omega_n)$,
- $w_k \to w$ forte in $L^s(\Omega_n)$ almeno se s piccolo, $s > 1$,
- $w_k \to w$ quasi ovunque in Ω_n.

Come nella dimostrazione del caso lineare abbiamo anche che $\|w_k\|_\infty \leq C$ implica $\|w\|_\infty \leq C'$ e $w_k \to w$ forte in $L^s(\Omega_n)$ per ogni $1 < s < \infty$. Quindi $w_k \to w$ forte in $L^r(\Omega_n)$, $w \in \overline{\tilde{A}_n(V)}$, ed $\tilde{A}_n$ è precompatto di $L^r(\Omega_n)$ in sé.

Inoltre dal principio di massimo debole di [**Da**] e dal fatto che $f(v) \geq 0$ per $v \geq 0$ si ha che $P_n(f(v)) \geq 0$, quindi $\tilde{A}_n$ mappa $\mathcal{C}_{\Omega_n}$ in sé ed è precompatto.

Passo 2 : Mostriamo che anche A_n è precompatto.

Intanto A_n è continuo e ben definito e manda limitati in limitati. Se V è limitato in $L^r(B)$; $A_n(V)$ è limitato in $L^r(B)$. Infatti $r_n(V)$ è limitato in $L^r(\Omega_n)$, $\tilde{A}_n(r_n(V))$ è limitato in $L^r(\Omega_n)$ e la sua inclusione in $L^r(B)$ rimane limitata.

Inoltre osserviamo che $\tilde{A}_n(r_n(V))$ è limitato in $L^\infty(\Omega_n) \cap W_0^{1,p}(\Omega_n)$ e quindi $A_n(V)$ è limitato in $L^\infty(B) \cap W_0^{1,p}(B)$.

Sia v_k una successione in V e $w_k := A_n(v_k)$. w_k è limitata in $W_0^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$ uniformemente in k, quindi esiste una sottosuccessione w_k che converge debolmente a w in $W_0^{1,p}(B)$ e forte in $L^s(B)$ se s piccolo.

$$\|w_k\|_\infty = supess_{x\in B}|w_k(x)| = supess_B|i_n\left(\tilde{A}_n r_n(v_k)\right)| =$$

$$supess_{\Omega_n}|\tilde{A}_n r_n(v_k)| \leq C$$

poiché $r_n(v_k)$ è limitato in $L^r(\Omega_n)$. Allora anche $\|w\|_\infty \leq C$ e $w_k \to w$ forte in $L^s(B)$ per ogni $1 < s < \infty$. Quindi A_n è precompatto di $L^r(B)$ in sé.

Dal principio di massimo debole anche A_n mappa $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}$ ed è precompatto, quindi è ben definito il grado nel convesso $\mathcal{C}$.

Osserviamo inoltre che A_n ha codominio in $W_0^{1,p}(\Omega_n)$, quindi i suoi punti fissi stanno in $W_0^{1,p}(\Omega_n)$. Per questo $deg_{\mathcal{C}}(I - A_n, 0, V \cap L^r(B)) = deg_{\mathcal{C}_{\Omega_n}}\left(I - \tilde{A}_n, 0, V \cap L^r(\Omega_n)\right)$. Per una spiegazione un po' più dettagliata di quest ultimo passaggio vedi Appendice.

Passo 3 : Sia ora V un intorno di u_0 in $L^r(B) \cap \mathcal{C}$ in cui non ci siano soluzioni dell'equazione (3.11) diverse dalla u_0. Un tale intorno si può prendere in virtù dell'ipotesi sull'indice. In particolare prendiamo V in modo che non ci siano altre soluzioni su $\overline{V}$. Cerchiamo soluzioni dell'equazione (3.13) come punti fissi dell'operatore A_n, ovvero $u_n = A_n(u_n)$. Poiché A_n ha codominio in $W_0^{1,p}(\Omega_n)$, $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n)$ e risolvono l'equazione per costruzione.

Sia $H(t,v) = tA_n(v) + (1-t)A(v)$ per $0 \leq t \leq 1$. $H(-,v)$ è uniformemente continuo in t e per t fissato ogni $H(t,-)$ è precompatto (perché somma di due precompatti); siamo quindi nelle ipotesi per applicare l'invarianza per omotopia del grado nei convessi vedi [**AD**] e

$$deg_{\mathcal{C}}\left((I - A_n)_{|\mathcal{C}}, 0, V\right) = deg_{\mathcal{C}}\left((I - A)_{|\mathcal{C}}, 0, V\right)$$

se non ci sono soluzioni sulla frontiera , ovvero se

$$u \neq tA_n(u) + (1-t)A(u)$$

per $u \in \partial_{\mathcal{C}} V$, $0 \leq t \leq 1$. Poiché per ipotesi

$$deg_{\mathcal{C}}\left((I - A)_{|\mathcal{C}}, 0, V\right) = index_{\mathcal{C}}\left((I - A)_{|\mathcal{C}}, u_0\right) \neq 0$$

allora anche $deg_{\mathcal{C}}\left((I-A_n)_{|\mathcal{C}},0,V\right)\neq 0$ e questo implica l'esistenza di soluzioni per l'equazione (3.13) in V.

Supponiamo per assurdo che esistano $\tilde{u}_n\in\partial_{\mathcal{C}}W$ e $0\leq t_n\leq 1$ tali che

$$\tilde{u}_n = t_n A_n(\tilde{u}_n) + (1-t_n)\,A(\tilde{u}_n)$$

per ogni $n>n_0$. V è limitato in $L^r\,(B)$ quindi anche $\partial_{\mathcal{C}}V$ è limitato. $A_n(\tilde{u}_n)$ e $A(\tilde{u}_n)$ sono limitati in $L^\infty\,(B)\cap W_0^{1,p}\,(B)$ uniformemente in n, allora $\tilde{u}_n$ stessa è limitata in $L^\infty\,(B)\cap W_0^{1,p}\,(B)$, quindi da $\tilde{u}_n$ possiamo estrarre una sottosuccessione convergente a $z\in W_0^{1,p}(B)$ debole in $W_0^{1,p}\,(B)$ più forte in $L^s\,(B)$ per $s>1$ piccolo. Dalla limitazione delle $\tilde{u}_n$ in norma L^∞ troviamo anche una limitazione di z in norma L^∞ e quindi la convergenza forte di $\tilde{u}_n$ a z in L^s per ogni $1<s<\infty$. Inoltre $z\in\partial_{\mathcal{C}}V$ poiché ci stanno le $\tilde{u}_n$ per ogni n e $\partial_{\mathcal{C}}V$ è chiuso. $\tilde{u}_n\in W_0^{1,p}(\Omega_n)$ sono nulle fuori Ω_n quindi $z=0$ quasi ovunque fuori $\overline{\Omega}\cup E$ e poiché Ω è sufficientemente regolare $z\in W_0^{1,p}\,(\Omega)$. A è continuo di $L^r\,(B)$ in $L^s\,(B)\cap W_0^{1,p}\,(B)$ con $1<s<\infty$, quindi

$$A(\tilde{u}_n)\to A(z)$$

forte in $L^s\,(B)\cap W_0^{1,p}\,(B)$, inoltre

$$A_n(\tilde{u}_n)\to A(z)$$

forte in $L^s\,(B)\cap W_0^{1,p}\,(B)$ dalla Proposizione 3.1. Avremmo allora $z=A(z)$, quindi $z_{|\Omega}$ risolve l'equazione (3.11) e $z\in\partial_{\mathcal{C}}V$, $z\in W_0^{1,p}\,(\Omega)$, $z\neq u_0$, contro l'ipotesi che non ci fossero altre soluzioni in $\overline{V}$.

Abbiamo provato l'esistenza delle $u_n\in L^r\,(B)$ tali che $u_n=A_n(u_n)$. Come detto in precedenza $u_n\in W_0^{1,p}(\Omega_n)$ e sono quindi le soluzioni dell'equazione in Ω_n cercate.

Passo 4 : Abbiamo mostrato l'esistenza delle u_n; mostriamo ora che esse convergono alla u_0. Le u_n verificano $-\Delta_p u_n = f(u_n)$, inoltre $\|u_n\|_r\leq C$ poiché stanno in V, quindi $\|f(u_n)\|_{\frac{r}{q}}\leq C$ dal Lemma 3.3 e ancora $\|u_n\|_\infty\leq C$, $\|u_n\|_{W_0^{1,p}}\leq C$. Anche in questo caso questa stima si può rendere uniforme in n. A meno di una sottosuccesione $u_n\to u$ debole in $W_0^{1,p}\,(B)$ e forte in L^s per s piccolo. Come in precedenza dalla limitazione in norma L^∞, segue la convergenza forte in L^s per ogni $1<s<\infty$. Inoltre u_n tende ad u quasi ovunque in B. Poiché f è continua dalla limitatezza delle u_n, $f(u_n)\to f(u)$ quasi ovunque in B e per convergenza dominata $f(u_n)\to f(u)$ in L^r. Dalla regolarità di Ω inoltre $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, poi si può ripetere il passo 3 del Teorema 3.1 e ottenere che u è soluzione del problema in Ω e per l'unicità della soluzione in V $u = u_0$. Con un analogo del passo 4 in Teorema 3.1, sfruttando la convergenza di $f(u_n)$ a $f(u)$ in L^r otteniamo la convergenza forte di u_n a u_0 in $W_0^{1,p}(B)$, vedi Proposizione 3.1. $\square$

Osservazione 3.3. Osserviamo che tutto si può applicare anche supponendo che il grado di una soluzione isolata sia diverso da zero (non è necessario che sia l'indice). È importante però che la soluzione sia isolata per poter scegliere l'intorno V come nella dimostrazione del Teorema. Inoltre l'esistenza delle soluzioni in Ω_n si ottiene anche considerando il grado in L^r e non in $\mathcal{C}$, ma potrebbero essere soluzioni che cambiano segno anche partendo da una soluzione u_0 positiva in Ω. In questo caso si può anche eliminare l'ipotesi sulla positività della f.

Osservazione 3.4. L'ipotesi $f \geq 0$ si può indebolire facendo un'ipotesi del tipo $f(y) + C|y|^{p-2}y \geq 0$ in $[0, \|u\|_\infty + 1]$, per qualche costante $C > 0$. Si definisce poi l'operatore $P_n = (-\Delta_p + C'L)^{-1}$ dove $L(u) = |u|^{p-2}u$ e $\tilde{A}_n = P_n \circ \tilde{f}$ dove $\tilde{f}(s) = f(s) + C'|s|^{p-2}s$ e $C' \geq C > 0$ è tale che $\tilde{f}(s) \geq 0$ in $[0, \infty)$. A_n si definisce come in precedenza a partire da $\tilde{A}_n$. Si cercano punti fissi per l'operatore A_n in $L^r(B) \cap \mathcal{C}$ e si ottengono soluzioni dell'equazione (3.13) in Ω_n.

Osserviamo che, tramite un'omotopia del grado, si ha infatti che il grado dell'operatore $I - A$, con la nuova definizione, non dipende dalla costante C e possiamo quindi ripetere il Teorema 3.2.

Vogliamo ora applicare il Teorema 3.2 ad un caso particolare, $f(s) = s^q$ per qualche esponente q opportuno se Ω è unione di due palle disgiunte di raggio unitario. In particolare dobbiamo trovare delle soluzioni non negative che verifichino l'ipotesi sull'indice nel convesso richieste dal Teorema. La verifica di questa ipotesi non è immediata, come nel caso del Laplaciano, perché, per $p \neq 2$, l'operatore $-\Delta_p$ non è derivabile e non si può quindi usare l'operatore linearizzato per calcolare l'indice. Le nostre conoscenze sull'indice nei convessi si fermano infatti al caso di operatori derivabili, vedi [**AD**] e altri. Per superare questa difficoltà abbiamo usato un'idea di Del Pino, Elgueta, Manasevich che, in [**DEM**], sfruttano un'omotopia su p e dimostrano che il grado di Leray-Schauder della soluzione banale dell'equazione $-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{p-2}u$ con le condizioni $u(0) = u(T) = 0$ con $\lambda \neq \lambda_n$, dove i λ_n sono gli autovalori dello stesso operatore con condizione di Dirichlet, è dato da $deg(T_p, 0, B(0,r)) = (-1)^\beta$ per ogni $r > 0$, dove β è il numero degli autovalori λ_n minori di λ, e con $B(0,r)$ si intende qui la palla di raggio r centrata nell'origine dello spazio $C^0[0,T]$. Gli autori applicano un'invarianza per omotopia del grado, nel caso $N = 1$, e per fare ciò necessitano della esplicita conoscenza degli autovalori λ_n. Nel nostro caso il problema analogo sarà quello di trovare delle stime a priori in norma L^r delle soluzioni non negative, per poter applicare l'invarianza per omotopia.

Iniziamo la trattazione del problema specifico proprio con l'omotopia su p, per vedere in quali casi otteniamo l'ipotesi sull'indice richiesta dal Teorema 3.2. Osserviamo in particolare che il metodo utilizzato per trovare le stime uniformi in norma L^r, e quindi poter effettuare tale omotopia, produce dei grossi limiti nella scelta dell'esponente q che compare nell'equazione (3.14) e che rendono validi i risultati solo per $N = 3$. Siamo comunque convinti che queste limitazioni siano dovute esclusivamente al metodo e che possono essere superate dalla conoscenza di stime a priori in norma $C^{1,\alpha}$ delle soluzioni, vedi [**diBe**], che siano uniformemente limitate per $p > 1$ in un compatto opportuno. Questo fornirebbe la validità di un risultato di molteplicità per ogni $1 < p < N$, $p - 1 < q < \frac{Np}{N-p} - 1$ e $N \geq 3$. Il caso $N = 2$ non riusciamo a trattarlo usando l'omotopia perché per usare le buone proprietà del Laplaciano dobbiamo arrivare necessariamente fino a $p = 2$ e le stime a priori in norma L^∞ non sono uniformemente limitate nel passaggio da $p < N$ a $p = N$.

Iniziamo quindi a trattare l'omotopia su p per poter poi applicare il Teorema 3.2 e ottenere la molteplicità delle soluzioni in domini particolari come in [**D1**].

3.4. Omotopia su p

Sia $N \geq 3$. Sia $p \in \left(\frac{2N}{N+2}, 2\right)$ e sia $q \in \left(1, \frac{Np}{N-p} - 1\right]$ se $1 < p < 2$, oppure $p \in \left(2, \min\{N, \frac{2N}{N-2}\}\right)$ e $q \in \left(p-1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ se $2 < p < N$.

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^q & \text{in } B \\ u \geq 0 & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } \partial B \end{cases} \tag{3.14}$$

dove $B \subset \mathbb{R}^N$ è una palla di raggio unitario che per comodità consideriamo centrata nell'origine. Poniamo per notazione $p_1 = \inf\{2, p\}$ e $p_2 = \sup\{2, p\}$. Osserviamo che per come abbiamo scelto l'esponente q abbiamo $p_2 - 1 < q < p_1^* - 1$, dove con $p^* = \frac{Np}{N-p}$ indichiamo l'esponente critico per l'immersione di Sobolev. Osserviamo anche che per come abbiamo preso p un tale valore di q esiste sempre. Vogliamo fare un'omotopia su p, nel compatto $[p_1, p_2]$, in modo da calcolare il grado di una soluzione noto il grado della soluzione corrispondente per $p = 2$.

Intanto da [**Br**] (Lemma 2) la soluzione positiva del problema (3.14) che indichiamo con u_p è radiale e $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ se $x \in B \setminus \{0\}$ dove 0 è il centro della palla e $r = |x - 0|$. Da [**AY**] la soluzione radiale positiva è unica. Quindi in B abbiamo solo due soluzioni non negative che sono 0 e $u_p > 0$ per ogni $p > 1$. Vogliamo calcolare il grado di tali soluzioni utilizzando un'omotopia su p.

Sia $r > 1$ tale che $\frac{r}{q} > \frac{N}{p_1}$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} H(p, v)\ &: [p_1, p_2] \times L^r(B) \cap \mathcal{C} \longrightarrow L^r(B) \cap \mathcal{C} \\ &\quad (p, v) \qquad \longmapsto \qquad w \end{aligned}$$

dove w è l'unica soluzione di $-\Delta_p w = v^q$ in B con condizione di Dirichlet al bordo. Dall'ipotesi su r e dal Lemma 3.1 abbiamo che $w \in L^\infty(B)$, inoltre dal principio del massimo $w \geq 0$, quindi $H(p, v)$ è ben definito di $\mathcal{C} \subset L^r$ in sé. Mostriamo che $H(p, v)$ è completamente continuo. Iniziamo a verificarne la continuità.

Consideriamo una successione $p_k \to p$ in $[p_1, p_2]$, e $v_k \to v$ in $L^r(B)$. Siano $w_k = H(p_k, v_k)$. w_k verificano $-\Delta_{p_k} w_k = v_k^q$ in B, $w_k = 0$ su ∂B. Abbiamo $v_k^q \in L^{\frac{r}{q}}(B)$ e $\frac{r}{q} > \frac{N}{p}$, quindi applicando il Lemma 3.1 otteniamo $\| w_k\|_\infty \leq C$ dove $C = C(N, p_k, \|v_k^q\|_{\frac{r}{q}}, |B|, r) = 2^{\frac{\beta_k}{\beta_k - 1}} \frac{\|v_k^q\|_{\frac{r}{q}}^{\frac{1}{p_k - 1}}}{S_k^{\frac{p_k}{p_k - 1}}} |B|^{\gamma_k}$, con $\beta_k = \frac{1}{p_k - 1}\left(\frac{Np_k}{N - p_k} - 1 - \frac{Np_k}{N - p_k}\frac{q}{r}\right) > 1$ e $\gamma_k = \frac{1}{p_k^*}(\beta_k - 1) > 0$. Ora $\|v_k^q\|_{\frac{r}{q}} = \|v_k\|_r^q \leq (\|v\|_r + 1)^q \leq C(q)$. Per il resto le funzioni $\frac{\beta_k}{\beta_k - 1}$, $\frac{1}{p_k - 1}$, $\frac{p_k}{p_k - 1}$, γ_k sono continue in p nel compatto $[p_1, p_2]$ e sono quindi uniformemente limitate. Osserviamo anche che la costante $S_k = S(p_k, N)$ è continua in p per $1 < p < N$ e quindi uniformemente limitata. Per $p < N$ è inoltre strettamente positiva.

La costante $C = C(N, p_k, \|v_k^q\|_{\frac{r}{q}}, |B|, r) \leq 2^{\frac{\beta_k}{\beta_k - 1}} \frac{C(q)^{\frac{1}{p_k-1}}}{S^{\frac{p_k}{p_k-1}}} |B|^{\gamma_k}$ è una funzione continua di p_k ed è quindi limitata sul compatto $[p_1, p_2]$. Otteniamo così una stima del tipo $\|w_k\|_\infty \leq C(N, q, r, |B|)$, che non dipende da p. Osserviamo inoltre che tale costante si può rendere uniforme in q su un compatto, ma al momento non ci interessa.

Da una limitazione in norma $L^\infty(B)$ otteniamo anche una limitazione in norma $W_0^{1,p_k}(B)$, infatti dall'equazione $-\Delta_p w_k = v_k^q$ abbiamo

$$\int_B |\nabla w_k|^{p_k} = \int_B v_k^q w_k \leq \|w_k\|_\infty \left(\int_B v_k^r \right)^{\frac{q}{r}} |B|^{\frac{r-q}{r}} \leq \|w_k\|_\infty \|v_k\|_r^q |B|^{\frac{r-q}{r}} \leq$$
$$\leq C(N, q, r, B).$$

Inoltre $W_0^{1,p_k}(B) \subset W_0^{1,p_1}(B)$ per ogni k, quindi $w_k \in W_0^{1,p_1}(B)$ e

$$\| w_k\|_{1,p_1}^{p_1} = \int_B |\nabla w_k|^{p_1} \leq \left(\int_B |\nabla w_k|^{p_k} \right)^{\frac{p_1}{p_k}} |B|^{\frac{p_k - p_1}{p_k}} \leq \|w_k\|_{1,p_k}^{p_1} \omega_N^{\frac{p_k-p_1}{p_k}} \leq C(N, q, r, \omega_N).$$

La funzione $\omega_N^{\frac{p_k-p_1}{p_k}}$ è anch'essa continua sul compatto $[p_1, p_2]$ ed è quindi limitata. Ricordo che ω_N è la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^N$.

Da w_k estraggo una sottosuccessione $w_k \to z$ debole in $W_0^{1,p_1}(B)$ e forte in $L^s(B)$ almeno per $s < p_1^*$. Inoltre $w_k \to z$ e $\nabla w_k \to \nabla z$ quasi ovunque in B.
Dalla limitazione in norma L^∞ delle w_k otteniamo una limitazione in norma L^∞ della z, come nel Teorema 3.1, passo 1, e anche la convergenza di w_k a z in $L^s(B)$ per ogni $1 < s < \infty$. Sia $\varphi \in C_0^\infty(B)$, la usiamo come funzione test nell'equazione per le w_k;

$$\int_B |\nabla w_k|^{p_k - 2} \nabla w_k \cdot \nabla \varphi = \int_B v_k^q \varphi.$$

Inoltre, sempre sul compatto $[p_1, p_2]$

$$\int_B |\nabla w_k|^{p_k-2} \nabla w_k \cdot \nabla \varphi \leq \int_B |\nabla w_k|^{p_k-1} |\nabla \varphi| \leq \|\nabla \varphi\|_\infty \left(\int_B |\nabla w_k|^{p_k} \right)^{\frac{p_k-1}{p_k}} \omega_N^{1-\frac{1}{p_k}} \leq$$
$$\leq C(N, q, r, \varphi),$$

$$\int_B v_k^q \varphi \leq \|\varphi\|_\infty \left(\int_B v_k^r \right)^{\frac{q}{r}} \omega_N^{1-\frac{q}{r}} \leq C(N, q, r, \varphi).$$

Passiamo a limite sotto il segno di integrale, per convergenza dominata, e otteniamo

$$\int_B |\nabla z|^{p-2}\nabla z \cdot \nabla\varphi = \int_B v^q \varphi$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Inoltre poiché

$$\| w_k\|_{1,p_k} = \left(\int_B |\nabla w_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} \leq C(N, q, B, r),$$

anche in questa relazione possiamo passare a limite per convergenza dominata e avere

$$\| z\|_{1,p} = \left(\int_B |\nabla z|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C(N, q, B, r)$$

da cui otteniamo $z \in W_0^{1,p}(B)$. z è soluzione debole di $-\Delta_p z = v^q$ in B, $z = 0$ su ∂B, quindi $z = H(p, v)$ e $w_k = H(p_k, v_k) \to H(p, v) = z$ in $L^r(B)$. Abbiamo così la continuità dell'operatore H.

Mostriamo ora che $H(p, v)$ manda limitati in limitati. Sia $A \times W$ un limitato di $[p_1, p_2] \times L^r(B) \cap \mathcal{C}$, quindi $\| v\|_r \leq C$ per ogni $v \in W$, $\| v^q\|_{\frac{r}{q}} = \| v\|_r^q \leq C(q)$ per ogni $v \in W$. Inoltre dal Lemma 3.1 se p fissato $\| w\|_\infty \leq C\left(N, p, \|v^q\|_{\frac{r}{q}}, |B|, r\right) = 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \frac{\|v\|_{\frac{r}{q}}^{\frac{1}{p-1}}}{S^{\frac{p}{p-1}}}|B|^\gamma \leq 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \frac{C(q)^{\frac{1}{p-1}}}{S^{\frac{p}{p-1}}}|B|^\gamma$. Consideriamo la funzione $f(p) = 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \frac{C(q)^{\frac{1}{p-1}}}{S^{\frac{p}{p-1}}}|B|^\gamma$ con $\beta = \frac{1}{p-1}\left(\frac{N+p}{N-p} - 1 - \frac{N+p}{N-p}\frac{q}{r}\right)$ e $\gamma = \frac{1}{p^*}(\beta - 1)$; f è una funzione continua di p quindi nel compatto $[p_1, p_2]$ ha massimo e minimo. Come prima otteniamo $\|w\|_\infty \leq C(N, q, r, B)$. Una limitazione in norma L^∞ implica anche una limitazione in norma $L^r(B)$, quindi $H(p, v)$ manda limitati in limitati.

Sia (p_k, v_k) una successione in $A \times W$, da p_k possiamo estrarre una sottosuccessione che converge a p e da v_k possiamo estarre una sottosuccessione che converge a v debolmente in $L^r(B)$, inoltre $\| v_k\|_r \leq C$. Ora sia $w_k = H(p_k, v_k)$. Come nella dimostrazione della continuità di $H(p, v)$, otteniamo $\| w_k\|_\infty \leq C(N, q, r, B)$ e anche $\| w_k\|_{1,p_k} \leq C(N, q, r, B)$ e infine $\| w_k\|_{1,p_1} \leq C(N, q, r, B)$. Da w_k estraiamo una sottosuccesione che converge a z debolmente in $W_0^{1,p_1}(B)$ e forte in L^s se s piccolo, inoltre poiché $\| w_k\|_\infty \leq C$ allora $\| z\|_\infty \leq C$ e w_k tende a z forte in L^s per ogni s. Inoltre $\nabla w_k \to \nabla z$ quasi ovunque in B e poiché $\| w_k\|_{1,p_k} \leq C$ si può passare a limite dentro l'integrale per convergenza dominata e $\| w_k\|_{1,p_k} \to \|z\|_{1,p} \leq C$ così che $z \in W_0^{1,p}(B)$. Inoltre w_k risolve in senso debole l'equazione $-\Delta_p w_k = v_k^q$. Sia $\psi \in C_0^\infty$, abbiamo $\int v_k^q\psi \to \int_B v^q\psi$ poiché v converge debole in L^r allora v^q converge debole in $L^{\frac{r}{q}}$ e ψ sta nel duale di $L^{\frac{r}{q}}$ poiché sta in C_0^∞. Ancora $\int_B |\nabla w_k|^{p_k-2}\nabla w_k \cdot \nabla\psi \leq \|\nabla\psi\|_\infty \| w_k\|_{1,p_k}^{p_k-1}\omega_N^{1-\frac{1}{p_k}}$. Possiamo passare a limite dentro gli integrali per convergenza dominata e abbiamo che

$$\int_B |\nabla z|^{p-2}\nabla z \cdot \nabla\psi = \int_B v^q\psi$$

per ogni $\psi \in C_0^\infty(B)$, ovvero $z = H(p,v)$ e poiché $(p,v) \in \overline{A \times W}$, $H(p,v)$ è precompatto.

Possiamo applicare l'invarianza per omotopia del grado su p se troviamo

1) un intorno W_0 di 0 in $L^r(B)$ tale che $H(p,v) \neq v$ per ogni $v \in \partial W_0$ per ogni $p \in [p_1,p_2]$, cioè un intorno dello zero in cui non ci sono altre soluzioni u_p oltre a quella nulla per ogni $p \in [p_1,p_2]$.

2) un intorno W in L^r della soluzione u_2 (soluzione positiva per $p=2$) tale che $H(p,v) \neq v$ per ogni $v \in \partial W$ per ogni $p \in [p_1,p_2]$.

Quindi per provare 1) serve sapere che per ogni $p \in [p_1,p_2]$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\| u_p\|_r \geq \varepsilon$ se u_p è la soluzione positiva del problema (3.14). Dato 1) per avere 2) è sufficiente una stima superiore della norma L^r, $\| u_p\|_r \leq C$.

1) Se per assurdo non esiste $\varepsilon >$ così fatto preso $\varepsilon = \frac{1}{k}$ possiamo trovare una successione $p_k \in [p_1,p_2]$ ed una successione $u_k \in L^r(B)$, tale che $\| u_k\|_r \leq \frac{1}{k}$ ovvero $u_k \to 0$ forte in L^r e quasi ovunque in B. Inoltre u_k verificano $-\Delta_{p_k}u_k = u_k^q$ in B, $u_k > 0$ in B, e $u_k = 0$ su ∂B. Sia ora $\tilde{u}_k = \frac{u_k}{\| u_k\|_r}$ allora $\| \tilde{u}_k\|_r = 1$ per ogni k e $\tilde{u}_k$ verifica $-\Delta_{p_k}\tilde{u}_k = \frac{1}{\| u_k\|_r^{p_k-1}}(-\Delta_{p_k}u_k) = \frac{1}{\| u_k\|_r^{p_k-1}}u_k^q = \frac{\|u_k\|_r^q}{\|u_k\|_r^{p_k-1}}\tilde{u}_k^q = \|u_k\|_r^{q-(p_k-1)}\tilde{u}_n^q$. Poiché $q > p_2-1$, anche $q > p_k-1$ per ogni k. $\tilde{u}_k$ verifica

$$\begin{cases} -\Delta_{p_k}\tilde{u}_k = \| u_k\|_r^{q-(p_k-1)}\tilde{u}_k^q & \text{in } B \\ \tilde{u}_k > 0 & \text{in } B \\ \tilde{u}_k = 0 & \text{su } \partial B \end{cases}$$

$\| \tilde{u}_k\|_r = 1$, $\| \tilde{u}_k^q\|_{\frac{r}{q}} = 1$, $\| u_k\|_r^{q-(p_k-1)} \leq C$ quindi il secondo membro è limitato in norma $L^{\frac{r}{q}}(B)$ e dal Lemma 3.2, come in precedenza, otteniamo $\| \tilde{u}_k\|_\infty \leq C(N,r,q,B)$.

Allora anche $\| \tilde{u}_k\|_{1,p_k} \leq C(N,r,q,B)$ e $\| \tilde{u}_k\|_{1,p_1} \leq C(N,r,q,B)$. A meno di una sottosuccessione $\tilde{u}_k \to z$ debole in $W_0^{1,p_1}(B)$ e $\nabla\tilde{u}_k \to \nabla z$ quasi ovunque in B. $\| \tilde{u}_k\|_{1,p_k} \to \| z\|_{1,p} \leq C$ così che $z \in W_0^{1,p}(B)$. Inoltre $\int_B |\nabla\tilde{u}_k|^{p_k-2}\nabla\tilde{u}_k \cdot \nabla\psi \leq C(N,r,q,\psi)$ e $\| u_k\|^{q-(p_k-1)} \int_B \tilde{u}_k^q\psi \leq \| u_k\|_r^{q-(p_k-1)}\| \tilde{u}_k\|_r^{\frac{q}{r}}\|\psi\|_\infty\omega_N^{1-\frac{q}{r}} \leq C(N,r,q,\psi)$. Possiamo passare a limite per convergenza dominata quindi e $\int_B |\nabla\tilde{u}_k|^{p_k-2}\nabla\tilde{u}_k \cdot \nabla\psi \to \int_B |\nabla z|^{p-2}\nabla z \cdot \nabla\psi$ e $\int_B \tilde{u}_k^q\psi \to \int_B z^q\psi$ e $\| u_k\|_r^{q-(p-1)} \to 0$. Quindi $z \in W_0^{1,p}(B)$ verifica in senso debole

$$\begin{cases} -\Delta_p z = 0 & \text{in } B \\ z \geq 0 & \text{in } B \\ z = 0 & \text{su } \partial B \end{cases}$$

e l'unica soluzione è $z = 0$ assurdo perché avevamo $\| z\|_r = 1$.

2) Consideriamo ora il funzionale $F(u,p) = \dfrac{\int_B |\nabla u|^p}{\left(\int_B |u|^{q+1}\right)^{\frac{p}{q+1}}}$. Sia $C_p = \inf\{F(u,p) : u \in W_0^{1,p}(B)\,,\, u \neq 0\}$. Tale estremo inferiore è sempre assunto per ogni $p \in [p_1, p_2]$ poiché l'esponente q è sottocritico per tutti tali valori di p. Sia $u_p \in W_0^{1,p}(B)$ la funzione che lo minimizza. u_p è anche l'unica soluzione positiva del problema (3.14). Osserviamo che per $u \in C_0^\infty(B)$ fissato il funzionale $F(u,p)$ è continuo in p.

Sia $u_{k,p} \in C_0^\infty(B)$ tale che $u_{k,p} \to u_p$ in $W_0^{1,p}(B)$, allora $\|u_{k,p}\|_{1,p} \to \|u_p\|_{1,p}$ e $\|u_{k,p}\|_{q+1} \to \|u_p\|_{q+1}$ perché $q+1 < p^*$ per ogni $p \in [p_1,p_2]$. Inoltre $\|u_{k,p}\|_{q+1} > c > 0$, allora $F(u_{k,p},p) \to F(u_p,p)$ ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k_0 > 0$ tale che per ogni $k > k_0$

$$-\varepsilon < \frac{\int_B |\nabla u_{k,p}|^p}{\left(\int_B |u_{k,p}|^{q+1}\right)^{\frac{p}{q+1}}} - \frac{\int_B |\nabla u_p|^p}{\left(\int_B |u_p|^{q+1}\right)^{\frac{p}{q+1}}} < \varepsilon.$$

Inoltre per $u_{k,p} \in C_0^\infty(B)$ fissato abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$-\varepsilon < \frac{\int_B |\nabla u_{k,p}|^p}{\left(\int_B |u_{k,p}|^{q+1}\right)^{\frac{p}{q+1}}} - \frac{\int_B |\nabla u_{k,p}|^{\bar{p}}}{\left(\int_B |u_{k,p}|^{q+1}\right)^{\frac{\bar{p}}{q+1}}} < \varepsilon$$

se $|p-\bar{p}| < \delta$. Sia quindi $\varepsilon > 0$, sia $k > k_0$ abbiamo

$$C_{\bar{p}} < \frac{\int_B |\nabla u_{k,p}|^{\bar{p}}}{\left(\int_B |u_{k,p}|^{q+1}\right)^{\frac{\bar{p}}{q+1}}} < \frac{\int_B |\nabla u_{k,p}|^p}{\left(\int_B |u_{k,p}|^{q+1}\right)^{\frac{p}{q+1}}} + \varepsilon < C_p + \varepsilon + \varepsilon.$$

Così $C_{\bar{p}} < C_p + 2\varepsilon$ se $|p-\bar{p}| < \delta$. Scambiando i ruoli di p e $\bar{p}$ otteniamo la diseguaglianza opposta e quindi la continuità di C_p rispetto a p.

In particolare nel compatto $[p_1, p_2]$ i C_p sono uniformemente limitati. Inoltre

$$\frac{\int_B |\nabla u_p|^p}{\left(\int_B |u_p|^{q+1}\right)^{\frac{p}{q+1}}} = C_p$$

$$\int_B |\nabla u_p|^p = \int_B u_p^{q+1}$$

da cui si ottiene

$$\frac{\int_B u_p^{q+1}}{\left(\int_B u_p^{q+1}\right)^{\frac{p}{q+1}}} = C_p$$

e quindi

$$\left(\int_B u_p^{q+1}\right)^{\frac{q-(p-1)}{q+1}} = C_p \leq C$$

uniformemente in p. Questo mi fornisce una stima dall'alto della norma di u in $L^r(B)$ se $r \leq q+1$.

Quest'ultima restrizione, fornisce un limite ulteriore nella scelte di p, in particolare limita la dimensione N a cui tale omotopia si può applicare. Devono infatti essere verificate contemporaneamente le due relazioni

$$\begin{cases} r \leq q+1 \\ \dfrac{r}{q} > \dfrac{N}{p_1}. \end{cases}$$

Per $1 < p < 2$ allora questo implica $q+1 \geq r > \frac{N}{p}q$, da cui $q < \frac{p}{N-p}$. Inoltre doveva anche essere verificata la relazione $q > 1$ e ciò porta alla limitazione $1 < q < \frac{p}{N-p}$ verificata solo se $p > \frac{N}{2}$. Poiché $1 < p < 2$ inoltre l'unico caso possibile è $N = 3$ e $p \in \left(\frac{3}{2}, 2\right]$, $1 < q < \frac{p}{3-p}$.

Per $p > 2$ invece $q+1 \geq r > \frac{N}{2}q$, e $q < \frac{2}{N-2}$. Inoltre deve essere verificata anche la relazione $q > p-1$, quindi $\frac{2}{N-2} > p-1$, ovvero $p < \frac{N}{N-2}$. Ma $\frac{N}{N-2} > 2$ solo se $N < 4$. Anche in questo caso l'omotopia è possibile solo per $N = 3$, $p \in [2, 3)$ e $p-1 < q < 2$.

Purtroppo queste limitazioni derivano dal metodo usato e non sono insite nel problema, possono molto probabilmente essere eliminate utilizzando una stima della norma di u_p in L^∞ che sia uniforme in p almeno nel compatto $[p_1, p_2]$.

A questo punto possiamo applicare l'omotopia sul grado delle soluzioni nel cono $\mathcal{C} \subset L^r(B)$ per r sufficientemente grande e otteniamo

$$\deg_{\mathcal{C}}\left(I - \tilde{A}, 0, W_0\right) = \deg_{\mathcal{C}}\left(I - \Delta^{-1} \circ f, 0, W_0\right) = 1 \neq 0,$$

$$\deg_{\mathcal{C}}\left(I-\tilde{A},u_p,W\right)=\deg_{\mathcal{C}}\left(I-\Delta^{-1}\circ f,u_2,W\right)\neq 0.$$

3.5. Molteplicità di soluzioni per un problema ellitico degenere in domini non convessi

Consideriamo il problema (3.14) in $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ con $N=3$, $1<q<\frac{p}{3-p}$ se $p\in\left(\frac{3}{2},2\right]$ oppure $p-1<q<2$ se $p\in[2,3)$. Vogliamo provare la molteplicità delle soluzioni in alcuni domini non convessi.

Sia $\Omega=B_1\cup B_2$ unione di due palle disgiunte di raggio unitario. Ω verifica le ipotesi di regolarità del Teorema 3.2. Siano Ω_n una successione di domini che approssima Ω dall'esterno ottenuti unendo due palle con un sottile tubicino e regolarizzando. Per questi domini Ω_n proviamo la molteplicità delle soluzioni non negative.

Ω non è connesso; quindi una soluzione debole dell'equazione (3.14) è data da una coppia di soluzioni u_i nelle singole palle B_i. Dall'unicità della soluzione positiva per il problema (3.14) nella palla , vedi [**Br**] e [**AY**], abbiamo esattamente 4 soluzioni non negative in Ω

$$(0,0)\quad(u_1,0)\quad(0,u_2)\quad(u_1,u_2),\tag{3.18}$$

dove u_i è l'unica soluzione positiva nella palla B_i ed è radiale rispetto al centro della palla, vedi [**Br**]. Per poter applicare il Teorema 3.2 bisogna verificare l'ipotesi sull'indice. Vogliamo applicare tale Teorema ad ognuna delle soluzioni precedenti in modo da trovare almeno 4 soluzioni distinte non negative in Ω_n.

Come abbiamo detto alla fine del passo 2 del Teorema 3.2, $deg_{\mathcal{C}}\left(I-A,0,W\right)=deg_{\mathcal{C}_\Omega}\left(I-\tilde{A},0,W\right)$, quindi basta calcolare il grado in corrispondenza di ognuna delle 4 soluzioni in Ω. Come abbiamo osservato alla fine del paragrafo 2 inoltre ci basta calcolare il grado e non l'indice.

Possiamo considerare la mappa $I-\tilde{A}$, definita in Teorema 3.2, come mappa prodotto

$$\begin{array}{rcl} I-\tilde{A}_1\times\tilde{A}_2\ :L^r\left(B_1\right)\times L^r\left(B_2\right) & \longrightarrow & L^r\left(B_1\right)\times L^r\left(B_2\right)\\ (u_1,u_2) & \longmapsto & \left(I-\tilde{A}_1(u_1)\,,I-\tilde{A}_2(u_2)\right)\end{array}$$

dove $\tilde{A}_i$ è la restrizione di $\tilde{A}$ a B_i. Ovvero $\tilde{A}_i = (-\Delta_p)^{-1}_{|B_i} \circ f$. Poiché Ω è non connesso anche lo spazio $L^r(\Omega) = L^r(B_1) \cup L^r(B_2)$ è esattamente lo spazio prodotto $L^r(B_1) \times L^r(B_2)$ e lo stesso per il cono $\mathcal{C}_\Omega = \mathcal{C}_{B_1} \times \mathcal{C}_{B_2}$. Sia W_i un intorno di u_i in $L^r(B_i) \cap \mathcal{C}_{B_i}$ in cui non ci siano soluzioni dell'equazione diverse dalla u_i in tutto $\overline{W}_i$. È possibile prendere un tale intorno W_i poiché le uniche soluzioni in B_i sono u_i e 0. In particolare prendiamo W in modo da poter fare l'omotopia su p come visto nel paragrafo precedente. Dalla formula per il grado di una mappa prodotto, vedi [**AD**], abbiamo

$$deg_{C_1 \times C_2}\left(I - \left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right), (0,0), W_1 \times W_2\right) = deg_{C_1}\left(I - \tilde{A}_1, 0, W_1\right)$$
$$deg_{C_2}\left(I - \tilde{A}_2, 0, W_2\right),$$

e quindi anche

$$index_{C_1 \times C_2}\left(I - \left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right), (u_1, u_2)\right) = index_{C_1}\left(I - \tilde{A}_1, u_1\right)$$
$$index_{C_2}\left(I - \tilde{A}_2, u_2\right).$$

Per calcolare il grado di questi operatori facciamo un'omotopia su p e calcoliamo solo il grado o l'indice per $p = 2$. In questo caso infatti i calcoli sono molto più semplici in virtù della derivabilità dell'operatore e del legame dell'indice con l'invertibilità o con il raggio spettrale del linearizzato.

Studiamo quindi il caso $p = 2$. Sia u l'unica soluzione positiva nella palla B e sia $P = (-\Delta)^{-1} \circ f$. Poiché $u > 0$ in B, secondo le notazioni di [**AD**], u è un 'demiinterior' per il cono $\mathcal{C}$. Questo significa, seguendo [**AD**] che detto

$$C_u = \{z \in L^r(B) : \exists\, t > 0 \text{ t.c. } u + tz \in \mathcal{C}\}$$

u è un 'demiinterior' per $\mathcal{C}$ se $\overline{C}_u = L^r(B)$. Per i 'demiinterior' vale la seguente identità

$$index_{\mathcal{C}}(I - P, u) = index_{L^r(B)}(I - P, u),$$

inoltre poiché u è un punto fisso isolato di P, P è differenziabile in u e $I - P'(u)$ è invertibile allora

$$index_{L^r(B)}(I - P, u) = index_{L^r(B)}(I - P'(u), 0) = \pm 1.$$

Quindi nel nostro caso

$$index_{\mathcal{C}}\,(I-P,u) = index_{L^r(B)}\,(I-P,u) = \pm 1 \neq 0.$$

La soluzione 0 è invece il vertice del cono $\mathcal{C}$, quindi potrebbe accadere anche che $index_{\mathcal{C}}\,(I-P,u)=0$; però poiché $P'(0)=0$ è l'operatore nullo, allora $r\,(P'(0))=0$ dove r è il raggio spettrale e dalla definizione di indice abbiamo

$$index_{\mathcal{C}}\,(I-P,0) = \begin{cases} index_{L^r(B)}\,(I-P'(0),0) = (-1)^{\gamma} & \text{se } r(P'(0)) < 1 \\ 0 & \text{se } r(P'(0)) > 1 \end{cases}$$

dove $\gamma = \sum \lambda_i$ per $\lambda_i > 1$, e i λ_i sono gli autovalori dell'operatore $I - P'(0)$ maggiori di 1. Abbiamo così

$$index_C\,(I-P,0) = 1 \neq 0.$$

Quindi per $p=2$ entrambe le soluzioni non negative hanno indice diverso da zero. A questo punto posso sfruttare l'omotopia su p per avere

$$index_{C_1 \times C_2}\,(I-(A_1,A_2)\,,(0,0)) \neq 0,$$

$$index_{C_1 \times C_2}\,(I-(A_1,A_2)\,,(u_1,0)) \neq 0,$$

$$index_{C_1 \times C_2}\,(I-(A_1,A_2)\,,(0,u_2)) \neq 0,$$

$$index_{C_1 \times C_2}\,(I-(A_1,A_2)\,,(u_1,u_2)) \neq 0.$$

Siamo nelle ipotesi per poter applicare il Teorema 3.2 in corrispondenza di ognuna delle 4 soluzioni in Ω. Ricaviamo quindi l'esistenza di 4 soluzioni non negative distinte in Ω_n. Fra queste abbiamo la soluzione nulla in Ω_n che sarà quella corrispondente alla soluzione nulla in Ω, e altre 3 soluzioni non negative in Ω_n. Inoltre dal principio del massimo forte otteniamo che tali soluzioni devono essere strettamente positive in Ω_n, che è connesso. Troviamo così l'esistenza di 3 soluzioni positive per il problema (3.14) nei domini Ω_n se n grande, e quindi la molteplicità delle soluzioni positive.

Si possono poi fare variare i raggi delle due palle e il risultato si mantiene. Si può anche aumentare il numero delle palle aumentando così il numero delle soluzioni.

Osserviamo che per $p=2$ la molteplicità è stata provata da Dancer che ha mostrato che le soluzioni in questo caso sono esattamente 4, sfruttando la non degenerazione delle soluzioni u_i. Per $p \neq 2$ invece l'operatore linearizzato in generale non è ben definito, quindi non si riescono a contare le soluzioni con questo metodo.

3.6. Appendice

3.6.1. Grado e indice. In un vecchio ma interessante articolo [**N**] Nussbaum studia fra le altre cose le proprietà dell'indice topologico dei punti fissi per mappe di condensazione. In particolare ci interessa il legame con il grado di Leray-Schauder in spazi di Banach.

Sia U un aperto in uno spazio di Banach X e sia $A : \overline{U} \longrightarrow X$ una mappa precompatta tale che $x \neq A(x)$ se $x \in \partial U$. Sotto queste ipotesi $deg_X (I - A, 0, U)$ è ben definito, dove con *deg* intendiamo appunto il grado di Leray-Schauder. Sotto le stesse ipotesi anche l'indice topologico $i_X (A, U)$ é ben definito. Non ci addentriamo in questa questione, Nussbaum lo definisce nel caso di mappe più generali. Se A è precompatta comunque per noi $i_X (A, U)$ è ben definito. Abbiamo inoltre il seguente

PROPOSIZIONE 3.2. $i_X (A, U) = deg_X (I - A, 0, U)$.

vedi prop. 1 pag 243 in [**N**]. Nella dimostrazione Nussbaum si occupa appunto di mostrare come $i_X (A, U)$ sia ben definito e la sua coincidenza col grado di Leray-Schauder nel caso di mappe A precompatte.
In particolare vogliamo sfruttare le proprietà dell'indice studiate da Nussbaum e applicarle al grado di Leray-Schauder. Riportiamo il seguente

TEOREMA 3.3. *Siano U_1 e U_2 aperti in X_1, X_2 spazi di Banach. Siano $A_1 : U_1 \to X_2$ e $A_2 : U_2 \to X_1$ mappe continue tali che $S_2 = \{x \in A_2^{-1} (U_1)$ t. c. $A_1A_2(x) = x\}$ sia compatto. Assumiamo K_{odd} e K_{even} siano compatti, allora*

$$i_{X_1} \left(A_2A_1, A_1^{-1}(U_2)\right) = i_{X_2} \left(A_1A_2, A_2^{-1}(U_1)\right).$$

Vedi Teorema 3 pag 242 in [**N**]. Senza inoltrarci nelle definizioni di Nussbaum, possiamo osservare che se A_1 è precompatta allora A_1A_2 e A_2A_1 sono precompatte e K_{odd} e K_{even} sono compatti come mostrato sempre da Nussbaum. Possiamo quindi rienunciare il Teorema precedente nella seguente forma

TEOREMA 3.4. *Siano U_1 e U_2 aperti in X_1, X_2 spazi di Banach. Sia $A_1 : U_1 \to X_2$ una mappa precompatta e $A_2 : U_2 \to X_1$ continua tali che $S_2 = \{x \in A_2^{-1}(U_1)$ t. c. $A_1 A_2(x) = x\}$ sia compatto. Allora*

$$i_{X_1}\left(A_2 A_1, A_1^{-1}(U_2)\right) = i_{X_2}\left(A_1 A_2, A_2^{-1}(U_1)\right).$$

Applichiamo il Teorema 3.4 al nostro caso. Con le notazioni di Teorema 3.2, definiamo

$$X_1 = L^r(B), \qquad X_2 = L^r(\Omega_n),$$

$$U_1 = V \cap L^r(B), \qquad U_2 = V \cap L^r(\Omega_n),$$

$$A_1 : V \cap L^r(B) \longrightarrow L^r(\Omega_n), \qquad A_1 := \tilde{A}_n \circ r_n,$$

$$A_2 : V \cap L^r(\Omega_n) \longrightarrow L^r(B), \qquad A_2 := i_n.$$

Allora, poiché $r_n \circ i_n = I_{|\Omega_n}$

$$A_2 A_1 = i_n \circ \tilde{A}_n \circ r_n = A_n \text{ e } A_1 A_2 = \tilde{A}_n \circ r_n \circ i_n = \tilde{A}_n,$$

$$A_1^{-1}(U_2) = A_1^{-1}(V \cap L^r(\Omega_n)) \subset V \cap L^r(B);$$

$$A_2^{-1}(U_1) = V \cap L^r(\Omega_n) = U_2.$$

$$S_2 = \{x \in A_2^{-1}(U_1) \,:\, A_1 A_2(u) = u\} = \{x \in V \cap L^r(\Omega_n) \,:\, \tilde{A}_n(u) = u\}.$$

Questo insieme è compatto infatti se u_k è una successione in $V \cap L^r(\Omega_n)$ tale che $u_k = \tilde{A}_n(u_k)$, u_k verifica $-\Delta_p u_k = f(u_k)$ in Ω_n, e $\|u_k\|_r \le C$, $\|f(u_k)\|_{\frac{r}{q}} \le C$, $\|u_k\|_\infty \le C$ e $\|u_k\|_{1,p} \le C$, da u_k estraggo una sottosuccessione che converge debole a u in $W_0^{1,p}(B)$ più forte in L^r per ogni r. Sotto queste ipotesi posso passare a limite nella formulazione debole dell'equazione $-\Delta_p u_k = f(u_k)$ e ottengo $u = \tilde{A}_n(u)$ e u non può stare su ∂V per le ipotesi fatte, non ci devono essere punti fissi sulla frontiera almeno per n grande. Quindi S è compatto e posso applicare il Teorema 3.4, ovvero

$$i_{L^r(B)}\left(A_n, A_1^{-1}(V \cap L^r(\Omega_n))\right) = i_{L^r(\Omega_n)}\left(\tilde{A}_n, V \cap L^r(\Omega_n)\right).$$

Ora siccome i punti fissi di A_n in $V \cap L^r(B)$ sono contenuti in $A_1^{-1}(V \cap Ł^r(\Omega_n))$ in particolare se $u = A_n(u)$ allora $u(x) = 0$ fuori Ω_n quindi $u(x) \in i_n \circ \tilde{A}_n^{-1}(V \cap L^r(\Omega_n))$, allora per 'excesion' dell'indice topologico abbiamo

$$i_{L^r(B)}\left(A_n, A_1^{-1}(V \cap L^r(\Omega_n))\right) =$$

$$i_{L^r(B)}\left(A_n, i_n\tilde{A}_n^{-1}\left(V \cap L^r\left(\Omega_n\right)\right)\right) = i_{L^r(B)}\left(A_n, V \cap L^r\left(B\right)\right)$$

quindi infine

$$deg_{L^r(B)}\left(A_n, 0, V \cap L^r\left(B\right)\right) = i_{L^r(B)}\left(A_n, V \cap L^r\left(B\right)\right) =$$

$$i_{L^r(\Omega_n)}\left(\tilde{A}_n, V \cap L^r\left(\Omega_n\right)\right) = deg_{L^r(\Omega_n)}\left(\tilde{A}_n, 0, V \cap L^r\left(\Omega_n\right)\right).$$

In questo modo proviamo che il grado delle soluzioni u_0 e u_n è lo stesso sia che lo calcoliamo in $L^r(\Omega_n)$ o consideriamo le funzioni estese a zero fuori Ω o Ω_n su tutto B e ne calcoliamo il grado in $L^r(B)$.

Bibliografia

[AY] Adimurthi, S.L. Yadava, *An elementary proof of the uniqueness of positive radial solutions of a quasilinear Dirichlet problem*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol **127**, 1994, pp. 219-229.

[ADG] L. Almeida, L. Damascelli, Y. Ge, *A few symmetry results for nonlinear elliptic PDE on noncompact manifolds*, Annales Inst. H. Poincarè , in pubblicazione.

[AB] A. Aftalion, J. Busca, *Radial symmetry of overdetermined boundary-value problems in exterior domains*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol **143**, 1998, pp. 195-206.

[AD] L. Ambrosio, N. Dancer, *Calculus of variations and partial differential equations* Springer, Berlin, 2000.

[AC] L. Andersson, P.T. Chruściel, *Solutions of the constraint equation in general relativity satisfying "hyperbolic condition"*, Dissertationes Mathematicae, Vol **335**, 1996, pp..

[BaN] M. Badiale , E. Nabana, *A note on radiality of solutions of p-laplace equations*, Applicable Anal., Vol **52**, 1994, pp. 35-43.

[BG] C. Bandle, E. Giarrusso, *Boundary blow up for semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms*, Advances in Differential Equations, Vol **1**, 1996, pp. 133-150.

[BM] C. Bandle, M. Marcus, *Large solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behaviour*, J. d'Anal. Math., Vol **58**, 1992, pp. 9-24.

[BM2] C. Bandle, M. Marcus *On second order effects in the boundary behaviour of large solutions of semilinear elliptic problems*, Differential and Integral Equations, Vol **11**, 1998, pp. 23-34.

[Ba] R. Basener, *Nonlinear Cauchy-Riemann equations and q-pseudocnvexity*, Duke Math. J., Vol **43**, 1996, pp. 203-215.

[BGP] S. Berhanu, F. Gladiali, G. Porru, *Qualitative properties of solutions to elliptic singular problems*, J. of Inequalities and Applications, Vol **3**, 1999, pp. 313-330.

[BP] S. Berhanu, G. Porru, *Qualitative and quantitative estimates for large solutions to semilinear equations*, Comm. in Appl. Anal. In pubblicazione.

[B] G. Bianchi, *Non-existence of positive solutions to semilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$ or $\mathbb{R}^N_+$ through the method of moving planes*, Comm. in P.D.E., Vol **22**, 1997, pp. 1671-1690.

[BCN] H. Berestycki, L.A. Caffarelli, and L. Nirenberg, *Symmetry for elliptic equations in a half space*, in Boundary value problems for partial differential equations and applications, RMA Res. Notes Appl. Math., Vol **29**, Masson, Paris 1993, pp. 27-42.

[BCN2] H. Berestycki, L.A. Caffarelli, and L. Nirenberg, *Inequalities for second order elliptic equations with applications to unbounded domains. I*, Duke Math J., Vol **81**, 1996, pp. 467-494.

[BCN3] H. Berestycki, L.A. Caffarelli, and L. Nirenberg, *Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipshitz domains*, Comm. Pure Appl. Math., Vol **50**, 1997, pp. 1089-1111.

[BCN4] H. Berestycki, L.A., Caffarelli, and L. Nirenberg, *Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Vol **25**, 1997, pp. 69-94.

[BN] H. Berestycki and L. Niremberg, *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol. Soc. Bras. Mat., Vol **22**, 1981, pp. 1-37.

[BGPa] H. Berestycki, M. Grossi, F. Pacella, *A nonexistence theorem for an equation with critical Sobolev exponent in the half space*, Manuscripta Math. Vol **77**, 1992, pp. 265-281.

[BL] H.J. Brascamp, E.H. Lieb, *On extensions of the Brunn-MinKowsKi and Prékoph-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions and with an application to the diffusion equation*, J. Funct. Anal., Vol **22**, 1976, pp. 366-389.

[Br] F. Brock, *Radial symmetry for nonnegative solutions of semilinear elliptic equations involving the p-laplacian*, Progress in P.D.E., Vol **1**, Pont à Mousson, 1997, Pitman Res. Notes Math. Ser., Vol **383**, 1998, pp. 46-57.

[CGS] L.A. Caffarelli, B. Gidas, J. Spruck, *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Comm. on Pure and Appl. Mat., Vol **17**, 1989, pp. 271-297.

[CS] L.A. Caffarelli, J. Spruck, *Convexity properties of solutions to some classical variational problems*, Comm. in p.d.e., Vol **7**, 1982, pp. 1337-1379.

[CLn] C. C.. Chen, C.S. Lin, *Local behavior of singular positive solutions of semilinear elliptic equations with sobolev exponent*, Duke Math. J., Vol **78**, 1995, pp. 315-334.

[CLi] W. Chen, C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J., Vol **63**, 1991, pp. 615-622.

[CP] E. Colorado Heras, I. Peral Alonso, *A priori bounds for some elliptic problems with mixed boundary conditions*, preprint.

[CRT] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz, L. Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Comm. Part. Diff. Eq., Vol **2**, 1977, pp. 193-222.

[Da] L. Damascelli, *Comparison Theorems for some Quasilinear Degenerate Elliptic Operators and Applications to simmetry and Monotonicity Results*, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Lineare , Vol **15**, n. 1, 1998, pp. 493-516.

[DG] L. Damascelli, F. Gladiali, *Some non-existence results for positive solutions of elliptic equations in unbounded domains*, inviato per la pubblicazione.

[DPaR] L. Damascelli, F. Pacella, M.Ramaswamy, *Symmetry of ground states of p-laplace equations via the moving plane method*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol **148**, 1999, pp. 291-308.

[DaR] L. Damascelli, M.Ramaswamy, *Symmetry of C^1 solutions of p-Laplace equations in R^N* , Nonlinear Studies, in pubblicazione.

[D1] E. N. Dancer, *The effect of domain shape on the number of positive solutions of certain nonlinear equations*, J. of Diff. Eq., Vol 74, 1988, pp. 120-156.

[D2] E.N. Dancer, *Some notes on the method of moving planes*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol **46**, 1992, pp. 425-434.

[D3] E.N. Dancer, *The effect of domain shape on the number of positive solutions of certain nonlinear equations, II*, J. of Diff. Eq., Vol **87**, 1988, pp. 316-339.

[DEM] M. Del Pino, M. Elgueta, R. Manasevich, *A homotopic deformation along p of a Leray-Schauder degree result and existence for* $\left(|u'|^{p-2}\right)' + f(t,u) = 0$, $u(0) = u(T) = 0$, $p > 1$ J. of Diff. Eq., Vol **80**, 1989, pp. 1-13.

[DF] De Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Inst. Fundam. Res. Lect. Math. Phys., Vol **81**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[diBe] E. DiBenedetto, $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlin. Anal., Vol **7**, 1983, pp. 827-850.

[GOW] J.A. Gatica, V. Oliker, P.Waltman, *Singular nonlinear boundary value problems for second order ordinary differential equations*, J. Diff. Eq., Vol **79**, 1989, pp. 62-78.

[Gi] B. Gidas, *Symmetry and isolated singularities of conformally flat metrics and of solutions of the Yang-Mills equations*, Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. stud., Vol **102**, Princeton Univ. Press, 1982.

[GNN] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., Vol **68**, 1979, pp. 209 - 243.

[GNN2] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Math. Anal. Appl., Part A, Advances in Math. Suppl. Studies, 7A, 1981, pp. 369-403.

[GS] B. Gidas, J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. on Pure and Appl. Mat., Vol **24**, 1981, pp. 525-598.

[GS2] B. Gidas, J. Spruck, *A Priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. in P.D.E., Vol 6 (8), 1981, pp. 883-901.

[GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[G] F. Gladiali, *Boundary behaviour of solutions to quasilinear elliptic singular problems*, Int. J. of Appl. Math., Vol **1**, 1999, pp. 489-498.

[GP] F. Gladiali, G. Porru, *Estimates for explosive solutions to p-Laplace equations*, Progress in Partial Differential Equations, (Pont-á-Mousson 1997), Vol **1**, Pitman Res. Notes Math. Series, Longman, Vol **383**, 1998, pp. 117-127.

[GrP1] A. Greco, G. Porru, *Convexity of solutions to some elliptic partial differential equations*, Siam J. Math. Anal., Vol **24**, 1993, pp. 833-839.

[GrP2] A. Greco, G. Porru, *Asymptotic estimates and convexity of large solutions to semilinear elliptic equations*, Differential and Integral Equations, Vol **10**, 1997, pp. 219-229.

[GPa] M.Grossi, F.Pacella, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent and mixed boundary conditions*, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A, Vol **116**, 1990, pp. 23-43.

[K1] B. Kawohl, *On a class of singular elliptic equations*, Progress in PDE: elliptic and parabolic problems, (Pont-á-Mousson, 1991), Pitman Res. Notes Math. Ser., Longman Sci. Tech., Harlow, Vol **266**, 1992, pp. 156-163.

[K2] B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lectures Notes in Math., Vol **1150**, Springler-Verlag, Heidelber, 1985.

[K3] B. Kawohl, *When are solutions to nonlinear elliptic boundary value problem convex?*, Comm. in P.D.E., Vol **10**, 1985, pp. 1213-1225.

[Ko] N.J. Korevaar, *Convex solutions to nolinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., Vol **32**, 1983, pp. 603-614.

[KoL] N.J. Korevaar, J. Lewis *Convex solutions of certain elliptic equations have constant rank Hessian*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol **97**, 1987, pp. 19-32.

[LM] A.C. Lazer, P.J. McKenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary value problem*, Proc. American. Math. Soc., Vol **111**, 1991, pp. 721-730.

[Li] C.M. Li, *Monotonicity and symmetry of solution of fully nonlinear elliptic equations on unbounded domains*, Comm. in Part. Diff. Eq., Vol **16**, 1991, pp. 585-615.

[LiN] Y. Li, W.M. Ni, *Radial symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Comm. in P.D.E., Vol **18**, 1993, pp. 1043-1054.

[LZ] Y. Lou, M. Zhu, *Classification of nonnegative solutions to some elliptic problems*, Diff. Int. Eq., Vol **12**, 1999, pp. 601-612.

[M] V.G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*, Springler-Verlag, Berlin, 1985.

[NC] A. Nachman, A. Callegari, *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM J. Appl. Math., Vol **38**, 1980, pp. 275-281.

[N] R. D. Nussbaum, *The fixed point index for local condensing maps*, Ann. Mat. Pura Appl., Vol **89**, 1971, pp. 217-258.

[PP] L.E. Payne, G.A. Philippin, *Some maximum principles for nonlinear elliptic equations in divergence form with applications to capillary surfaces and to surface of constant mean curvature*, J. Nonlin. Anal., Vol **3**, 1979, pp. 193-211.

[P] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School of Nonlinear Functional Analysis and application to differential equation, Trieste, 1997.

[PSeZ] P. Pucci, J. Serrin and H. Zou, *A strong maximum principle for quasilinear elliptic equations*, J. Math. Pures Appl., Vol **78**, 1999, pp. 769-789.

[PW] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum Principle in Differential Equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.

[RT] J. Rauch, M. Taylor, *Potential and scattering theory in wildly perturbed domains*, J. of Funct. Anal., Vol **18**, 1975, pp. 29-59.

[R] W. Reichel, *Radial symmetry by moving planes for semilinear elliptic BVPs on annuli and other non convex domains*,

[RN] F. Riesz, B.SZ. Nagy, *Functional Analysis*, Frederick Ungar Publishing Co, New York, 1955.

[S] D.H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., Vol **21**, 1972, pp. 979-1000.

[Se] J. Serrin, *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol **43**, 1971, pp. 304-318.

[SeZ] J. Serrin, H. Zou, *Symmetry of ground states of quasilinear elliptic equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol **148**, 1999, pp. 265-290.

[St] C.A. Stuart, *Existence theorems for a class of nonlinear integral equations*, Math.Z., Vol **137**, 1974, pp. 49-66.

[T] S. Terracini, *Symmetry properties of positive solutions to some elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, Diff. Int. Eq., Vol **8** , 1995, pp. 1911-1922.

[T2] S. Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent*, Adv. Diff. Eq. Vol **1**, 1996, pp. 241-264.

[To1] P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. P.D.E., Vol **8**, 1993, pp. 773-817.

[To2] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Equations, Vol **51**, 1984, pp. 126-150.

[V] J.L. Vazquez, *A Strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim, Vol **12**, 1984, pp. 191 - 202.