
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCO CARDIN, ROSSANA TAZZIOLI

Caratteri seminali nell'opera di Ricci Curbastro. Il tensore di curvatura e i simboli di rotazione

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 10 (2025), n.2, p. 89–106.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_2_89_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Caratteri seminali nell'opera di Ricci Curbastro. Il tensore di curvatura e i simboli di rotazione

FRANCO CARDIN

Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita, Università di Padova

E-mail: cardin@math.unipd.it

ROSSANA TAZZIOLI

Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, France

E-mail: rossana.tazzioli@univ-lille.fr

Sommario: *Questo articolo delinea due fondamentali contributi di Gregorio Ricci Curbastro che sono in realtà fortemente intrecciati: il tensore di curvatura a due indici e i coefficienti di rotazione. Il loro destino culturale incrociò l'opera di Albert Einstein e per entrambi l'azione militante fu svolta da Tullio Levi-Civita, brillante allievo di Ricci a Padova.*

Abstract: *This article outlines two fundamental contributions by Gregorio Ricci-Curbastro, which are in fact deeply interconnected: the two-index curvature tensor and the rotation coefficients. Their intellectual legacy intersected with the work of Albert Einstein, and in both cases, a pivotal role was played by Tullio Levi-Civita, Ricci's brilliant student in Padua.*

1. – Introduzione

Bisognerebbe esser grati anche ai bersaglieri di Porta Pia se Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925) divenne lo scienziato matematico che tutti conosciamo. In seguito a quello storico evento, Ricci abbandonò infatti l'università papalina che aveva cominciato a frequentare su suggerimento del padre, molto pio. Nonostante quell'atto di fuga da Roma capitale, quel padre e tutta la famiglia non manifestarono affatto atteggiamenti di oltranzismo vetero-clericale e sicuramente Gregorio fu un sincero sostenitore dell'unità italiana ([62], pp. 132-134). Dopo due anni nella sua Lugo, eccolo all'università di Bologna, e infine l'anno successivo entrare nella

Scuola Normale di Pisa. Quello fu il vero inizio del suo percorso scientifico.

Ora volgiamoci all'indietro di circa vent'anni: nel 1854, Bernhard Riemann (1826-1866) presentò presso l'Università di Gottinga, dove si era laureato, una dissertazione per ottenere il titolo di Privatdozent, *Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria* [52], che sarà pubblicata solo nel 1868. Aveva preliminarmente elaborato tre possibili lezioni, due sull'elettromagnetismo e una sulla geometria. Carl Friedrich Gauss (1799-1855), che da molto tempo si occupava di teoria delle superfici e ne aveva elaborato la sistemazione definitiva, scelse – sembra inaspettatamente per Riemann – la lezione sulla geometria, che sarebbe diventata un classico della matematica a venire. Qui, Riemann pose le basi metriche di quella che oggi si chiama varietà riemanniana caratterizzata dal “quadrato dell'elemento di linea”

Accettato: 25 giugno 2025.

$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$, dove $g_{\mu\nu}$ denota il cosiddetto *tenore metrico*, e dalla correlata curvatura, $R_{\mu\nu\rho\sigma}(g(x), \partial g(x), \partial^2 g(x))$. La lezione, probabilmente troppo avanzata per gli auditori della conferenza che erano per la maggior parte filosofi, fu molto apprezzata da Gauss. Questi comprese appieno la profondità dei concetti introdotti dal giovane Riemann che generalizzavano al caso di spazi a n dimensioni e con una visione matematica rivoluzionaria il panorama bidimensionale che lui stesso aveva messo a punto⁽¹⁾.

Torniamo a Ricci, che arrivò a Pisa nel 1873-74. Alla Scuola Normale Superiore uno dei suoi maestri, Enrico Betti (1823-1892), conosceva bene l'opera di Riemann del quale fu anche grande amico. Nel 1875, Ricci si laureò con una tesi dal titolo *Sulle ricerche di Fuchs sulle equazioni differenziali lineari*. Rimase a Pisa e presentò l'anno successivo il lavoro *Su una generalizzazione del problema di Riemann sulle funzioni ipergeometriche* per ottenere l'accesso all'insegnamento. Non c'è traccia di pubblicazione né per questo articolo, né per la sua tesi di laurea.

Ricci vinse una borsa di studio che gli consentì di trascorrere l'anno 1877-78 (nota bene, dieci anni dopo la pubblicazione della lezione di Riemann sui principi della geometria), alla Technische Hochschule di Monaco, ove conobbe Felix Klein (1849-1925) e Alexander Wilhelm von Brill (1842-1935). Ricci frequentò le lezioni di entrambi. Poté dunque, all'Università di Monaco, allargare gli orizzonti culturali della geometria differenziale di Riemann appresa da Betti a Pisa aprendosi anche alla teoria dei gruppi di trasformazione tanto importante nella matematica di Klein. Tuttavia furono Riemann, Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) e Rudolf Lipschitz (1832-1903) i suoi principali punti di riferimento.

Dopo il suo rientro a Pisa, nel 1879, Ricci divenne assistente di Dini. Dal 1880 fu professore a Padova. I suoi primi lavori riguardavano la fisica matematica, in particolare l'elettromagnetismo, e la teoria delle equazioni differenziali. La straordinaria fioritura creativa di Ricci avvenne tra il 1884 e il 1894. Una profonda ed efficace ricerca sulle forme quadratiche

e invarianti lo condusse all'edificazione del 'calcolo differenziale assoluto' (oggi *calcolo tensoriale*)⁽²⁾. La 'derivazione covariante', introdotta da Christoffel come un ingrediente di sistemazione analitica, assunse un posto chiave nella sua visione geometrica costruita intorno al concetto di invariante⁽³⁾.

Assieme al suo allievo Tullio Levi-Civita (1873-1941), laureatosi a Padova nel 1894 con una tesi dal titolo *Sugli invarianti assoluti* [28], perfezionò la sua teoria ampliandola ad un mondo nuovo di applicazioni matematiche e fisiche. La sintesi alta della loro collaborazione fu il lavoro di rassegna sui loro risultati, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* del 1901 (in seguito *Méthodes*) [49], un articolo caldeggiato dallo stesso Klein. Per circa vent'anni, fino alla pubblicazione dei trattati di Levi-Civita [31], questo importante lavoro svolse il ruolo di manuale di riferimento per il calcolo tensoriale.

Prima della formulazione della relatività generale da parte di Albert Einstein (1878-1955), nel 1915, Ricci non ottenne in Italia il successo sperato per il suo calcolo differenziale assoluto. Sopportò comunque con dignità la non assegnazione del Premio Reale dell'Accademia dei Lincei, per ben due vol-

⁽²⁾ La costruzione del calcolo differenziale assoluto da parte di Ricci è narrata nell'articolo di Alberto Cogliati pubblicato in questo volume.

⁽³⁾ Breve digressione: se la rappresentazione di un campo vettoriale X in coordinate x si rilegge 'tensorialmente' nelle coordinate $\bar{x} = \bar{x}(x)$ come $\bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} X^j$, questo non accade per le derivate parziali $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ di X ; si trasformano invece 'tensorialmente' le 'derivate covarianti' di X : $D_{x^j} X^i := \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \ k \end{smallmatrix} \right\} X^k$. Qui, $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} (g_{\ell j, k} + g_{k \ell, j} - g_{j k, \ell}) g^{\ell i}$ sono i simboli di Christoffel (del 2° tipo). Pertanto, la derivata covariante di X rispetto al campo vettoriale Y è: $D_Y X^i = D_{x^j} X^i Y^j$ e la derivata covariante di X rispetto alla curva $x(\lambda)$ è: $D_\lambda X^i = D_{x^j} X^i \dot{x}^j$. Ora, con queste definizioni il vettore $D_Y X^i$ si trasforma esattamente come il vettore X di cui sopra: $D_{\bar{Y}} \bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} D_Y X^j$, mentre l'oggetto geometrico a due indici $D_{x^j} X^i$ si trasforma come un *tenore* con un indice controvariante (tipo vettore) e un indice covariante (tipo forma lineare): $D_{x^j} \bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} D_{x^s} X^r$, [5], [8], [11], [60].

⁽¹⁾ Questo percorso è stato narrato più volte con varie modalità e ricchezza di dettagli dal punto di vista storico e tecnico, [1, 3, 8, 57, 59, 60, 62].

te⁽⁴⁾ (1887 e 1901), un riconoscimento lungamente atteso.

Levi-Civita, da parte sua, applicò con successo il calcolo tensoriale in lavori di altissimo livello che riguardavano la meccanica analitica, i potenziali binari e altri ancora, pubblicati anche prima delle teorie di Einstein. Nella primavera del 1915, ebbe uno scambio epistolare con Einstein che contribuì a orientare il fisico tedesco verso la corretta formulazione delle equazioni di campo gravitazionale. Nel 1917, Levi-Civita fece un ritorno trionfale alla geometria differenziale pubblicando la sua celebre memoria sul ‘trasporto parallelo’ [29].

In questo articolo, ci soffermiamo sulla comune crescita scientifica di Ricci e del suo allievo. In particolare, mettiamo in evidenza *due* aspetti fondamentali che esprimono la profondità del loro approccio alla geometria differenziale: l’accostamento di metodi di calcolo tensoriale che diverranno classici combinati all’uso del ‘triedro mobile’ come emerge dalla descrizione per ‘congruenze’⁽⁵⁾. Da questo approccio nasceranno dei nuovi oggetti matematici, come i simboli di rotazione di Ricci.

Per il nostro scopo, prendiamo in considerazione soprattutto due lavori: l’articolo di Ricci del 1896 intitolato *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque* [46] e il successivo vasto articolo di rassegna redatto assieme a Levi-Civita *Méthodes* [49].

In entrambi i lavori, dopo preamboli basilari, si riannodano nell’ordine, metrica, simboli di Christoffel e il tensore di curvatura di Riemann. Questo viene effettuato con il linguaggio che diventerà usuale del calcolo tensoriale. Si afferma che in dimensione $n = 2$ la curvatura è completamente enucleata nella contrazione totale dei quattro indici di Riemann, riottenendo così la curvatura di Gauss, mentre per $n = 3$ si ottiene il tensore a due indici nell’unica contrazione non banale del tensore di Riemann, $R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$, che racchiude tutte le informazioni sulla curvatura. In

[49] gli autori lo battezzano “système contrevariant de Riemann”, ma solo in seguito, con un’attribuzione largamente accettata e nata nel processo di genesi della relatività generale, sarà denominato con il suo nome definitivo: tensore di curvatura di Ricci (si veda la Sezione 2).

Sempre in entrambi i lavori, l’esposizione geometrica di cui sopra viene ricostruita nell’universo descrittivo delle ‘congruenze’: la geometria curva delle varietà n -dimensionali è disegnata dai flussi di n assegnati campi vettoriali linearmente indipendenti λ_j , $j = 1, \dots, n$. Metrica, curvatura di Riemann e di Ricci si lasciano descrivere mediante i λ_j e le loro derivate. Ed è in questo nuovo scenario che emergono quelli che saranno denominati simboli di rotazione γ_{ijk} sui quali ci soffermeremo nella Sezione 3. Questi nuovi oggetti matematici diventano immediatamente centrali nella teoria di Ricci: le formule (20) e (21) a p. 512 di [49] riscrivono il tensore di Riemann in termini dei simboli di rotazione e le (22) e (21)₂ il “système contrevariant de Riemann” che per $n = 3$ è equivalente alla curvatura di Ricci. Si tratta di tutta una serie di formule che riporterà “quasi verbatim” Attilio Palatini (1889-1949) nel 1929 nel suo lavoro sul principio variazionale relativistico [42].

Erano costruzioni legate alla forte pulsione di Ricci di rileggere ed ampliare *aspetti classici*, principalmente di geometria differenziale delle superfici e di teoria degli invarianti, nelle nuove teorie che si stavano affacciando. Con il suo tensore di curvatura, già presente nell’articolo del 1896 [46], Ricci riproponeva un meccanismo di *indagine spettrale* esistente nell’ambito della teoria classica gaussiana della curvatura, legata all’operatore (matriciale) di Weingarten. Si ricorda, tra le molte sue applicazioni, il significato della valutazione della forma quadratica su un vettore unitario, $R_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}$, che rappresenta la *media delle curvature sezionali* rispetto ai piani passanti per v^{μ} moltiplicata per $n - 1$; inoltre, va menzionata la sua rinnovata vitalità negli ultimi decenni, legata al cosiddetto *flusso di Ricci*, che è stato lo strumento chiave per la soluzione della congettura di Poincaré.⁽⁶⁾

⁽⁴⁾ Con relazioni rispettivamente di Beltrami nel 1887 e di Bianchi nel 1901. Sulla diffusione del calcolo tensoriale si veda [11].

⁽⁵⁾ Attribuita da Ricci a Jean Gaston Darboux (1842-1917), in seguito esaustivamente studiata da Élie Joseph Cartan (1869-1951).

⁽⁶⁾ Su questo argomento si veda l’articolo di Alessandro Carlotto, pubblicato in questo stesso volume.

Con i suoi simboli di rotazione, Ricci generalizza in maniera definitiva la nozione qualitativa di *rotazione* locale, a qualunque dimensione nell'ambiente delle congruenze. La teoria delle congruenze e i coefficienti di rotazione di Ricci ebbero inoltre un profondo impatto sulla ricerca di Levi-Civita in geometria, equazioni differenziali e fisica matematica. In particolare, i coefficienti di rotazione si rivelarono determinanti negli sforzi di Levi-Civita per semplificare le equazioni di campo unificate di Einstein alla fine degli anni '20, come analizzeremo ancora nella Sezione 3.

Nella Sezione 4, infine, vedremo come le congruenze e i coefficienti di rotazione, introdotti da Ricci per le varietà Riemanniane, giochino ancora oggi, secondo alcuni autori, un ruolo importante nelle moderne teorie fisiche.

2. – La doppia vita del tensore di curvatura di Ricci

2.1 – L'emergere e la caduta di $R_{\mu\nu}$

La genesi della relatività generale è stata tormentata e la sua storia è ben documentata da un gran numero di studi sull'argomento. In questo paragrafo, siamo interessati ad un frammento importante di questa storia che coinvolge degli attori importanti, come Einstein, Levi-Civita e indirettamente lo stesso Ricci.

Muovendosi dunque nella ricca letteratura [41, 6, 40, 36], osserviamo come, nella prima decade del secolo XX, si avvertisse nelle comunità dei fisici e dei matematici una certa pulsione per una teoria relativistica della gravitazione. La relatività del 1905 stava realmente affermandosi, ed Einstein era un virtuoso microfono divulgatore delle sue idee, anche di quelle appena in nuce. Si discuteva per esempio di una teoria di Nordström, che Einstein in prima battuta rifiutò e su cui torneremo.

Einstein stesso ci racconta dove e quando si verificò il punto di svolta decisivo:

Ho avuto l'idea cruciale della connessione tra la teoria della gravità e la teoria delle superfici di Gauss nel 1912, dopo essere tornato a Zurigo [Einstein tornò da Praga nell'agosto del 1912] e, a quel tempo, senza conoscere i lavori di Riemann, Ricci e Levi-Civita. ([41], p. 232)

Si rivolse dunque al suo vecchio amico matematico Marcel Grossmann (1878-1936), compagno di studi universitari a Zurigo, ora docente in quell'università. La loro era una solida amicizia: Einstein gli aveva addirittura dedicato la sua tesi dottorato. Tra il 1913 e il 1914 ci furono nove mesi di intenso lavoro comune, e il frutto della collaborazione fu l'articolo *Entwurf* [16].⁽⁷⁾ Grossmann introdusse Einstein nell'universo del calcolo differenziale assoluto di Ricci e Levi-Civita che appariva il completamento naturale dei fondamenti pionieristici di Gauss e Riemann in geometria differenziale.

Molto è stato scritto e commentato a riguardo, e quasi per un senso di sintesi pensiamo auspicabile andare direttamente alla lettura delle fonti. L'*Entwurf* è composto di due parti separate, la prima, *parte fisica*, firmata da Einstein, la seconda, *parte matematica*, da Grossmann.

Dopo un preambolo sul principio di equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale, proponendo in sostanza il famoso esperimento mentale dell'ascensore⁽⁸⁾ in caduta libera, nel primo paragrafo Einstein richiama la struttura variazionale⁽⁹⁾ della dinamica in relatività ristretta di una particella libera in assenza di forze. Nel secondo e terzo paragrafo, mette in risalto il ruolo che il nuovo tensore metrico pseudo-Riemanniano $g_{\mu\nu}$ deve assumere nella teoria gravitazionale in costruzione, le cui dieci componenti indipendenti dovranno rappresentare ciò che il potenziale Newtoniano scalare φ propone nella teoria classica. Viene con naturalezza esteso il principio variazionale sopra richiamato nel caso generale pseudo-Riemanniano. In questo nuovo ambiente, nel paragrafo quarto vengono estese le leggi

⁽⁷⁾ "Entwurf" è il termine tedesco che significa "bozza" o "progetto"; nella letteratura scientifica internazionale sull'argomento, si osserva che questo termine non viene mai tradotto, probabilmente come forma di riconoscimento verso quei due grandi pionieri.

⁽⁸⁾ Einstein usa il termine "Kasten" (box, scatola).

⁽⁹⁾ Einstein correttamente la attribuisce a M. Planck, Verh. d. deutsch. phys. Ges. (1906): 136. Il rapporto con Planck fu importante e per alcuni aspetti a volte contrastante. Einstein avrebbe ricordato le parole che gli rivolse Planck: "Se posso darle un consiglio d'amico, io che sono più vecchio di Lei, lasci perdere quest'idea: in primo luogo non avrà successo, e se anche dovesse averlo nessuno La prenderà sul serio". ([41], p. 259).

di conservazione 4-dimensionali della relatività ristretta per un tensore energia-impulso adeguato alla materia disgregata: $\Theta_{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$ (vedi le formule a p. 159 della versione inglese di [16]).

Il quinto paragrafo si apre con una modalità molto seducente, proponendo delle equazioni di campo della forma:

$$(1) \quad \kappa \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu},$$

dove κ è una costante e $\Gamma_{\mu\nu}$ è il tensore gravitazionale ‘ancora da trovare’:

che deve essere derivato dal tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$ tramite operazioni differenziali. In linea con la legge di Newton-Poisson,

$$(2) \quad \Delta\varphi = 4\pi\kappa\rho,$$

si sarebbe inclini a richiedere che queste equazioni siano di secondo ordine.

Einstein prosegue:

Va sottolineato che risulta impossibile trovare un'espressione differenziale $\Gamma_{\mu\nu}$ che sia una generalizzazione di $\Delta\varphi$ e che dimostri di essere un tensore rispetto a trasformazioni arbitrarie. Di sicuro, non si può negare a priori che le equazioni finali esatte della gravitazione possano essere di ordine superiore al secondo. Pertanto, esiste ancora la possibilità che le equazioni differenziali perfettamente esatte della gravitazione possano essere covarianti rispetto a trasformazioni arbitrarie. Ma dato lo stato attuale della nostra conoscenza delle proprietà fisiche del campo gravitazionale, il tentativo di discutere tali possibilità sarebbe prematuro. Per questo motivo dobbiamo limitarci al secondo ordine e dobbiamo quindi rinunciare a stabilire equazioni gravitazionali che siano covarianti rispetto a trasformazioni arbitrarie. Inoltre, va sottolineato che non abbiamo alcuna base per assumere una covarianza generale delle equazioni gravitazionali. ([16], p. 160)

Viene quindi stralciata la possibilità di usufruire della curvatura di Riemann, più esattamente del tensore contratto di curvatura a due indici di Ricci. E questo nonostante il fatto che, come scrive Grossmann nella seconda parte, esso sembri il naturale candidato per una formulazione del tipo (1) visto che anche il tensore energia impulso – mutuato dalla relatività ristretta – appare come un oggetto tensoriale a due indici. Tuttavia, la covarianza generale

per la (1) – operante in *ogni* sistema di riferimento – non comportava la riduzione asintotica all'equazione di Newton-Poisson (limite classico).

In un sol colpo avviene quindi la doppia catastrofe, che sarà sanata solo due anni dopo: abbandono della covarianza generale e dell'utilizzo della curvatura di Ricci. Per supplire a tutto ciò Einstein (nella sua prima parte dell'*Entwurf* non viene mai citata la curvatura, né di Riemann né di Ricci) ricorrerà ad un principio variazionale per dedurre delle equazioni di campo, ben addomesticate a ridursi a Newton-Poisson e covarianti solamente per una limitata classe di trasformazioni di coordinate che estende parzialmente la classe delle trasformazioni lineari affini. Le nuove equazioni proposte da Einstein (7), qui di seguito, saranno deducibili da un principio variazionale che Einstein riproporrà in maniera più fine nel 1914 nella nota [17] non appena arrivato a Berlino da Zurigo. Un funzionale introdotto è il seguente ⁽¹⁰⁾

$$(3) \quad J = \int_{\Omega} \underbrace{\frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\tau}}_{=:H} \sqrt{-g} \, dx$$

$$\left(L := \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\tau} = \frac{H}{\sqrt{-g}} \right)$$

che appare covariante ‘a vista’ almeno per trasformazioni lineari affini. La riduzione asintotica a Newton-Poisson forza gli autori all'imposizione di ‘opportuni ulteriori vincoli’ ⁽¹¹⁾ che non interpreteranno come restrizioni sulle possibili soluzioni delle equazioni di Euler-Lagrange associate, bensì come restrizioni sulle possibili trasformazioni di coordinate, vincoli che notano essere certamente soddisfatti dalle trasformazioni lineari affini. Teorizzano questa ‘covarianza parziale’ come inevitabile rispetto ad una covarianza generale, che rigettano, anche perché la riduzione a Newton non è pensabile in qualunque sistema di riferimento, bensì in qualche sistema di coordinate spazio-temporali surroganti i sistemi inerziali della meccanica classica.

⁽¹⁰⁾ H è la densità Lagrangiana, è il simbolo – inusuale – usato da Einstein, L è lo scalare invariante Lagrangiano, introdotto qui per convenienza.

⁽¹¹⁾ Non riportiamo qui i dettagli di questo lavoro, si veda a tal proposito il lavoro analitico molto accurato [6].

In quell'articolo, Einstein perfeziona e generalizza dunque l'approccio variazionale, precedentemente sviluppato in collaborazione con Grossmann, e trova quella che (sbagliando, ed è qui che arriverà Levi-Civita) ritiene essere una derivazione più soddisfacente delle sue originali equazioni di campo nell'*Entwurf*. Come richiama anche Cattani in [6], Einstein pensa di essere "riuscito, in particolare, a ottenere le equazioni di campo gravitazionale in un approccio teorico puramente covariante" ([17], p. 1030).

Anche in quest'ultimo contributo dunque, come nel caso dell'*Entwurf*, si evita con cura la possibilità di utilizzare il tensore di curvatura di Ricci.

Questo doppio rifiuto appare una definitiva rimozione, almeno nel 1914, della curvatura di Ricci nel processo di edificazione della relatività generale. Vedremo nel prossimo paragrafo come questa rimozione sarà in realtà solo temporanea.

2.2 – La rinascita di $R_{\mu\nu}$

Come prima precisato, Einstein non cita mai la curvatura di (Riemann e di) Ricci nell'*Entwurf*. Lo fa Grossmann nella sua seconda parte. La curvatura di Ricci farà il suo ingresso con Einstein in un articolo redatto in collaborazione con il giovane Adriaan Daniël Fokker (1887-1972)⁽¹²⁾. In tale lavoro, riprendendo la teoria scalare di Nordström, si mostra come quella teoria possa essere compendiata dall'equazione $R = 24\pi T$, dove R è la curvatura scalare (la traccia della curvatura di Ricci) e T la traccia del tensore energia-impulso.

Quest'idea va in senso contrario alla recente teoria dell'*Entwurf*, senonché alla fine anche questa formulazione per lo stesso Nordström appare da scartare, in quanto non prevede l'influenza della gravitazione sulla propagazione della luce, fatto fisico che una teoria della relatività generale deve richiedere in linea di principio.

Al Politecnico di Milano operava in quegli anni un 'fisico classico' di gran valore, Max Abraham

(1875-1922), che era fortemente dubbioso sulle teorie relativistiche, ma certo non in maniera ideologica. Era in corretta polemica scientifica con Einstein e la sua intolleranza alla nuova teoria gravitazionale, la versione del 1914, crebbe con la proposta, a suo dire assolutamente non motivata, della scelta della Lagrangiana associata al funzionale (3).

Abraham era un buon amico di Levi-Civita, il quale, tra l'altro, aveva fatto parte della commissione di concorso che aveva conferito ad Abraham la cattedra di meccanica razionale al Politecnico. Max chiese allora aiuto all'amico Tullio affinché fosse infine chiarito cosa stava accadendo attorno a quella teoria. Tullio di buon grado si immerse nella teoria di Einstein e scoprì che si trattava di una clamorosa interpretazione fisica – quasi una semantica – di quella potente costruzione matematica, il calcolo differenziale assoluto, che lui e Ricci si erano ormai lasciati alla spalle da anni. Tullio avvertì un errore, e subito scrisse ad Einstein, ma non criticò tanto l'abbandono della covarianza generale: l'argomentare epistolare con Einstein riguardava la critica alla covarianza (quella parziale, nel senso introdotto da Einstein) delle equazioni di Euler-Lagrange associate alla Lagrangiana (3), più precisamente della quantità a due indici qui sotto, $\frac{\mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$.

Ma andiamo per ordine. Il principio variazionale di Einstein proponeva che le variazioni δJ di J bilanciassero $\int_{\Omega} 2\kappa\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} dx$, per variazioni $\delta g_{\alpha\beta}$ nulle assieme alle loro derivate parziali sul bordo di Ω :

$$(4) \quad \int_{\Omega} (\delta H - 2\kappa\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}) dx = 0;$$

più in dettaglio $\left(g_{\alpha\beta,p} := \frac{\partial}{\partial x^p} g_{\alpha\beta}\right)$,

$$(5) \quad \int_{\Omega} \left\{ \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}} (L\sqrt{-g}) - \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta,p}} (L\sqrt{-g}) \right) \right]}_{=: \mathfrak{G}^{\alpha\beta}} - 2\kappa\sqrt{-g}T^{\alpha\beta} \right\} \delta g_{\alpha\beta} dx = 0.$$

Notiamo che $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}$ rappresenta il primo membro delle equazioni di Euler-Lagrange relative a δJ .

⁽¹²⁾ Aveva appena conseguito il dottorato nel 1913, restò celebre per l'equazione di Fokker-Planck. Suo cugino Antony, ancora più giovane di lui, fu il costruttore degli aerei da guerra Fokker, tra cui il triplano reso famoso dalle gesta di Manfred von Richthofen, più noto come il 'Barone Rosso'.

Questa condizione variazionale si riscrive:

$$(6) \quad \int_{\Omega} \left[\frac{\mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} - 2\kappa T^{\alpha\beta} \right] \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g} dx = 0,$$

da cui le equazioni di campo di Einstein-Grossmann:

$$(7) \quad \frac{\mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} = 2\kappa T^{\alpha\beta}.$$

Il ragionamento di Einstein seguiva la seguente linea di pensiero: si osservi il principio variazionale di cui sopra, dato che $T^{\alpha\beta}$ è un 2-tensore controvariante, $\delta g_{\alpha\beta}$ è un 2-tensore covariante, $\sqrt{-g} dx$ è la misura invariante, e ‘certamente’ δJ è scalare invariante rispetto alla covarianza limitata (noi vediamo esserlo almeno rispetto alle trasformazioni lineari affini); allora necessariamente $\frac{\mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$ è un 2-tensore controvariante. Fatto quest’ultimo fondamentale per la tenuta della teoria.

Quell’argomentare era fallace. Furono quasi tre mesi di intenso scambio epistolare, Einstein non si dava per vinto non accettando la critica di Levi-Civita che avrebbe scardinato quanto proposto con Grossmann e rifinito in [17]. Alla fine, poco prima dell’entrata in guerra dell’Italia che avrebbe interrotto drasticamente la corrispondenza tra Padova e Berlino, Einstein capitolò, Levi-Civita aveva ragione, e negli anni successivi sempre con grande riconoscenza e amicizia lo ringraziò pubblicamente.

Forse non è propriamente esatto affermare che Levi-Civita corresse direttamente un errore della relatività generale: l’effetto reale di quello scambio fu il completo abbandono, il disamore di Einstein per quella teoria gravitazionale finora elaborata che lo indusse a prendere la via del ripristino della covarianza generale e della reintroduzione della curvatura di Ricci $R_{\mu\nu}$.

Accadde nel novembre del 1915 che, con una successione di lavori presentati e ricorretti a più riprese, Einstein dedusse e pubblicò le equazioni, corrette, nella forma

$$(8) \quad R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right),$$

con $T = T^{\mu}_{\mu}$, utilizzando sistemi di coordinate in cui $\sqrt{-g} = 1$ e ben sottolineando che tale restrizione non costituiva affatto una rinnovata limitazione della

covarianza. Le leggi di conservazione $D_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$, ove D_{ν} è la derivata covariante, furono invece imposte da Einstein come restrizioni ineluttabili. Un semplice conto avrebbe mostrato che le (8) erano equivalenti alle

$$(9) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

e che grazie alle identità di Bianchi valeva l’identità $D_{\nu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0$, rimuovendo così definitivamente quell’ulteriore imbarazzante restrizione. A quel tempo Einstein non conosceva le identità di Bianchi, come è stato evidenziato in [41] e [61]; ma fu comunque in grado nel 1916 di dedurre per calcolo diretto le leggi di conservazione $D_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$. Fu poi Levi-Civita in [30] che dedusse elegantemente le leggi di conservazione ereditandole direttamente dalle identità di Bianchi. Questi le propose nel lavoro [2] del 1902, sebbene erano state precedentemente introdotte da Ricci nel 1888 [45]. Riportiamo qui di seguito Toscano:

Dopo l’articolo del 1902 il matematico parmense [Bianchi] non tornò più sulle “sue” identità. Curiosamente queste comparvero l’anno successivo in un lavoro su varie questioni di geometria differenziale proprio di Ricci, il quale peraltro non esitò ad attribuirle a Bianchi. Questo più di modestia pare confermare l’affermazione di Levi-Civita, riportato nel paragrafo precedente, secondo la quale Ricci aveva dimenticato le identità da lui trovate tredici anni prima di Bianchi. ([61], p. 365)

La formulazione variazionale di queste ultime equazioni fu proposta da David Hilbert (1862-1943) in [25], successivamente, da Hermann Weyl (1885-1955) [64] poi da Attilio Palatini [42] e infine generalizzata da vari autori, in molteplici contesti fisici e matematici.

3. – Congruenze e simboli di rotazione di Ricci

In questo paragrafo mostreremo come, a partire da idee seminali di Ricci, Levi-Civita abbia intrecciato una nuova importante disputa scientifica con Einstein sulle teorie unificate di campo verso la fine degli anni venti.

3.1 – Da Beltrami a Ricci e Levi-Civita

In alcuni lavori pubblicati alla fine del XX secolo e ispirati da idee di Eugenio Beltrami (1835-1900) nello scenario dello spazio Euclideo tridimensionale, Ricci generalizzò la teoria delle congruenze in una varietà Riemanniana n -dimensionale V_n facendo uso del calcolo tensoriale [46], [48]. Considerò infatti sistemi di linee in forma covariante o controvariante che indicò con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ and $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ rispettivamente, con norma unitaria⁽¹³⁾:

$$(10) \quad \sum_{r=1}^n \lambda^r \lambda_r = 1$$

λ^r è un *campo vettoriale unitario* e il parametro di evoluzione è la lunghezza d'arco s . Indicando⁽¹⁴⁾

$$ds^2 = \sum_{r,s=1}^n g_{rs} dx^r dx^s$$

dove, come già denotato, g_{rs} è il tensore metrico di V_n , le equazioni

$$(11) \quad dx^r/ds = \lambda^r \quad r = 1, 2, \dots, n$$

rappresentano ∞^{n-1} curve in V_n : un presupposto teorema di esistenza e unicità garantisce che per ogni punto della varietà passi una ed un'unica curva della congruenza ([46], p. 19-20).

Ricci introdusse in seguito dei sistemi covarianti di n congruenze ortogonali $\lambda_{1|r}, \lambda_{2|r}, \dots, \lambda_{n|r}$, per cui valgano le seguenti equazioni⁽¹⁵⁾

$$(12) \quad \sum_{r=1}^n \lambda_h^r \lambda_{k|r} = \delta_{hk}.$$

Qui $\sum_{r=1}^n \lambda_h^r \lambda_{k|r}$ chiaramente significa $\sum_{r,s=1}^n g^{rs} \lambda_{h|r} \lambda_{k|s}$. Si noti che la piccola sbarra verticale separa l'indice

⁽¹³⁾ Beltrami e Ricci chiamarono “congruenze di curve” ciò che oggi denotiamo come “campi vettoriali”.

⁽¹⁴⁾ Nel seguito, a differenza di quanto adottato nel paragrafo precedente, useremo le notazioni originali di Ricci e Levi-Civita. Questa scelta qui è essenziale per non stravolgere le definizioni che seguiranno dei simboli di rotazione. Il rispetto della notazione ‘indici in alto controvarianti’ e ‘indici in basso covarianti’ divenne rigoroso solamente in anni successivi.

⁽¹⁵⁾ A partire dal seminale teorema di Hopf, una varietà compatta V_n ammette un campo vettoriale senza zeri se e solo se la sua caratteristica di Eulero $\chi(V_n)$ è nulla, un'attenta cura topologica è necessaria nel trattare l'esistenza globale di tetradi, che sono n -uple di campi vettoriali linearmente indipendenti.

del nome del campo vettoriale dall'indice ereditato dalle *coordinate* solamente nella forma covariante. Mise inoltre in risalto che⁽¹⁶⁾

$$(13) \quad \sum_{h=1}^n \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} = g_{rs}$$

è equivalente a (12).

È ancora nel lavoro del 1896 [46] che Ricci introdusse i “coefficienti di rotazione” γ_{hij} e ne diede un significato cinematico. A questo scopo, considerò la derivata covariante⁽¹⁷⁾ $\lambda_{h|r}$ che denotò con $\lambda_{h|rs}$,

$$(14) \quad \lambda_{h|rs} = D_s \lambda_{h|r} = \frac{\partial \lambda_{h|r}}{\partial x_s} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} l \\ r \ s \end{matrix} \right\} \lambda_{h|l}$$

e definì, senza alcuna giustificazione a priori, le seguenti quantità:

$$(15) \quad \gamma_{hij} = \sum_{r,s=1}^n \lambda_i^r \lambda_j^s \lambda_{h|rs}$$

che risultarono equivalenti alle

$$(16) \quad \lambda_{h|rs} = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{hij} \lambda_{i|r} \lambda_{j|s}.$$

Dedusse inoltre per i coefficienti di rotazione γ le seguenti proprietà di anti-simmetria:

$$(17) \quad \gamma_{hij} + \gamma_{ihj} = 0.$$

Dalla loro definizione segue che le espressioni γ sono degli ‘invarianti assoluti’ e dalle (17) che solo $n^2(n-1)/2$ di esse sono linearmente indipendenti.

Inoltre Ricci stabilì le seguenti formule che legano le derivate covarianti dei coefficienti di rotazione con il tensore di curvatura di Riemann via la teoria delle congruenze:

$$(18) \quad \gamma_{hi,kl} = \sum_{qrst} \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qrst}$$

dove con a_{qrst} Ricci indicava l'usuale tensore di Riemann R_{qrst} .

Tali equazioni si riducono per $n = 2$ ad una sola formula che coinvolge la contrazione completa del

⁽¹⁶⁾ Una certa ambiguità insita in queste notazioni sarà rimossa in seguito da Élie Cartan mediante l'introduzione del “repère mobile”.

⁽¹⁷⁾ Si veda la nota 3. Si noti che il segno ‘meno’ rispetto a quanto scritto nella suddetta nota è dovuto alla forma covariante (e non controvariante, quale p.e. X^i) di $\lambda_{h|r}$.

tensore di Riemann, essenzialmente la curvatura gaussiana. Fatto notevole, per $n = 3$ Ricci dedusse dalle equazioni (18) le seguenti formule:

$$(19) \quad \gamma_{hk} = \sum_{rs} a^{(rs)} \lambda_{h|r} \lambda_{k|s}.$$

Oggi i simboli $a^{(rs)}$ si identificano con il tensore di curvatura di Ricci, R^{rs} .

Questa esposizione di Ricci è ripresa nell'articolo in collaborazione con Levi-Civita *Méthodes* [49], Cap. II, §4.

Il significato ultimo di γ_{hij} diventa piuttosto chiaro quando proviamo a testarlo nello spazio Euclideo $(\mathbb{R}^3, \mathbb{I})$. Utilizzando sostanzialmente la linea di pensiero di Ricci, in ogni punto P consideriamo un 'triedro' T_{hij} formato dalle tangenti in P alle rette della terna delle congruenze ortonormali $\lambda_h, \lambda_i, \lambda_j$ prese nelle loro direzioni positive. L'invariante γ_{hij} rappresenta la componente secondo la direzione (i) della rotazione che agisce su (h) quando il triedro in P è sottoposto a uno spostamento positivo infinitesimo lungo la direzione (j) . Pensiamo al moto rigido risultante $\tau \mapsto \alpha_{(j)}(\tau) \in SO(3)$ descritto dalla terna e alla congruenza sopra descritta $\frac{dx_{(j)}}{d\tau}(\tau, x) = \lambda_j(x_{(j)}(\tau, x))$, $x_{(j)}(0, x) = x$. Ricordiamo che per i moti rigidi le derivate dei versori $\lambda_h(x_{(j)}(\tau, x)) = \alpha_{(j)}(\tau) \lambda_h(x)$ valutate nella base ruotata mobile

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \lambda_h(x_{(j)}(\tau, x)) &= \dot{\alpha}_{(j)}(\tau) \lambda_h(x) = \\ &= \dot{\alpha}_{(j)}(\tau) \alpha_{(j)}^T(\tau) \lambda_h(x_{(j)}(\tau, x)), \end{aligned}$$

sospendendo la scrittura degli argomenti, giungiamo all'espressione

$$\begin{aligned} (20) \quad \gamma_{hij} &= D_{\lambda_j} \lambda_h \cdot \lambda_i = \\ &= \frac{d}{d\tau} \lambda_h(x_{(j)}(\tau, x))|_{\tau=0} \cdot \lambda_i = \dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T \lambda_h \cdot \lambda_i = \\ &= \left(\dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T \right)_{hi} = - \left(\dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T \right)_{ih}. \end{aligned}$$

Alla matrice anti-simmetrica $(\dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T)_{hi}$ resta correlato – solo in dimensione 3 – il vettore polare, detto la *velocità angolare* $\omega_{(j)}$,

$$(21) \quad \left(\dot{\alpha}_{(j)} \alpha_{(j)}^T \right)_{hi} v_i = (\omega_{(j)} \times v)_h, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Si osservi che la teoria delle congruenze è presentata per la prima volta in modo sistematico nell'articolo congiunto *Méthodes* [49] del 1901. Successivamente, Levi-Civita introduce il trasporto parallelo riuscendo a mostrare un legame profondo tra questo concetto e

la teoria delle congruenze che sviluppa soprattutto nelle sue lezioni di calcolo differenziale assoluto [31].

Sinteticamente, Levi-Civita definisce il trasporto per parallelismo nei seguenti termini. Data una curva C in una varietà Riemanniana (V_n, g_{rs}) ,

$$C : [a, b] \ni \tau \mapsto x(\tau) \in V_n$$

un vettore assegnato $\xi_0 \in T_{x(a)} V_n$ si trasporta parallelamente lungo C , e dunque si intenderà $\xi(\tau) \in T_{x(\tau)} V_n$, se e solo se

$$(22) \quad D_\tau \xi^l(\tau) = \frac{d}{d\tau} \xi^l(\tau) + \left\{ \begin{matrix} l \\ r \ s \end{matrix} \right\} (x(\tau)) \xi^r(\tau) \dot{x}^s(\tau) = 0,$$

cioè, la derivata covariante di ξ lungo la curva C sia nulla.

A questo punto Levi-Civita disegna lo spazio come riempito da un insieme di curve definite dal flusso di un'equazione differenziale associata ad un campo vettoriale, che sarà λ_n^l , $l = 1, \dots, n$. Per ogni punto P della varietà V_n , si costruiscono n direzioni ortogonali lungo l'unica curva passante per P come segue: $n - 1$ direzioni vengono tracciate in ogni punto P della curva, formando un sistema ortogonale Ω assieme alla direzione tangente a C in P . Questo approccio produce un "insieme di congruenze ortogonali di rette" in ogni punto, rappresentato da quantità con due indici. Ad esempio, la congruenza indicizzata da h è caratterizzata dal campo vettoriale $\lambda_h^1, \lambda_h^2, \dots, \lambda_h^n$ (denominati "parametri"), mentre la correlata forma differenziale è espressa dagli elementi reciproci $\lambda_{h|1}, \lambda_{h|2}, \dots, \lambda_{h|n}$ (chiamati "momenti"). L'indice n corrisponde alla direzione della curva C :

$$\dot{x}^r = \lambda_n^r \sum_{s=1}^n g_{rs} \dot{x}^s = \lambda_{n|r} \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Poiché le congruenze sono composte da n campi vettoriali λ_h^r (o n forme differenziali con $\lambda_{h|r}$), esse sono tutte funzioni di x . Levi-Civita propone la seguente definizione:

$$\begin{aligned} (23) \quad p_{hk} &:= \sum_{i=1}^n \frac{d\lambda_{h|i}}{d\tau} \lambda_k^i - \sum_{i,j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ l \end{matrix} \right\} \lambda_{h|i}^j \lambda_k^l \lambda_{h|l}^i = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_k^i \lambda_h^j \left[\frac{\partial \lambda_{h|i}}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ j \end{matrix} \right\} \lambda_{h|l}^i \right]. \end{aligned}$$

Ne risulta che $p_{hk} = \gamma_{hkn} = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{h|ij} \lambda_k^i \lambda_n^j = -p_{kh}$ e che ogni vettore ξ^j , rappresentato nella base delle congruenze $\lambda_{h|i}$, cioè $z_h = \sum_{i=1}^n \xi^i \lambda_{h|i}$, evolve per

trasporto parallelo con l'importante significativa relazione differenziale: $\frac{dz_h}{d\tau} = \sum_{k=1}^n p_{hk} z_k$.

Levi-Civita riesce dunque a costruire un ponte tra il concetto di parallelismo e la teoria delle congruenze. In particolare, il parallelismo e le sue implicazioni svolgono un ruolo cruciale nel chiarire le interconnessioni tra diverse discipline, analitiche e geometriche. Per esempio, nel suo trattato Levi-Civita mette in relazione la teoria delle forme pfaffiane con la geometria differenziale, e ne interpreta alcuni aspetti via l'uso della teoria delle congruenze e dei coefficienti di rotazione di Ricci⁽¹⁸⁾. Inoltre, come vedremo nei prossimi paragrafi, i coefficienti di rotazione consentono a Levi-Civita di riscrivere in termini di calcolo differenziale assoluto le equazioni che Einstein aveva trovato nel tentativo di unificare gravitazione ed elettromagnetismo (vedi Sezione 3.3).

Questo punto di vista culturale di Levi-Civita sull'uso delle tetradi risulterà essenziale in varie direzioni: basti per esempio pensare che la teoria di gravità quantistica (dei loops) di Carlo Rovelli è edificata sulla base delle tetradi, e non del tensore metrico, quali incognite di campo. La seguente affermazione di Rovelli ne sottolinea l'importanza:

Chiamo “campo gravitazionale” il campo tetrade piuttosto che il campo metrico di Einstein $g_{\mu\nu}(x)$. Ci sono tre ragioni per questo: (i) il modello standard non può essere scritto in termini di g perché i fermioni richiedono il formalismo tetrade; (ii) il campo tetrade è oggi più utilizzato di g nella gravità quantistica; e (iii) penso che rappresenti il campo gravitazionale in un modo concettualmente più chiaro di g . ([53], p. 34)

3.2 – La teoria unitaria di Einstein e il “Fernparallelismus”

In questo paragrafo introduciamo le equazioni di campo unificate proposte da Einstein in un lavoro del 1929 e “semplificate” da Levi-Civita in una memoria pubblicata lo stesso anno che analizzeremo nel prossimo paragrafo.

La teoria dell'elettone in relatività ristretta di Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) del 1928 ebbe

⁽¹⁸⁾ Per ulteriori dettagli su questi argomenti si veda [60], in particolare la sezione 6.3.

un profondo impatto sul panorama della fisica quantistica. L'equazione di Dirac non solo mostrava invarianza rispetto al gruppo di Lorentz, ma forniva anche una spiegazione corretta della struttura fine osservata nello spettro dell'idrogeno. Lo storico della scienza Dean Rickles osservò che l'introduzione dell'equazione di Dirac fu un importante ‘shock’ intellettuale per molti membri della comunità scientifica in quel periodo ([50], p. 84). Parte dello stupore derivava dal fatto che l'equazione di Dirac *non* era un'equazione tensoriale, cioè non aderiva al principio di covarianza generale, un principio fondamentale della relatività generale ampiamente accettato negli anni '20. Levi-Civita, che contribuì a stabilire il ruolo centrale della covarianza generale nella teoria della relatività generale, probabilmente condivideva questa prospettiva.

L'equazione di Dirac influenzò significativamente la ricerca di nuove teorie di campo unificate, con l'obiettivo di incorporare un'interpretazione dell'elettone in tali teorie. Diversi fisici tentarono di colmare il divario tra la teoria classica dei campi e la meccanica quantistica. Einstein, in particolare, cercò di derivare la meccanica quantistica come conseguenza di una teoria unificata che comprendesse sia i campi gravitazionali che quelli elettromagnetici. A partire dal 1928, concentrò la sua ricerca sul Fernparallelismus, che servì da base per le sue strutture geometriche. Riteneva questo approccio molto promettente, come dimostrato dalla pubblicazione, tra il 1929 e il 1930, di almeno nove articoli sul Fernparallelismus e sulle sue applicazioni alla teoria dei campi unificati.

Nel 1929, in una breve rassegna degli articoli di Einstein su questo argomento, i fisici Norbert Wiener e Manuel Sandoval Vallarta scrissero [65]:

Un'esigenza molto più urgente della relatività generale è l'armonizzazione con la teoria quantistica, in particolare con la teoria di Dirac sull'elettone con spin. Sulla base del parallelismo di Levi-Civita, il compito sembra irrisolto, poiché non disponiamo di mezzi adeguati per confrontare gli spin in punti diversi.

Come Einstein stesso riferisce in un suo primo lavoro sul Fernparallelismus, questo concetto gli permise di confrontare ‘sia i valori assoluti che le direzioni di vettori a distanza’.

Ma entriamo direttamente nella struttura geometrica del Fernparallelismus. Essa consiste in un formalismo localmente espresso dal “ n -Bein” (o

“Vierbein” in quattro dimensioni, oggi: campo di *tetrad*) h_a^ν , tale che ⁽¹⁹⁾

$$\begin{aligned} h_{a\mu} h^{a\nu} &= \delta_\mu^\nu \\ h_{a\mu} h_b^\mu &= \delta_{ab} \end{aligned}$$

dove

le lettere *latine* indicano i vettori del sistema,

le lettere *greche* le componenti di ciascuno.

Le componenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ sono date da:

$$g_{\mu\nu} = h_\mu^a h_{a\nu}.$$

Ancora con Wiener e Vallarta:

*Le quantità h_s^λ sembravano avere un **pie**de nel mondo macro-meccanico formalmente descritto dai potenziali gravitazionali di Einstein e caratterizzati dall'indice greco λ e l'altro **pie**de in un mondo Minkowskiano della micro-meccanica, caratterizzato dall'indice latino s . Che il mondo micro-meccanico dell'elettrone sia Minkowskiano è dimostrato dalla teoria di Dirac, in cui lo spin dell'elettrone appare come conseguenza del fatto che il mondo dell'elettrone non è euclideo, ma Minkowskiano. ([65], p. 317)*

Einstein definì il trasporto parallelo con il *differentiale esatto* (la verifica si può ritrovare in [4], App. A):

$$(24) \quad dA^\nu = -\Delta_{\mu\sigma}^\nu A^\mu dx^\sigma$$

dove

$$(25) \quad \Delta_{\mu\sigma}^\nu = h_a^\nu \frac{\partial h_{\mu a}}{\partial x^\sigma}$$

è, in termini moderni, una connessione affine che è “invariante per rotazione” e asimmetrica nei suoi indici in basso. La curvatura è nulla, mentre la torsione (ovvero la parte antisimmetrica della connessione)

$$(26) \quad \Lambda_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2}(\Delta_{\alpha\beta}^\nu - \Delta_{\beta\alpha}^\nu)$$

resta diversa da zero. Questa connessione determina un nuovo tipo di parallelismo chiamato “parallelismo a distanza” o “parallelismo assoluto”, in inglese “teleparallelism”. ⁽²⁰⁾ Einstein incluse il campo elettromagnetico nelle sue equazioni di campo tramite il

tensore di torsione $\Lambda_{\alpha\beta}^\nu$ interpretandone la traccia $\Lambda_{\alpha\nu}^\nu$ come i potenziali elettromagnetici ϕ_α .

L'obiettivo di Einstein era di ottenere una teoria unificata della gravitazione e dell'elettromagnetismo attribuendo la proprietà di Fernparallelismo a uno spazio metrico quadridimensionale. Dalla relazione di curvatura nulla, Einstein ricavò l'equazione

$$(27) \quad 0 = \Lambda_{\kappa\lambda;\alpha}^\alpha + \phi_{\lambda;\kappa} - \phi_{\kappa;\lambda} + \phi_\alpha \Lambda_{\kappa\lambda}^\alpha$$

dove ϕ_λ è il potenziale elettromagnetico definito sopra.

Utilizzando il suo sistema di riferimento ortogonale h_s^ν , definì la densità tensoriale $\mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\alpha$, che è antisimmetrica in κ e λ , come segue: ⁽²¹⁾

$$(28) \quad \mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\alpha = h(\Lambda_{\kappa\lambda}^\alpha + \phi_\lambda \delta_\kappa^\alpha - \phi_\kappa \delta_\lambda^\alpha)$$

dove h è il determinante di h_s^ν , quindi $h = \sqrt{|g|}$.

Einstein fu indotto a definire una sorta di “divergenza di densità” generalizzata di $\mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\alpha$, che denotò con $\dots/\alpha$:

$$(29) \quad \mathfrak{B}_{\kappa\lambda/\alpha}^\alpha = \mathfrak{B}_{\kappa\lambda;\alpha}^\alpha - \mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\sigma \Lambda_{\sigma\alpha}^\alpha.$$

Indicò la derivata covariante con un punto e virgola “nello stile dei matematici italiani” ⁽²²⁾ ([15], p. 1), sebbene Levi-Civita usasse spesso una virgola o nessun simbolo per indicarla. Poiché la curvatura è nulla, dedusse:

$$(30) \quad \mathfrak{B}_{\kappa\lambda/\alpha}^\alpha = 0.$$

Einstein stabilì infine le sue equazioni di campo unificato:

$$(31) \quad \mathfrak{B}_{\kappa\lambda/\lambda}^\alpha - \mathfrak{B}_{\kappa\tau}^\sigma \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha = 0$$

$$(32) \quad [h(\phi_{\kappa;\alpha} - \phi_{\alpha;\kappa})]/_\alpha = 0.$$

La sottolineatura degli indici indica il loro innalzamento o abbassamento (ad esempio $\Lambda_{\sigma\tau}^\alpha$ è il tensore puramente controvariante corrispondente a $\Lambda_{\sigma\tau}^\alpha$, cioè $\Lambda_{\sigma\tau}^\alpha = \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha g^{\sigma\kappa} g^{\tau\lambda}$).

Einstein fece notare che le equazioni (31), espresse in termini di pseudotensori, includevano *in prima approssimazione* le equazioni gravitazionali, men-

⁽¹⁹⁾ Adottiamo la stessa notazione usata da Einstein, anche se oggi non risulta completamente corretta.

⁽²⁰⁾ Sebbene Élie Cartan avesse già introdotto il Fernparallelismus all'inizio degli anni '20, che lui chiamava “parallelisme absolu”, Einstein non fece riferimento al lavoro di Cartan. In una lettera datata 8 maggio 1929, Cartan scrisse a Einstein per informarlo delle sue ricerche. Si veda [9], Doc. I.

⁽²¹⁾ La procedura dettagliata seguita da Einstein nel suo articolo del 1929 per determinare le equazioni di campo è descritta da Sauer in [54]. In particolare, Einstein usò lettere latine invece di lettere greche per gli indici inferiori della densità tensoriale, cioè $\mathfrak{B}_{kl}^\alpha$ invece di $\mathfrak{B}_{\kappa\lambda}^\alpha$.

⁽²²⁾ Dopo [26] e [38], insieme a molti altri, il punto e virgola divenne la notazione più diffusa.

tre le equazioni (32) insieme al requisito dell'esistenza di un potenziale vettore davano luogo alle equazioni di Maxwell nello spazio vuoto. Inversamente, affermò che si poteva dimostrare che “per ogni soluzione di queste equazioni esiste un Vierbein che soddisfa le equazioni (31)” ([15], p. 7).

Quest'ultima affermazione sarà il punto di partenza per la nota pubblicata da Levi-Civita nei Sitzungsberichte dell'Accademia di Berlino del 1929 [33] di cui ci occupiamo nel prossimo paragrafo.

La difficoltà intrinseca nella comprensione del nuovo lavoro di Einstein del 1929 fu messa in luce con tono benevolo dal fisico inglese Henry Thomas Herbert Piaggio (1884-1967), nel numero di *Nature* del 1° giugno 1929, con queste parole:

L'annuncio della pubblicazione della nuova teoria di Einstein ha suscitato grande interesse anche tra coloro che di solito non seguono i progressi della scienza. Purtroppo, questo interesse è stato accompagnato dalla sensazione che la nuova teoria, come le precedenti di Einstein, sia una misteriosa miscela di metafisica e matematica, così oscura e paradossale che l'uomo medio non può assolutamente acquisire alcuna nozione di cosa si tratti. In effetti, un autore francese ha dichiarato che “quando due professori tedeschi si incontrano e ciascuno riesce a capire ciò che dice, ma non riesce a capire l'altro, si dice che stiano parlando di Metafisica. Se, tuttavia, l'argomento della discussione è così profondo che non sono in grado di comprendere non solo l'altro, ma nemmeno se stessi, si parla di Metafisica Superiore. Ora, la Teoria di Einstein appartiene alla Metafisica Superiore”. Lo scopo del presente articolo è quello di dissipare tali opinioni. Tornando all'opera di Newton e Maxwell, possiamo tracciare la natura generale delle idee che erano predominanti nella mente di Einstein. Verrà mostrato come il desiderio di unificazione di fenomeni fisici apparentemente diversi sia stata la forza guida in entrambi i casi. Si spera che, attraverso semplici considerazioni i lettori privi di conoscenze matematiche possano comprendere la natura generale dei principi alla base delle nuove geometrie ⁽²³⁾.

3.3 – L'articolo di Levi-Civita del 1929

Nella sua nota del 1929 [33], pubblicata in tedesco nei Sitzungsberichte, Levi-Civita discusse la struttura

⁽²³⁾ H. T. H. Piaggio, *Einstein's and other Unitary Field Theories: An Explanation for the General Reader*, *Nature*, June 1, 1929, 839-841. La citazione è a p. 839.

geometrica di Einstein basata sul concetto di Fernparallelismus rispetto a un n -Bein. ⁽²⁴⁾ Levi-Civita si concentrò sull'aspetto matematico dell'articolo di Einstein del 1929 [15] piuttosto che sul suo contenuto fisico, sebbene la sua analisi raggiunge un risultato davvero importante: le equazioni elettromagnetiche di Maxwell e le equazioni gravitazionali sono ottenute *esattamente*, mentre nel precedente articolo di Einstein si deducono come approssimazione del primo ordine.

Dopo aver brevemente spiegato il contenuto dell'articolo di Einstein, Levi-Civita osservò “che il problema fondamentale sollevato da Einstein può essere risolto in modo più semplice e generale utilizzando i metodi perfettamente familiari del calcolo differenziale assoluto” ([34], p. 3) per i quali faceva riferimento all'edizione tedesca del suo trattato sul calcolo tensoriale pubblicata l'anno precedente (1928) [32]. Il fatto di dedurre le equazioni unificate di campo nel contesto di una varietà riemanniana in cui si applica naturalmente il formalismo tensoriale, rigettando la struttura matematica di Einstein che viveva una varietà con torsione, rappresentava per Levi-Civita un reale miglioramento della teoria. Tuttavia, non tutti condividevano il punto di vista di Levi-Civita, che insisteva sulla semplicità del calcolo differenziale assoluto rispetto al sistema delle n -Bein promosso da Einstein. Come scriveva Piaggio, i metodi di Levi-Civita erano “sufficientemente misteriosi”, soprattutto tra i fisici che non conoscevano i suoi trattati di calcolo tensoriale e non avevano familiarità con i suoi risultati ⁽²⁵⁾.

Per dedurre le equazioni del campo gravitazionale ed elettromagnetico, Levi-Civita utilizzò alcuni risultati contenuti nei suoi trattati sul calcolo differenziale assoluto, in particolare la teoria delle congruenze e i simboli di rotazione di Ricci che divenivano così centrali nel suo lavoro sulle equazioni di campo unificato. Più in dettaglio, nei suoi articoli del

⁽²⁴⁾ L'articolo fu pubblicato grazie all'intercessione di Einstein, si veda la lettera di Levi-Civita a Einstein del 21 marzo 1929 e pubblicata in [13], pp. 665-666.

⁽²⁵⁾ La recensione di Piaggio del lavoro di Levi-Civita *A simplified presentation of Einstein's unified field equations* [34] – traduzione inglese del suo articolo dei Sitzungsberichte [33] – è pubblicata nel giornale *The Mathematical Gazette*, 15 (1930), 274-275.

1929, Levi-Civita fornì ai lettori i “preliminari geometrici e formali”: in una varietà Riemanniana V_n di dimensione n introdusse le coordinate generali x^ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) e considerò i parametri di n congruenze λ_i^ν ($i = 0, \dots, n-1$), con cui definì un “reticolo di linee” (“lattice of lines”; “world lattice” nello spazio-tempo quadridimensionale) in V_n e una “ n -uplet” (le già citate n -Bein) in ogni punto. Seguendo la notazione di Einstein, utilizzò lettere greche per gli indici delle coordinate e lettere latine per gli indici che si riferiscono alla n -upla. Come di consueto, Levi-Civita introdusse le quantità $\lambda_{i|\nu}$ come elementi reciproci di λ_i^ν ; per ogni i esse formano un sistema covariante (“momenti” della n -upla in questione).

Inoltre, per ogni tensore misto di rango (p, q) con componenti

$$(33) \quad A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}$$

Levi-Civita ottenne “per composizione” con le quantità λ_i^ν , $\lambda_{i|\nu}$ gli invarianti:

$$(34) \quad A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q} = A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} \lambda_{i_1}^{\mu_1} \dots \lambda_{i_p}^{\mu_p} \lambda_{k_1|\nu_1} \dots \lambda_{k_q|\nu_q}$$

e viceversa, dalle formule (34) poteva dedurre le equazioni (33). Chiamò $A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q}$ un “tensore n -uplet” (o tensore n -Bein) e sottolineò:

Le componenti del tensore n -uplet sono puramente invarianti rispetto alle trasformazioni di coordinate; dipendono essenzialmente dall' n -uplet considerato, ma, come è facilmente verificabile, si comportano come un tensore anche quando le quantità λ_i^μ e λ_k^ν sono simultaneamente soggette a trasformazioni [pseudo-]ortogonali. ([34], p. 4)

Nel loro articolo del 1901 *Méthodes*, Ricci e Levi-Civita avevano già considerato le espressioni $A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q}$ come invarianti che non giocavano però alcun ruolo significativo. Nell'articolo del 1929, invece, le equazioni del campo gravitazionale ed elettromagnetico di Einstein si esprimono proprio in termini di tensori n -uplet che divengono dunque delle espressioni fondamentali.

A questo scopo, Levi-Civita considerò n coordinate $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$ in una varietà pseudo-Riemanniana con metrica indefinita:

$$(35) \quad g_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i \lambda_{i|\mu} \lambda_{i|\nu}$$

dove $\lambda_{i|\nu} \lambda_k^\nu = 0$ per $i \neq k$, e $e_i = \lambda_{i|\nu} \lambda_i^\nu = \pm 1$ (il numero totale di quantità negative e_i dipende dalla segnatura della metrica). Inoltre, introdusse i coefficienti di rotazione di Ricci:

$$(36) \quad \gamma_{ikl} = \lambda_{i|\nu\rho} \lambda_k^\nu \lambda_l^\rho$$

sottolineando che essi rappresentano le componenti di un 3-tensore rispetto alle trasformazioni pseudo-ortogonali a coefficienti costanti. Pertanto, le quantità γ_{ikl} formano un “sistema” che chiamò “tensore locale n -uplet”.

Mentre i termini “ n -uplet” o “tensori n -Bein” sono scomparsi dalla letteratura matematica, i coefficienti di Ricci sono ancora oggi utilizzati nella teoria della relatività generale, come vedremo nel paragrafo conclusivo 4.

Fatto importante: la differenza $\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk}$ risulta legata alla parte antisimmetrica della connessione $\Lambda_{\alpha\beta}^\nu$ introdotta da Einstein.

Infine, Levi-Civita dotò lo spazio-tempo quadridimensionale V_4 di un sistema quadruplo di congruenze ortogonali (world lattice), e dedusse la seguente traduzione delle equazioni del campo gravitazionale di Einstein sotto forma di tensori locali n -uplet:

$$(37) \quad G_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} G = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

dove

$$G_{ik} = \sum_{h=0}^3 e_h \gamma_{ih, hk}, \quad G = \sum_{k=0}^3 e_k G_{kk} = \sum_{h,k=0}^3 e_h e_k \gamma_{hk, hk}$$

con $e_0 = 1, e_1 = e_2 = e_3 = -1$.

Una scrittura che Levi-Civita giudicava più semplice poiché le equazioni gravitazionali in forma tetrade sono più naturali per la determinazione dei vettori tetradi, che rappresentano ora le vere incognite delle equazioni ([34], p. 17-18). In particolare, fornì un'interpretazione puramente geometrica delle sue equazioni grazie ai coefficienti di rotazione di Ricci che acquisivano una particolare interpretazione tensoriale come tensori tetradi di rango 3. Osservò inoltre che “ G_{ik} si comportano come tensori rispetto a tutte le trasformazioni pseudo-ortogonali (cioè, nel caso in questione, di Lorentz)” ([34], p. 17).

Come ultimo risultato notevole, introducendo un nuovo formalismo matematico come “la divergenza tensoriale pfaffiana” di un tensore antisimmetrico, oltre a un certo numero di ipotesi che possono apparire oggi azzardate, Levi-Civita giunse a mostrare come le sue equazioni conducano, in prima approssimazione, alle note equazioni di Maxwell⁽²⁶⁾.

Osserviamo che nell’articolo di Levi-Civita, le citazioni sono pochissime: il volume sulla relatività generale di von Laue e il classico libro di Eisenhart sulla geometria riemanniana⁽²⁷⁾. Cita anche due note di Umberto Cisotti (1882-1946) e Rocco Serini (1886-1964) per alcuni dettagli matematici sulle equazioni di Einstein.

Levi-Civita comunicò queste ricerche al Seminario Matematico di Roma nell’aprile 1929. Non possediamo il testo completo della sua conferenza ma solo una pagina della relazione pubblicata nei Rendiconti del Seminario Matematico. Qui insiste sull’aspetto per lui più importante e cioè mantenere la “connessione di Levi-Civita” invece della struttura geometrica di Einstein. Ci sembrano particolarmente significative le parole conclusive della sua conferenza:

Le presunzioni degli uomini di genio sono quasi sempre feconde. È quindi ben probabile che l'Einstein riuscirà a realizzare la coordinazione fra sistema differenziale e reticolo in modo veramente intimo e luminoso. Io vi ho esposto unicamente ciò che il buon senso suggerisce a chi, non guidato da specifiche intuizioni, si proponga di costruirsi col tecnicismo corrente un qualche modello concreto del reticolo einsteniano. ([35], pp. 75-76)

4. – Osservazioni conclusive

Significativamente, prima che apparissero gli articoli di Levi-Civita del 1929 sulle equazioni di campo di Einstein, Vladimir Fock (1898-1974) e

Dmitri Iwanenko (1904-1994) pubblicarono una nota sulla teoria quantistica relativistica [20], in cui interpretavano i risultati di Einstein ottenuti in [15] nel formalismo tensoriale di Levi-Civita. Il loro punto di partenza è il trattato tedesco di Levi-Civita sul calcolo tensoriale [32] e in particolare il capitolo 7 sulla teoria delle congruenze. Infatti, scrissero:

La nuova teoria gravitazionale di Einstein è strettamente correlata alla ben nota teoria delle congruenze delle linee ortogonali, formulata da Ricci. Per confrontare facilmente queste due teorie, possiamo qui riunire le notazioni di Ricci e Levi-Civita, presenti nel trattato Der absolute Differentialkalkül di Levi-Civita, con quelle di Einstein. ([20], pp. 801-802)

Gli autori fornirono una legenda in cui tradussero la notazione di Einstein nel formalismo di Levi-Civita basato sulla teoria delle congruenze e sui coefficienti di Ricci. In particolare, evidenziarono il legame tra la parte antisimmetrica della connessione utilizzata da Einstein e la differenza $\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk}$ dei coefficienti di Ricci.⁽²⁸⁾

Inoltre, considerarono l’espressione lineare nelle matrici di Dirac γ_j , $ds = \sum_j \gamma_j dx^j$, per trovare un ponte tra la gravitazione e la teoria quantistica. Nei mesi successivi, si resero però conto che la loro “geometria quantistica lineare” poteva essere meglio compresa come una derivata covariante delle funzioni d’onda complesse a 4 componenti che chiamarono “semivettori” e che altro non sono che gli odierni *spinori*⁽²⁹⁾. È significativo che in un importante articolo che indagava l’equazione di Dirac, Fock [19] preferì tralasciare la struttura geometrica di Einstein basata sul Fernparallelismus per abbracciare le idee presentate da Levi-Civita nei suoi articoli del 1929, in cui le congruenze e i coefficienti di Ricci costituiscono il fondamento

⁽²⁶⁾ Le ipotesi e i calcoli di Levi-Civita ci porterebbero troppo lontano dall’oggetto di questo lavoro. Il lettore interessato potrà consultare l’articolo [4], in particolare p. 105-107, per maggiori dettagli.

⁽²⁷⁾ M. von Laue, *Die Relativitätstheorie* vol. II, Vieweg, Brunswick, 1921; L.P. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1926.

⁽²⁸⁾ In particolare, come affermato anche nella legenda di Fock e Iwanenko, abbiamo che: $h_{\nu i} = \lambda_{i|\nu}$.

⁽²⁹⁾ Nel 1929, Weyl e Fock (inizialmente in collaborazione con Iwanenko) introdussero indipendentemente l’uno dall’altro una struttura spinoriale locale sulle varietà di Lorentz al fine di stabilire una teoria relativistica generale dell’equazione di Dirac. Vedi [55].

stesso della teoria. Menzionò inoltre, in una nota a piè di pagina, “lo splendido riassunto delle formule e dei fatti più importanti nell’articolo di T. Levi-Civita” [33] ([19], p. 3).

Le pubblicazioni di Einstein e Levi-Civita presentate nei paragrafi precedenti furono immediatamente seguite da un articolo pubblicato dal matematico e cosmologo britannico George C. Mc Vittie (1904-1988), significativamente intitolato *On Levi-Civita’s modification of Einstein’s Unified Field Theory* [37]. Mc Vittie sottolineò che Levi-Civita aveva modificato la teoria del Prof. Einstein

scartando il concetto di “parallelismo a distanza rispetto a 4 vettori di riferimento ortogonali”, che è alla base della teoria di quest’ultimo, e ottenendo una descrizione completa dei fenomeni gravitazionali ed elettromagnetici tramite i coefficienti di rotazione di Ricci di 4 congruenze ortogonali di rette che, in ogni punto, definiscono 4 vettori di riferimento ortogonali in uno spazio di Riemann. ([37], p. 1033)

Nel suo articolo, Mc Vittie applicò la teoria di Levi-Civita a un caso particolare “in cui è nota una soluzione esatta delle usuali equazioni gravitazionali ed elettromagnetiche della teoria della relatività” ([37], p. 1033). Confrontò quindi i risultati con quelli dedotti mediante l’uso delle equazioni di campo di Einstein e scoprì che le due teorie, quella di Einstein e quella di Levi-Civita, portavano a risultati identici.

In Italia, oltre a Levi-Civita, altri fisici e geometri differenziali utilizzarono i coefficienti di rotazione per tentare una teoria una nuova e più efficace teoria dei campi unificati. Menzioniamo i casi di Gleb Wataghin (1899-1986) e Attilio Palatini⁽³⁰⁾. Wataghin era un fisico, di origine russa, laureato in fisica (1922) e poi in matematica (1924) all’Università di Torino. Successivamente, nel 1934, si trasferì in Brasile dove partecipò alla fondazione della nuova Facoltà di Filosofia, Scienze e Lettere di São Paulo⁽³¹⁾. Ispi-

randosi all’articolo di Levi-Civita del 1929 [33], Wataghin redasse diversi lavori in cui utilizzava i coefficienti di rotazione di Ricci per migliorare i risultati del maestro⁽³²⁾. Nell’approccio allo studio delle teorie unificate e ancora per semplificare il difficile formalismo di Einstein, anche Palatini seguiva la stessa strada intrapresa da Levi-Civita di cui era stato allievo diretto all’Università di Padova [43].

Nel primo trattato italiano sul calcolo tensoriale del dopoguerra, il celebre *Finzi-Pastori*, si trovano citati nel quadro della geometria differenziale i coefficienti di rotazione di Ricci introdotti attraverso la teoria delle congruenze ([18], p. 358-359).

Infine, notiamo come oggi l’approccio di Levi-Civita sia ancora utilizzato in alcuni capitoli della relatività generale.

Nel loro libro, Fernando De Felice e Christopher James Clarke, adottando il metodo delle tetradi, mettono in relazione i coefficienti di rotazione di Ricci con il trasporto di Fermi-Walker ([10], p. 140). Ulteriori utilizzazioni dei coefficienti di rotazione di Ricci in geometria differenziale e in relatività generale si trovano in ([39], p. 247-248) e in ([12], p. 662-663).

Nel suo trattato, *Lezioni di Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*, Maurizio Gasperini approfondisce ulteriormente l’uso moderno dei coefficienti di rotazione di Ricci:

La rappresentazione geometrica dell’interazione gravitazionale sviluppata ha fatto principalmente uso linguaggio della geometria differenziale classica, basato sulla nozione di metrica Riemanniana g e connessione di Christoffel Γ . La curvatura della varietà spazio-temporale, la sua evoluzione dinamica, e l’interazione con le sorgenti materiali è stata descritta mediante equazioni differenziali formulate con le variabili g e Γ .

In questo capitolo introdurremo un modo alternativo, ma completamente equivalente, di descrivere la geometria di una varietà Riemanniana basato sulle nozioni di tetrade V e connessione di Lorentz ω . Questo diverso linguaggio è particolarmente appro-

⁽³⁰⁾ Altri studiosi, come Enea Bortolotti (1896-1942) e Enrico Bompiani (1889-1975), impiegarono l’approccio di Levi-Civita. Per ulteriori dettagli si veda [4], paragrafo 4 e [60], capitolo 7.

⁽³¹⁾ Sul suo ruolo nell’istituzione dell’Università di São Paulo, si veda [58].

⁽³²⁾ Si veda per esempio l’articolo in cui Wataghin dichiarava esplicitamente la superiorità dei metodi di Levi-Civita, basati sulla teoria delle congruenze e i coefficienti di Ricci, rispetto a quelli di Einstein ([63], p. 424).

piato per descrivere la dinamica dei campi spinoriali in uno spazio-tempo curvo – e quindi per rappresentare le interazioni gravitazionali dei fermioni – come vedremo nel capitolo successivo.

Inoltre, e soprattutto, questo nuovo formalismo permette di formulare la teoria della relatività generale come teoria di gauge per un gruppo di simmetria locale, mettendo così la gravitazione sullo stesso piano delle altre interazioni fondamentali (elettromagnetiche, deboli e forti). Vedremo, in particolare, che la simmetria di gauge (non-abeliana) per la gravitazione è l'invarianza locale di Lorentz, e che la curvatura dello spazio-tempo può essere interpretata, in questo contesto, come campo di Yang-Mills per la connessione di Lorentz, che gioca il ruolo di potenziale di gauge ⁽³³⁾ ([21], p. 209)

Il notevole risultato di Ricci, emerso più volte nel nostro articolo, che coniuga i coefficienti di rotazione con il tensore di curvatura di Riemann (vedi Sezione 3.1) si ritrova dunque in numerosi trattati degli ultimi decenni, utilizzato in diversi contesti della fisica teorica.

Ringraziamenti

Franco Cardin ringrazia per il sostegno del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica dell'INdAM, nel cui ambito ha collaborato per questo lavoro.

Rossana Tazzioli desidera ringraziare l'Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences di Cambridge per il supporto e l'ospitalità durante il programma "History of Mathematics" (EPSRC n. EP/R014604/1), nel corso del quale è stato svolto il lavoro relativo a questo articolo.

⁽³³⁾ In un messaggio privato a noi diretto, per il quale lo ringraziamo, Gasperini osservava che "i coefficienti di Ricci, e la corrispondente connessione di Levi-Civita, dovrebbero essere usati da tutti coloro che vogliono scrivere l'equazione per un campo spinoriale accoppiato minimamente alla geometria di uno spazio-tempo curvo, per discutere i possibili effetti fisici della gravità sulle interazioni spinoriali (vedi ad esempio il successivo Cap. 13 del mio libro [22]). Purtroppo ho notato invece che nella moderna letteratura questo generale (e corretto) approccio viene spesso ignorato, partendo da una equazione di Dirac in cui la geometria curva si accoppia unicamente alla parte assiale della corrente spinoriale, trascurando il possibile contributo vettoriale che si accoppia alla traccia dei coefficienti di Ricci (vedi equaz. 13.39 del mio testo [22])."

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] BERGER M., *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer, Berlin, 2003.
- [2] BIANCHI L., *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann*. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (5), **11** (1902), 3-7.
- [3] CARDIN F., *Il concetto di curvatura. Genesi, sviluppo e intreccio fisico-matematico*. Springer, Milano, 2023.
- [4] CARDIN F., TAZZIOLI R., *Levi-Civita simplifies Einstein. The Ricci rotation coefficients and unified field theories*. Archive for History of Exact Sciences, **78** (2024), no. 1, 87-126.
- [5] CARDIN F., TAZZIOLI R., *Tensors and invariants from Ricci to Bourbaki*, in *Towards a philosophy of mathematical invariants* (F. Jaëck, Ed.), Spartacus-IDHF, (forthcoming) 2025.
- [6] CATTANI C., DE MARIA M., *The 1915 epistolary controversy between Einstein and Tullio Levi-Civita*, in *Einstein and the history of general relativity: Einstein Studies I*, (D. Howard, J. Stachel, Eds.), Birkhäuser, New York, 1989, p. 175-200.
- [7] CATTANI C., *I primi anni della relatività in Italia e la corrispondenza Einstein-Levi-Civita*. Quaderni di Storia della Fisica **3** (1998), 25-52.
- [8] COGLIATI A., *Ars inveniendi*, Pisa University Press, Pisa, 2022.
- [9] DEBEVER R., *Élie Cartan and Albert Einstein. Letters on absolute parallelism, 1929-1932*. Princeton University Press, Princeton, 1979.
- [10] DE FELICE F., CLARKE C. J. S., *Relativity on curved manifolds*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [11] DELL'AGLIO L., *Un "case study" nell'accettazione di teorie matematiche. Sviluppo e diffusione del calcolo differenziale assoluto in epoca pre-relativistica*. Bollettino di storia delle scienze matematiche, **24** (2004), 9-65.
- [12] DERUELLE N., UZAN J. P., *Relativity in modern physics*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, Oxford, 2018.
- [13] EINSTEIN A., *The Collected Papers of Albert Einstein*, 17 vols., ed. by D. Kormos-Buchwald et al. Princeton University Press, Princeton, 1987-2024.
- [14] EINSTEIN A., *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsberichte K. Preussische Akademie Wiss. Berlin, 1914, 1030-1085.
- [15] EINSTEIN A., *Zur einheitlichen Feldtheorie*. Sitzungsberichte K. Preussische Akademie Wiss. Berlin 1929, 2-7.
- [16] EINSTEIN A., GROSSMANN M., *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. Zeitschrift für Mathematik und Physik, **62** (1913), 225-261. English translation in: *The collected papers of Albert Einstein*, Vol. 4, Princeton University Press, Princeton, 1996. p. 151-186.
- [17] EINSTEIN A., FOKKER A. D., *Nordström's Theory of Gravitation from the Point of View of the Absolute Differential Calculus – Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls*, Annalen der Physik, **44** (1914), 321-328. English translation in: *The collected papers of Albert Einstein*, Vol. 4, Princeton University Press, Princeton, 1996, p. 293-299.
- [18] FINZI B., PASTORI M., *Calcolo tensoriale e applicazioni*, 2^a ed. Zanichelli, Bologna, 1961.

- [19] FOCK V., *Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons*. Zeitschrift für Physik, **57** (1929), 261-277.
- [20] FOCK V., IWANENKO D., *Über eine mögliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie*. Zeitschrift für Physik, **54** (1929), 798-802.
- [21] GASPERINI M., *Lezioni di Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2010.
- [22] GASPERINI M., *Theory of Gravitational Interactions*. Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer, 2013.
- [23] HAWKING S.W., ELLIS G.F.R., *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [24] HERMANN R. (Ed.), *Ricci and Levi-Civita's tensor analysis paper*. Math Sci Press, Brook-line, 1975.
- [25] HILBERT D., *Die Grundlagen der Physik*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse **3** (1915), 395-407.
- [26] LANDAU L. D., LIFSHITZ E. M., *The classical theory of fields*. Addison-Wesley, Oxford-London-Paris-Frankfurt, 1962.
- [27] LEVI-CIVITA T., *Opere Matematiche*, 6 vols. Zanichelli, Bologna, 1954-1973.
- [28] LEVI-CIVITA T., *Sugli invarianti assoluti*. Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti **5** (1893-94), 1447-1523; in [27], I, p. 41-100; anche in *Copia anastatica del manoscritto della tesi di laurea (1894), selezione di opere e relazioni per l'intitolazione del Dipartimento di Matematica a Tullio Levi-Civita* (F. Cardin, F. Rampazzo e L. Salce, Eds.), Padova University Press, Padova, 2018.
- [29] LEVI-CIVITA T., *Sulla nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **42** (1916), 173-205; in [27], IV, p. 1-39.
- [30] LEVI-CIVITA T., *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*. Atti della R. Accademia dei Lincei, (5) **26** (1917), 381-391; in [27], IV, p. 47-58.
- [31] LEVI-CIVITA T., *The absolute differential calculus. Calculus of tensors*, Translated from the 1925 Italian version (E. Persico, ED.). Blackie & Son, London/Glasgow, 1927. Reprint Dover Publications, 2005.
- [32] LEVI-CIVITA T., *Der absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik*. Springer, Berlin, 1928.
- [33] LEVI-CIVITA T., *Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichung*. Sitzungsberichte K. Preussische Akademie Wiss. Berlin, 1929, 137-153; in [27], V, 1-22.
- [34] LEVI-CIVITA T., *A simplified presentation of Einstein's unified field theory*. Blackie & Son, London/Glasgow, 1929.
- [35] LEVI-CIVITA T., *Sopra la nuova rappresentazione unitaria dei fenomeni fisici proposta dall'Einstein*. Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma, 1928-29 (2) **6** (1929), 75-76.
- [36] MALTESE G., *The rejection of the Ricci tensor in Einstein's first tensorial theory of gravitation*. Archive for History of Exact Sciences **41** (1991), no. 4, 363-381.
- [37] MCVITTIE G. C., *On Levi-Civita's Modification of Einstein's Unified Field Theory*. Philosophical Magazine **8** (1929), 1033-1040.
- [38] MISNER C. W., THORNE K. S., WHEELER J. A., *Gravitation*. W. H. Freeman and Co, San Francisco, 1973.
- [39] NAKAHARA M., *Geometry, topology and physics. Graduate Student Series in Physics*. Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990.
- [40] NORTON J., *Einstein found his field equations, 1912-1915*, in *Einstein and the history of general relativity: Einstein Studies I*, (D. Howard, J. Stachel, Eds.), Birkhäuser, New York, 1989, p. 101-159.
- [41] PAIS A., *Sottile è il Signore*, La Cultura Scientifica. Ed. Boringhieri, Torino, 1987.
- [42] PALATINI A., *Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **43** (1919) 1, 203-212.
- [43] PALATINI A., *Intorno alla nuova teoria di Einstein*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (6) **10** (1929), 633-639.
- [44] RICCI CURBASTRO G., *Opere*, ed. by U.M.I., 2 vols. Cremonese, Roma, 1956-57.
- [45] RICCI CURBASTRO G., *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella Analisi applicata*. Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario della origine della Università di Bologna, Vol. III, Tipografia del Seminario, Padova, 1888, 3-23; in [44], I, p. 245-267.
- [46] RICCI CURBASTRO G., *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*. Memorie della R. Accademia dei Lincei (5) **2** (1896), 276-322; in [44] II, p. 1-61.
- [47] RICCI CURBASTRO G., *Lezioni sulla teoria delle superficie*. Drucker, Verona, 1896.
- [48] RICCI CURBASTRO G., *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5) **11** (1902), 355-362; in [44], II, p. 293-300.
- [49] RICCI CURBASTRO G., LEVI-CIVITA T., *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Mathematische Annalen **54** (1901), 125-201; in [44], II, 185-271.
- [50] RICKLES D., *Covered with deep mist. The development of Quantum Gravity(1916-1956)*. Oxford University Press, Oxford, 2020.
- [51] RIEMANN B., *Gesammelte mathematische Werke and wissenschaftlicher Nachlass*, edited by H. Weber, Teubner, Leipzig, 1876; 2nd ed. 1892; repr. Springer, New York, 1990.
- [52] RIEMANN B., *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13** (1868), 133-152; In [51], pp. 304-319. English translation in *Bernhard Riemann, On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry*, edited by J. Jost, Birkhäuser, 2016.
- [53] ROVELLI C., *Quantum gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, 2010.
- [54] SAUER T., *Field equations in teleparallel space-time: Einstein's Fernparallelismus approach towards unified field theory*. Historia Mathematica, **33** (2006), 399-439.
- [55] SCHOLZ E., *Local spinor structures in V. Fock's and H. Weyl's work on the Dirac equation(1929)*, in *Géométrie au XXe siècle. Histoire et horizons* (a cura di D. Flament, J. Kounieher, P. Nabonnand, J. J. Szczeciniarz), Hermann, Paris, 2005, p. 284-301.
- [56] SPEZIALI P., *Ricci Curbastro, Gregorio*, in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990). <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/ricci-curbastro-gregorio>.

- [57] SPIVAK M., *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II.* Published by M. Spivak, Brandeis Univ., Waltham, Mass. 1970.
- [58] TAVARES H. D. , BAGDONAS A., VIDEIRA, A.A.P. , *Transnationalism as scientific identity: Gleb Wataghin and Brazilian physics, 1934-1949.* Historical Studies in the Natural Sciences **33** (2020), 248-301
- [59] TAZZIOLI R., *Beltrami e i matematici "Relativisti". La meccanica in spazi curvi nella seconda metà dell'Ottocento.* Quaderni dell'Unione Matematica Italiana N. 47, Pitagora, Bologna, 2000.
- [60] TAZZIOLI R., *From differential geometry to relativity. Levi-Civita's lectures on the absolute differential calculus, 1925-1928,* European Mathematical Society, Berlin (forthcoming), 2025.
- [61] TOSCANO F., *Luigi Bianchi, Gregorio Ricci Curbastro e la scoperta delle identità di Bianchi.* in *Atti del XX Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia* (a cura di E. Schettino), Napoli, 2000, p. 353-370.
- [62] TOSCANO F., *Il genio e il gentiluomo. Einstein e il matematico italiano che salvò la teoria della relatività generale,* Sironi Editore, Milano, 2004.
- [63] WATAGHIN G., *Sull'applicazione della relatività alla meccanica ondulatoria.* Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, XVIII Riunione, 1929, II, 5 pp.
- [64] WEYL H., *Zur Gravitationstheorie.* Annalen der Physik, **54** (1917), 117-145.
- [65] WIENER N., VALLARTA M. S., *Unified field theory of electricity and gravitation.* Nature, March 2, 1929, 317.



Franco Cardin

Franco Cardin è Professore Emerito di Fisica Matematica presso il Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita dell'Università di Padova. Ha insegnato Meccanica Razionale, Fisica Matematica, Modelli Fisco-Matematici, Topologia, Chimica e Matematica, Symplectic Mechanics nel Curriculum internazionale ALGANT, Sviluppi del Pensiero Matematico. Ha collaborato alla Scuola Galileiana di Studi Superiori dell'Università di Padova insegnando Geometria Differenziale. I suoi interessi scientifici coinvolgono la teoria geometrica dell'equazione di Hamilton-Jacobi e correlate teorie variazionali in topologia simplettica. Da alcuni anni partecipa a ricerche su problemi di trasporto ottimo e teoria del controllo rivolti ad argomenti di natura biologica. Ha pubblicato alcuni lavori di carattere storico sulla figura di Tullio Levi-Civita. È socio dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti.



Rossana Tazzioli

Rossana Tazzioli è professoressa di Storia della matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lille (Francia) dal 2009. I suoi interessi di ricerca riguardano la geometria differenziale e la fisica matematica nei secoli XIX e XX, con particolare attenzione ai lavori di Gauss, Riemann, Beltrami e Levi-Civita, ai quali ha dedicato numerose pubblicazioni. Un altro ambito di studio è il ruolo dei matematici durante la Prima guerra mondiale e nel periodo tra le due guerre, con un focus specifico sull'attività dell'Unione Matematica Italiana negli anni del fascismo. Fa parte dell'editorial board della rivista *Historia Mathematica* e della collana dell'*European Mathematical Society Heritage of European Mathematics*. È inoltre socia dell'*Académie Internationale d'Histoire des Sciences*.