
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PATRIZIA LONGOBARDI, MERCEDE MAJ

Omaggio a Mario Curzio

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 10
(2025), n.2, p. 199–217.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_2_199_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_2_199_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Omaggio a Mario Curzio

PATRIZIA LONGOBARDI

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

E-mail: plongobardi@unisa.it

MERCEDE MAJ

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

E-mail: mmaj@unisa.it

Sommario: *Con questo articolo si desidera ricordare la figura scientifica ed umana di Mario Curzio, e rendere omaggio ad uno studioso che ha dato un così grande contributo allo sviluppo dell'Algebra in Italia.*

Abstract: *With this article, we wish to honor the scientific and human qualities of Mario Curzio, and pay tribute to a researcher who made such a significant contribution to the development of Algebra in Italy.*

Mario Curzio si è spento nel pomeriggio del 7 settembre 2015. Se n'è andato in silenzio, con discrezione, con l'eleganza e la signorilità che ne hanno contraddistinto l'intera vita. Noi eravamo a Siena, dove avevamo organizzato, nell'ambito del XX Congresso dell'Unione Matematica Italiana, la Sezione Speciale di Algebra, la disciplina che Mario aveva tanto amato e contribuito a sviluppare in Italia.

Con questo articolo desideriamo rendergli omaggio e ricordarlo, come studioso profondo e rigoroso, come ricercatore curioso e originale, ma soprattutto come vero gentiluomo, persona squisita e piacevolissima.



Mario Curzio
Bressanone, 11/7/1928 – Napoli, 7/9/2015

Accettato: 29 maggio 2025.

Lo studioso ed il Maestro

Mario Curzio era nato a Bressanone l'11 luglio del 1928. Il padre Giuseppe era un noto magistrato, ma anche un celebre poeta e scrittore, brillante ed ironico, autore di numerosi romanzi e libri di poesie. La sua famiglia era poi formata dalla madre Grazia e dalla sorella Clemia, e Mario era affezionatissimo ad entrambe.

Il padre viaggiava molto con la famiglia, per motivi di lavoro, e questo sicuramente contribuì a sviluppare la flessibilità di Mario, la sua apertura mentale, la sua assenza di pregiudizi, il suo interesse per le diverse culture. Mario frequentò il liceo classico nel Castello di Torremaggiore in Basilicata, poi intraprese gli studi di Matematica a Napoli.

Nel 1951 l'importante incontro con il suo primo Maestro, Renato Caccioppoli. Egli stesso descrive il loro incontro nella bella intervista resa a Romano Gatto per Lettera Pristem, nel 1993, ([19]): «Da studente avevo già incontrato Caccioppoli molte volte. Ma a decidere i nostri rapporti fu l'esame di Analisi



Mario giovanissimo

Superiore, nel 1951. Esso faceva seguito ad un corso che egli aveva dettato per due soli studenti uditori, Gaetano Caricato ed io. L'esame andò molto bene e Caccioppoli mi propose di prendere la tesi con lui.»



Donato Greco, Renato Caccioppoli e Mario Curzio a Napoli

«Era il periodo in cui Caccioppoli si occupava di teoria della Misura e in particolare di quella teoria delle superfici che avrebbe poi condotto ai risultati fondamentali sulle superfici minime di Ennio De Giorgi, Enrico Giusti, Carlo Miranda, Enrico Bombieri,... Alla sua base stanno alcuni insiemi, che in seguito furono chiamati insiemi di Caccioppoli, definiti mediante assiomi. Caccioppoli riteneva che la definizione contenesse qualche elemento sovrabbondante e mi propose di determinarlo. Lo feci e questa fu la mia tesi.»

Nel 1952 Mario Curzio conseguì la laurea in Matematica a Napoli. Dopo la laurea, iniziò la sua carriera come Assistente straordinario, il suo primo incarico furono le esercitazioni al corso tenuto

dal Professor Guido Zappa. Un po' per le condizioni di salute di Caccioppoli, ma sicuramente tanto per la passione e l'amore che gli procurò subito la materia, Mario Curzio cominciò a lavorare in Algebra, con Zappa. Rimase però legatissimo a Caccioppoli, per cui nutriva affetto e gratitudine; come ricorda Mario nell'intervista a Gatto: «Caccioppoli seguiva la mia carriera, si interessava di quello che facevo anche se non si trattava più di Analisi. Lo vedevo spesso, almeno una volta al mese, al di fuori dell'Università, si andava a cena o qualche volta si andava a casa sua.»

La collaborazione tra Curzio e Zappa continuò anche quando, nel novembre 1953, Zappa fu trasferito a Firenze.



Mario Curzio e Guido Zappa a Napoli

Nel 1958 Mario conseguì la libera docenza in Algebra Superiore, l'ultima a numero chiuso.



Antonio Zitarosa, Guido Zappa e Mario Curzio a Napoli

Tra la fine del 1959 e l'inizio del 1960, Curzio partì per Parigi con una borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Nell'intervista su lettera Pristem, Mario ricorda: «A Parigi, sotto la supervisione teorica di P. Dubreil che era professore a Parigi, ma sotto quella effettiva di Michel Lazard che, professore a Poitiers, abitava a Parigi, imparai parecchie cose e scrissi anche qualche lavoro». Sicuramente il periodo trascorso in Francia fu importantissimo per la crescita scientifica del giovane Curzio, in particolare egli fu influenzato tantissimo dalla Scuola bourbakista, da cui apprese l'eleganza e il rigore che caratterizzarono poi i suoi articoli, le sue conferenze, le sue lezioni ed i suoi libri.

Nell'ottobre del 1962 vinse una delle tre cattedre di Algebra messe per la prima volta a concorso in Italia, insieme con Giovanni Zacher e Giorgio Trevisan, e fu nominato professore a Bari. L'anno dopo il Ministero assegnò a Napoli una cattedra nuova che fu destinata all'Algebra, e così Curzio poté rientrare a Napoli. Mario raccontava sempre, commosso, la telefonata con cui il professor Miranda, nella primavera del 1963, gli comunicò la notizia.

Iniziò così la lunga e brillante carriera di Curzio a Napoli.



Lucio Lombardo Radice, Mario Curzio e Vittorio Dalla Volta a Napoli

Curzio fu un docente estremamente efficace, capace di entusiasmare, ma anche di incuriosire e stimolare. Le sue lezioni del corso di Algebra non erano mai facili o banali, e avevano il grande pregio di spingere lo studente alla riflessione e al ragionamento autonomo. Ricordiamo poi con grandissimo piacere i suoi corsi monografici su aspetti speciali della Teoria dei gruppi, della Teoria dei numeri, dell'Algebra in generale, uno diverso ogni anno; abbiamo ritrovato i suoi appunti, rigorosamente scritti a mano, con la sua calligrafia chiara e ordinatissima.

Fu impegnato anche in cariche amministrative e gestionali, negli anni fu, tra l'altro, Segretario della Facoltà di Scienze, Direttore dell'Istituto di Matematica, membro della Giunta di Dipartimento, Socio dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche e dell'Accademia Pontaniana, membro del comitato editoriale della rivista Ricerche di Matematica.

Anche a livello nazionale lavorò tantissimo per lo sviluppo dell'Algebra, ricordiamo, tra l'altro, il suo impegno nella Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana dal 1976 al 1979, ed i corsi

avanzati di avviamento alla ricerca da lui tenuti, organizzati dall'INdAM, Istituto Nazionale di Alta Matematica Francesco "Severi".



Adriano Barlotti e Mario Curzio

Curzio fu un Maestro molto particolare, mai invadente o opprimente, ma sempre pronto a lodare e ad entusiasmarsi per ogni risultato dei suoi allievi. Tra di essi ricordiamo, oltre alle autrici di questo articolo: Anna Bruna D'Andrea, Bianca Della Corte, Clorinda De Vivo, Gabriele Giordano, Francesco de Giovanni, Anna Franchetta, Silvana Franciosi, Antonella Leone, Salvatore Rao, Fernando Tuccillo.



Mario con Francesco de Giovanni



Mario con Mercede Maj

Era un grandissimo piacere parlare con Mario di Matematica, era uno studioso molto colto, non solo nel suo campo, la Teoria dei Gruppi, ma anche in Geometria, Logica, Analisi Matematica. Egli stesso ricorda con orgoglio, in un articolo dedicato a Carlo Miranda, le discussioni con il professore sul problema di Minkowski, avute in occasione della preparazione di un seminario a Pisa da parte di Miranda.



Mario Curzio

Con Mario era però un piacere parlare di tutto, di storia, letteratura, filosofia, musica ... e di sport naturalmente. Mario era un appassionato di tennis, sport che seguiva e praticava, e, come ogni buon napoletano, tifosissimo della squadra di calcio del Napoli. Quando, nel 1989, il Napoli vinse lo scudetto per la seconda volta, ci suggerì di andare tutti in Dipartimento vestiti di azzurro, il colore del Napoli.

Mario era legatissimo all'amata moglie Mariella, con cui formava una coppia affiatata e piacevolissima.



Mariella e Mario Curzio, negli anni '70

Segue una foto particolarmente cara ad una delle autrici di questo articolo: Mario, testimone di nozze al suo matrimonio, nel 1984, con Mariella.



Mario e Mariella Curzio

Quest'altra foto è del 1989: in occasione di una gita in costiera sorrentina, con Bernhard Amberg, Mario e Mariella si fermarono a Piano di Sorrento, in visita ai genitori di Patrizia.



Nel 1998 venne nominato Professore fuori ruolo e nel 2003 collocato a riposo. Dal 2004 è stato Professore Emerito dell'Università degli Studi di Napoli Federico II. Ma Mario Curzio non smise di studiare, ricordiamo la sua conferenza dal titolo "Gruppo di Galois secondo Galois", tenuta a Napoli nell'ottobre 2011, in occasione del convegno "Aspetti dell'Algebra Moderna", organizzato per il bicentenario della nascita di Galois.



Mario Curzio, Napoli 2011



Nikolai Vavilov con Mario Curzio, Napoli 2011

La produzione scientifica

Nella sua carriera di matematico Mario Curzio ha scritto più di 50 articoli e 6 libri. I suoi articoli trattano svariati argomenti ancora oggi molto attuali, ed hanno come tema per lo più la Teoria reticolare dei gruppi, gruppi di automorfismi, problemi combinatori in Teoria dei gruppi, svariati aspetti della Teoria dei gruppi finiti o infiniti.

Gli articoli sulla Teoria reticolare dei gruppi

Il primo lavoro di Mario Curzio (cfr. [C1]) tratta di un problema in Teoria dei reticoli posto da G.

Birkhoff nel suo testo [2]: dato un intero positivo N , determinare il minimo intero positivo $\psi(N)$ tale che ogni reticolo di ordine $\nu \geq \psi(N)$ contenga almeno un sottoreticolo d'ordine N . Curzio risolve il problema per i reticoli modulari di lunghezza 3, dove un reticolo L viene detto *modulare* se, per ogni $x, y, z \in L$, vale la legge modulare, cioè da $x \leq z$ segue $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Curzio prova che, per reticoli modulari di lunghezza 3, tale intero positivo, che indica con il simbolo $\psi_{M_3}(N)$, è strettamente maggiore di $2n^2 - 2n + 4$ e minore di $2m^2 - 2m + 5$, dove $n - 1$ è il massimo intero della forma p^k (p primo, $k \geq 1$) per cui si abbia $4n - 2 < N$ ed m il minimo intero positivo per cui si abbia $N \leq 2m + 4$. In particolare, in [C1] sono descritti tutti i reticoli modulari di lunghezza 3, è provato inoltre che dato un qualunque intero $m > 2$, ogni reticolo modulare di lunghezza 3, avente ordine $\nu \geq 2m^2 - 2m + 4$, possiede almeno un sottoreticolo proprio d'ordine $2m + 4$, e, se $\nu > 2m^2 - 2m + 4$, il reticolo possiede anche sottoreticoli di tutti gli ordini minori di $2m + 4$. Lo studio del problema di Birkhoff viene poi esteso ai reticoli sopramodulari e sottomodulari nel lavoro [C6]. Un reticolo L vien detto *sopramodulare* (*sottomodulare*) se è a catene limitate finite e, con $a, b \in L$, $a \vee b$ copre b se a copre $a \wedge b$ (risp. se b copre $a \wedge b$ ogni volta che $a \vee b$ copre a). È provato in [C6] che, per ogni $n \geq 7$, esistono reticoli sopramodulari di lunghezza 3, non complementati e non modulari, aventi ordine n , che ammettono sottoreticoli di tutti gli ordini $m < n$. Per reticoli sopramodulari di lunghezza 3, non complementati, il numero $\psi(N)$ del problema di Birkhoff vale dunque $N + 1$. Un risultato analogo vale per reticoli sottomodulari di lunghezza 3, non complementati. Lo studio dei reticoli sopramodulari di lunghezza 3, relativamente complementati, o complementati è molto più complesso, Curzio prova in [C6] che lo studio dei reticoli complementati può esser ricondotto al caso complementato. Si ricorda che un reticolo L dotato di minimo 0 e di massimo I vien detto *complementato* se ogni $x \in L$ ha complemento in L , esiste cioè $y \in L$ tale che $x \vee y = I$, $x \wedge y = 0$; un reticolo è *relativamente complementato* se ogni suo intervallo è complementato.

Nel lavoro [C7] viene introdotto il concetto di elemento join-quasi distributivo (meet-quasi distributivo). Un reticolo L è *distributivo* se in esso

vale una (e quindi l'altra) delle due relazioni equivalenti

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$$

per ogni $a, b, c \in L$,

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$

per ogni $a, b, c \in L$. Un elemento a di un reticolo L è *neutro* in L se, per ogni $x, y \in L$, il sottoreticolo generato da a, x, y è distributivo. Un elemento a di un reticolo L è *join-distributivo* in L se, per ogni $x, y \in L$,

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y),$$

meet-distributivo in L se, per ogni $x, y \in L$,

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y).$$

L'elemento a vien detto *join-quasi distributivo* in L se, per ogni $x, y \in L$ tali che $a \vee x = a \vee y$, si ha

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y),$$

meet-quasi distributivo in L se, per ogni $x, y \in L$ tali che $a \wedge x = a \wedge y$, si ha

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y).$$

Un reticolo L vien detto *join-quasi distributivo* (*meet-quasi distributivo*) se ogni suo elemento è join-quasi distributivo (*meet-quasi distributivo*).

Nei lavori [C7] e [C8] si prova che un reticolo sopramodulare (risp. sottomodulare) e join-quasidistributivo è distributivo.

Nel lavoro [C8] si caratterizzano inoltre gli elementi join-quasi distributivi, meet-quasi distributivi, join-distributivi, meet-distributivi e neutri nei reticoli sottomodulari godenti della seguente ulteriore proprietà: se $x, y \in L$ coprono $x \wedge y$, allora esiste un ulteriore elemento z che copre x, y e tale che $x \vee y = x \vee z = y \vee z$.

Sia G un gruppo e si denoti con $\mathcal{L}(G)$ l'insieme dei sottogruppi di G . È ben noto che $\mathcal{L}(G)$, ordinato per inclusione, è un reticolo, dove, se H, K sono sottogruppi di G , l'intersezione reticolare, il “meet” $H \wedge K$, è l'intersezione di H e K , e l'unione reticolare, il “join” $H \vee K = \langle H, K \rangle$, è il sottogruppo generato da H e K . L'origine dello studio della Teoria dei reticoli dei sottogruppi di un gruppo risale al 1928, ad un lavoro di Ada Rottländer sulla corrispondenza di Galois tra un'estensione di campi ed il suo gruppo

di Galois. Molti importanti studiosi di Teoria dei gruppi si sono interessati all'argomento, per esempio R. Baer, L.E. Sadovskii, M. Suzuki, G. Zappa (cfr. il testo di R. Schmidt [60]). In particolare sono stati studiati i gruppi per cui il reticolo $\mathcal{L}(G)$ gode di proprietà speciali, per esempio è distributivo, o modulare, o complementato. O. Ore, nel 1936, in [45] ha provato che $\mathcal{L}(G)$ è distributivo se e solo se G è localmente ciclico, gruppi con $\mathcal{L}(G)$ modulare sono stati caratterizzati da K. Iwasawa in [29] ed in [30], e da R. Schmidt in [59], gruppi con $\mathcal{L}(G)$ complementato o relativamente complementato sono stati studiati da G. Zacher in [70] e [72].

Gli elementi join-distributivi, meet-distributivi e gli elementi neutri nel reticolo $\mathcal{L}(G)$ dei sottogruppi di G sono stati caratterizzati da Zappa e da Suzuki (cfr. [75] e [66]). Nei lavori [C7], [C12], [C27], Curzio studia gli elementi join-quasi distributivi e meet-quasi distributivi nel reticolo $\mathcal{L}(G)$. In [C7] prova che ogni sottogruppo di un gruppo finito G è join-quasi distributivo in $\mathcal{L}(G)$ se e solo se è meet-quasi distributivo e ciò accade se e solo se G è un gruppo ciclico. In [27] Mario prova un risultato analogo per un qualunque gruppo abeliano A , ogni sottogruppo di A è join-quasi distributivo in $\mathcal{L}(A)$ se e solo se è meet-quasi distributivo, e ciò accade se e solo se A è un gruppo localmente ciclico. Più in generale, in [C27], Curzio prova che un sottogruppo H di un gruppo finito (o di un gruppo abeliano) G è join-quasi distributivo in $\mathcal{L}(G)$ se e solo se l'applicazione: $X \in \mathcal{L}(G) \mapsto X \vee H \in \mathcal{L}(G)$ è un endomorfismo reticolare, cioè se e solo se H è join-distributivo. Tale risultato è stato poi esteso a gruppi qualsiasi da F. Napolitani in [42].

I sottogruppi normali di G costituiscono un sottoreticolo $\mathcal{N}(G)$ di $\mathcal{L}(G)$. Un altro importante sottoreticolo di $\mathcal{L}(G)$ è il reticolo $\mathcal{R}(G)$ dei sottogruppi di composizione di G . Un sottogruppo H di un gruppo G viene detto *subnormale* in G se esiste una serie

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G,$$

viene detto un sottogruppo di *composizione* di G se esiste una serie

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G$$

in cui i fattori H_{i+1}/H_i sono gruppi semplici. È noto che i sottogruppi subnormali di G non costituiscono sempre un sottoreticolo di $\mathcal{L}(G)$, mentre ciò accade

per l'insieme $\mathcal{R}(G)$ dei sottogruppi di composizione di G . Ovviamente, se G è un gruppo finito, i sottogruppi subnormali sono esattamente i sottogruppi di composizione, pertanto $\mathcal{R}(G)$ coincide con l'insieme dei sottogruppi subnormali di G . Infine, l'insieme dei laterali sinistri (destri) di tutti i sottogruppi di G , con l'insieme vuoto, è un sottoreticolo del reticolo dei sottoinsiemi di G , ordinato per inclusione; esso vien detto il reticolo $\mathcal{S}(G)$ dei laterali di G .

I lavori di Curzio [C2], [C4], [C7], [C9]-[C12], [C14]-[C16], [C18], [C21], [C22], [C24], [C26]-[C31], [C35], [C59] sono relativi allo studio della struttura di gruppi in cui tali reticoli hanno speciali proprietà, e di fino a che punto un gruppo è individuato da tali reticoli.

Nel lavoro [C28], vengono caratterizzati i gruppi per cui il reticolo $\mathcal{N}(G)$ è decomponibile nel prodotto diretto di due reticoli non banali. Viene provato il seguente notevole risultato. Sia G un gruppo, $\mathcal{N}(G)$ è decomponibile se e solo se esistono due sottogruppi caratteristici non banali H, K di G tali che $G = H \times K$ e fattori centrali non-banali X/Y di H e S/T di K sono periodici con ordini coprimi (dove un fattore X/Y di H è detto centrale se Y, X sono normali in H , $Y \leq X \leq H$ e $X/Y \leq Z(H/Y)$).

Il reticolo $\mathcal{N}(G)$ dei sottogruppi normali di G è ovviamente sempre modulare, nei lavori [C7] e [C12] vengono studiati i gruppi per cui $\mathcal{N}(G)$ è distributivo o complementato.

Nel lavoro [C7] è provato che $\mathcal{N}(G)$ è complementato se e solo se G è prodotto diretto di gruppi semplici. Viene provato inoltre che se G è un gruppo finito non avente sottogruppi normali di ugual ordine, allora $\mathcal{N}(G)$ è distributivo. Vale anche il viceversa se G è un T -gruppo risolubile finito (un T -gruppo G è un gruppo in cui la relazione di normalità è transitiva, tale cioè che se H, K sono sottogruppi di G , da H normale in K e K normale in G segue H normale in G). Ancora oggi non è nota una descrizione completa dei gruppi con $\mathcal{N}(G)$ distributivo, ulteriori successivi risultati parziali sono dovuti a Pazderski in [49], allo stesso Mario Curzio e Rodolfo Permutti in [C29], e alle autrici di questo articolo in [33].

Il reticolo $\mathcal{R}(G)$ dei sottogruppi di composizione di un gruppo finito è stato studiato da molti autori. G. Zappa ha caratterizzato in [77] i gruppi finiti con $\mathcal{R}(G)$ modulare, ed in [75] i gruppi finiti risolubili

con $\mathcal{R}(G)$ distributivo. In particolare se G è un gruppo risolubile finito, $\mathcal{R}(G)$ è distributivo se e solo se G è a sottogruppi di Sylow ciclici. Più in generale, G. Zacher in [71] ha caratterizzato i gruppi finiti con $\mathcal{R}(G)$ distributivo. Curzio, in [C14], prova che, se G è un gruppo finito, $\mathcal{R}(G)$ è complementato se e solo ogni sottogruppo normale minimale di G è fattore diretto di G , e ciò accade se e solo se G è prodotto diretto di gruppi semplici, e se e solo se $\mathcal{R}(G)$ è relativamente complementato. Se G è risolubile, $\mathcal{R}(G)$ è riducibile se e solo se G è prodotto diretto di gruppi di ordini coprimi. Nel lavoro [C9] sono studiati i gruppi risolubili finiti per cui $\mathcal{R}(G)$ è una catena e viene provato che ciò accade se e solo se G è ciclico di ordine potenza di primo, oppure $|G| = p^\alpha q^\beta$, p, q numeri primi, $p > q$, i sottogruppi di Sylow di G sono ciclici e $C_G(P) = P$, dove P è l'unico p -sottogruppo di Sylow di G .

Gli elementi neutri nel reticolo $\mathcal{R}(G)$, dove G è un gruppo risolubile finito, sono studiati da Curzio in [C14]. Se A è neutro nel reticolo dei sottogruppi di composizione di un gruppo risolubile finito, allora A è un sottogruppo caratteristico di G , e, se B è un sottogruppo subnormale di G e se $A \wedge B$ è normale in $A \vee B$, allora gli indici $|A : A \wedge B|$ e $|B : A \wedge B|$ sono primi tra di loro. Se G in più è un $\mathcal{T}$ -gruppo, tale proprietà caratterizza gli elementi neutri nel reticolo $\mathcal{R}(G)$.

Una bella survey sui risultati precedenti è contenuta nel lavoro [C26].

Il reticolo $\mathcal{S}(G)$ dei laterali di G viene studiato da Mario Curzio nei lavori [C3], [C4] e [C16]. Curzio prova in [C16] che $\mathcal{S}(G)$ è modulare se e solo se $|G| = 1$ oppure $|G|$ è un numero primo; è distributivo se e solo se $|G| \leq 2$; è riducibile se e solo se $|G| = 2$. Molto interessante è lo studio di quando $\mathcal{S}(G)$ è complementato. Curzio prova infatti che se G è finito o ciclico, allora $\mathcal{S}(G)$ è complementato, più in generale $\mathcal{S}(G)$ è complementato se ogni sottogruppo proprio di G è incluso in un sottogruppo massimale. Inoltre, se G è un gruppo finito, $\mathcal{S}(G)$ è relativamente complementato se e solo se lo è il reticolo $\mathcal{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G .

Un *isomorfismo* tra due reticoli è un'applicazione biettiva che conserva la relazione d'ordine, una *dualità* è un'applicazione biettiva che inverte la relazione d'ordine. Se G e $\bar{G}$ sono gruppi, un isomorfismo di $\mathcal{L}(G)$ in $\mathcal{L}(\bar{G})$ viene detto una *proiettività*.

Un interessante problema è lo studio di proprietà gruppali che sono invarianti per proiettività, tali cioè che se G e $\bar{G}$ sono gruppi, G gode di una proprietà e φ è un isomorfismo tra il reticolo $\mathcal{L}(G)$ e il reticolo $\mathcal{L}(\bar{G})$, allora anche $\bar{G}$ gode di tale proprietà. Per esempio la proprietà di essere ciclico o la proprietà di essere finito sono invarianti per proiettività. Molti studiosi hanno investigato questa problematica, per esempio Zappa e, indipendentemente M. Suzuki, hanno provato che la proprietà di essere un gruppo risolubile finito è invariante per proiettività. Nei lavori [C9], [C11], [C24], [C30] e [C31], Curzio affronta un problema analogo per i reticoli $\mathcal{N}(G)$ e $\mathcal{R}(G)$. In [C9] si prova che se G è un p -gruppo finito non ciclico, G_1 un gruppo risolubile ed esiste un isomorfismo di $\mathcal{R}(G)$ in $\mathcal{R}(G_1)$, allora G e G_1 hanno lo stesso ordine ed hanno isomorfo il reticolo dei sottogruppi. In [C11] viene esteso tale risultato ai gruppi nilpotenti, è provato infatti che se G è un gruppo nilpotente finito, $S_1, S_2, \dots, S_n$ i suoi sottogruppi di Sylow, ϕ un isomorfismo di $\mathcal{R}(G)$ in $\mathcal{R}(G_1)$, risulta $G_1 = \phi(S_1) \times \phi(S_2) \times \dots \times \phi(S_n)$, con $\mathcal{R}(S_i) \simeq \mathcal{R}(\phi(S_i))$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. In [C9] viene provato poi che se G è un gruppo supersolubile finito a sottogruppi di Sylow non ciclici ed esiste una dualità di $\mathcal{R}(G)$ in sé stesso, allora G è nilpotente.

Nei lavori [C21], [C24], [C30] e [C31], Curzio studia isomorfismi tra reticoli di sottogruppi normali. In [C21] e [C24] si prova che se G è un gruppo finito nilpotente a sottogruppi di Sylow non ciclici, G_1 un gruppo supersolubile e $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$, allora anche G_1 è nilpotente e $|G| = |G_1|$; se poi G è abeliano e G_1 un qualunque gruppo finito tale che $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$, allora $G \simeq G_1$. Analoghi risultati valgono se si assume che esiste una dualità tra $\mathcal{N}(G)$ e $\mathcal{N}(G_1)$. Nel lavoro [C30], uno dei più belli della produzione di Mario Curzio, i risultati precedenti vengono estesi a gruppi abeliani non necessariamente finiti. Viene provato infatti che se G è un gruppo abeliano periodico privo di componenti primarie localmente cicliche, G_1 un gruppo qualsiasi e $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$, allora $G \simeq G_1$. Se poi G è un gruppo abeliano misto e G_1 è risolubile, e $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$, allora $G \simeq G_1$. Infine se G è abeliano aperiodico dotato di due elementi indipendenti e G_1 è un gruppo risolubile, allora $\mathcal{N}(G) \simeq \mathcal{N}(G_1)$ comporta $G \simeq G_1$.

Nel lavoro [C3] sono studiati isomorfismi tra i reticoli dei laterali $\mathcal{S}(G)$ e $\mathcal{S}(G_1)$, dove G e G_1 sono

gruppi finiti. In particolare, rispondendo ad un problema posto da G. Birkhoff in [2], viene costruito un esempio di gruppi finiti non isomorfi, aventi isomorfi i reticoli dei laterali. È provato inoltre che se ω è un isomorfismo di $\mathcal{S}(G)$ e $\mathcal{S}(G_1)$, esso non porta il reticolo dei sottogruppi di G nel reticolo dei sottogruppi di G_1 ; da ω è però deducibile un isomorfismo tra $\mathcal{S}(G)$ e $\mathcal{S}(G_1)$ che porta il reticolo $\mathcal{L}(G)$ nel reticolo $\mathcal{L}(G_1)$. Vengono studiati infine gli isomorfismi ω tra i reticoli dei laterali $\mathcal{S}(G)$ e $\mathcal{S}(G_1)$ che mandano $\mathcal{N}(G)$ in $\mathcal{N}(G_1)$, è dimostrato tra l'altro che i centri di G e G_1 si corrispondono in ω e sono isomorfi, e che ω trasforma i centralizzanti dei sottogruppi di G nei centralizzanti dei sottogruppi di G_1 .

Condizioni reticolari che assicurano la finitezza di un gruppo G vengono poi studiate nel lavoro [C18]. Un gruppo risolubile a condizione minimale o massimale sui sottogruppi e con $\mathcal{L}(G)$ complementato è finito. Una conclusione analoga vale per i gruppi risolubili per cui esista una dualità di $\mathcal{L}(G)$ in sé stesso, e per gruppi localmente finiti a condizione minimale, con $\mathcal{L}(G)$ relativamente complementato. Altri risultati sull'argomento sono contenuti in [C18] e nel lavoro [C35], che è un'interessante survey relativa a problemi di complementazione nel reticolo $\mathcal{L}(G)$, presentata da Curzio in una conferenza tenuta all'Istituto Nazionale di Alta Matematica il 13 dicembre 1967.

Articoli sugli automorfismi di gruppi

Negli articoli [C20], [C42], [C43], [C44], [C54] e [C55] viene affrontata una tematica ancora oggi molto attuale, lo studio degli automorfismi di un gruppo.

Un automorfismo ϕ del gruppo G vien detto *uniforme* se ogni elemento di G può essere scritto nella forma $[g, \phi] = g^{-1}g^\phi$, per un opportuno $g \in G$. Se G è finito, ovviamente un automorfismo è uniforme se e solo se non ha punti fissi, cioè se e solo se non esistono elementi $x \in G \setminus \{1\}$ tali che $x^\phi = x$. Un celebre teorema di Thompson (cfr. [67]) assicura che se un gruppo finito G possiede un automorfismo senza punti fissi di ordine primo p , allora G è nilpotente, di classe limitata in funzione di p (cfr. [21]). Il risultato non vale nel caso infinito, Zappa in [78] ha fornito un esempio di gruppo infinito risolubile

bile e non nilpotente, possedente un automorfismo di ordine primo senza punti fissi. Più in generale ogni gruppo libero possiede un automorfismo di ordine 2 senza punti fissi. Sempre in [78] però Zappa ha provato che un gruppo risolubile a condizione massimale è nilpotente, se possiede un automorfismo uniforme di ordine primo. Ciò suggerisce di considerare automorfismi uniformi invece che automorfismi senza punti fissi, allo scopo di estendere il teorema di Thompson ai gruppi infiniti. Nel lavoro [C20], in tale ordine di idee, Curzio mostra che un gruppo G a condizione minimale sui sottogruppi è nilpotente di classe limitata in funzione di p , se possiede un automorfismo uniforme di ordine primo p e se G soddisfa alcune condizioni aggiuntive, per esempio se G ha classi di coniugio finite. Mostra inoltre che un gruppo risolubile periodico che possiede un automorfismo di ordine primo senza punti fissi è nilpotente. La problematica è stata ripresa da molti autori, anche in tempi recenti, si vedano per esempio [23], [31], [32] e [50].

L'insieme di tutti gli automorfismi di un gruppo G , con la composizione di applicazioni, costituisce un gruppo, l'automorfo di G , denotato con $Aut(G)$. Molti autori hanno studiato la struttura di tale gruppo ed i suoi legami con la struttura di G . Per esempio, nel 1955, R. Baer ha provato che se G è un gruppo periodico e $Aut(G)$ è finito, allora G è finito; altri interessanti risultati sono dovuti a J.L. Alperin, V.T. Nagrebeckii, D.J.S. (Derek) Robinson, si vedano i lavori [C42] e [C44] di Mario Curzio per informazioni complete sull'argomento. Nel lavoro [C43], Curzio studia i gruppi G per cui ogni sottogruppo ha l'automorfo finito. Tra i vari interessanti risultati, egli prova che $Aut(H)$ è finito per ogni sottogruppo H di G se e solo se G è finito oppure G è estensione centrale finita di un sottogruppo dei razionali con i tipi tutti finiti. Inoltre $Aut(H)$ è finito per ogni sottogruppo proprio di G , ma $Aut(G)$ è infinito se e solo se G è isomorfo al gruppo di Prüfer $Z(p^\infty)$ per qualche primo p , oppure G è finitamente generato e non ha sottogruppi di indice finito; i cosiddetti *mostri di Tarski* mostrano che tale situazione si può presentare. I mostri di Tarski sono gruppi semplici infiniti a sottogruppi propri non banali di ordine un fissato primo p , tali gruppi esistono se il primo p è grande abbastanza ($p > 10^{75}$), come mostrato da Alexander Yu. Olshanskii (cfr. [44]).

Un automorfismo potenza di un gruppo G è un automorfismo che fissa ogni sottogruppo di G , e che dunque manda ogni elemento di G in una sua potenza. Gli automorfismi potenza di un gruppo G costituiscono un sottogruppo normale abeliano $PAut(G)$ di $Aut(G)$, che è stato molto studiato, per esempio da C.D.H. Cooper in [10]. Nel lavoro [C55], scritto con S. Franciosi e F. de Giovanni, vengono studiati gli I -automorfismi di un gruppo G , cioè gli automorfismi che fissano ogni sottogruppo infinito di G . L'insieme degli I -automorfismi di G viene denotato con $IAut(G)$; sono esaminati i gruppi G in cui $PAut(G) = IAut(G)$, o più in generale $IAut(G)$ è abeliano. Viene provato tra l'altro che $IAut(G) = PAut(G)$ se G è localmente risolubile non artiniano, e che $IAut(G)$ è abeliano se G non è un gruppo periodico, o se G è localmente finito non artiniano e non contiene un gruppo semplice infinito. Si noti che ogni automorfismo di un gruppo di Tarski è un I -automorfismo, ovviamente in tal caso $IAut(G)$ non è abeliano. Nel lavoro sono utilizzati interessanti metodi di natura coomologica. Omologia e coomologia di estensioni di gruppi vengono usate anche nel lavoro [C54], in cui sono studiati il gruppo $Aut_C(G)$ degli automorfismi centrali di un gruppo G , automorfismi cioè che inducono l'identità su $G/Z(G)$, ed il gruppo $PAut_C(G)$, gruppo degli automorfismi centrali di G che fissano i sottogruppi di $Z(G)$. È provato per esempio che se G è un gruppo nilpotente, sono equivalenti le condizioni seguenti: a) G ha esponente finito, b) $PAut_C(G)$ ha esponente finito, c) $PAut(G)$ è periodico.

Il lavoro citato in precedenza è scritto in collaborazione con Derek Robinson, Howard Smith e James Wiegold. Curzio è tra i primi studiosi italiani di Algebra ad aprirsi a collaborazioni internazionali. Negli anni '80 e '90 visitano il Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli, soprattutto in qualità di Professori Visitatori dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, molti tra i più brillanti ricercatori di Teoria dei gruppi provenienti da tutto il mondo, e Curzio collabora con molti di loro. Tra essi, oltre a quelli precedentemente ricordati, Kanta Gupta, con cui Mario scrive il lavoro [C58], Bernhard Amberg, Narain Gupta, Marcel Herzog, Avinoam Mann, John Wilson, Akbar Rhemtulla. Particolarmente produttiva la collaborazione con Derek Robinson e Akbar Rhemtulla, con cui Curzio scrive

alcuni dei suoi articoli più belli, su problematiche di tipo combinatorio nei gruppi infiniti.



Mario Curzio con Derek Robinson

Articoli su problemi combinatori in Teoria dei gruppi

Se n è un intero maggiore di 1, si dice che un gruppo G è totalmente n -riscrivibile (o G appartiene alla classe P_n) se, per ogni n -pla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di elementi di G , esiste una permutazione σ non banale di $\{1, 2, \dots, n\}$, tale che $x_1 x_2 \dots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$. Ovviamente un gruppo finito di ordine n appartiene alla classe P_{n+1} . Si ha $P_n \subseteq P_{n+1}$, per ogni n . Si denoti con P l'unione delle classi P_n . La proprietà P_n è stata introdotta e brevemente studiata da Kaplanski in [23]. Suggerita da considerazioni di carattere informatico, è stata poi studiata nei semigruppri da A. Restivo e C. Reutenauer. Essi hanno provato, in [51], che, se G è un semigruppri periodico e finitamente generabile e gode di P_n , per qualche intero positivo n , allora G è finito. In più, se G è un gruppo finitamente generabile nella classe P , Curzio ha provato, con le autrici di questo articolo, in [C48], che G è abeliano-per-finito, esiste cioè un sottogruppo normale abeliano A di G con il quoziente G/A finito. In [C51], il suo lavoro più citato, Curzio, con D.J.S. Robinson e con le autrici di questo articolo, ha provato che un gruppo G appartiene alla classe P se e solo se è finito-per-abeliano-per-finito, possiede cioè un sottogruppo normale di indice finito N con il derivato N' finito. Ovviamente un gruppo G appartiene alla classe P_2 se e solo se è abeliano, nel lavoro [C48] sono caratterizzati i gruppi in P_3 , viene provato infatti che G appartiene alla classe P_3 se e solo

se il derivato G' ha ordine al più 2. Si può dimostrare che un gruppo in P_4 ha sempre il derivato abeliano, i gruppi di ordine dispari in P_4 sono stati descritti da G. Higman, più in generale una completa classificazione dei gruppi finiti in P_4 è stata ottenuta da S.E. Stonehewer e dalle autrici di questo articolo in [35] e [40]. J. Alperin nel 1984, durante un seminario in Oxford (cfr. [6]), pose il problema di quale fosse il minimo intero n per cui esista un gruppo non risolubile in P_n . La risposta a tale problema è dovuta a R.D. Blyth e D.J.S. Robinson, in [7] e [8] infatti essi provano che ogni gruppo in P_7 è risolubile, mentre il gruppo alterno A_5 è un gruppo semplice in P_8 .

Negli ultimi quaranta anni, molte generalizzazioni della proprietà P sono state studiate, da molti autori. Per esempio, in [4] ed in [5], R.D. Blyth ha introdotto, per ogni n , la classe dei gruppi n -riscrivibili, denotata con il simbolo Q_n . Un gruppo G appartiene a Q_n se, per ogni n -pla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di elementi di G , esistono distinte permutazioni σ e τ di $\{1, 2, \dots, n\}$, tali che $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} = x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \dots x_{\tau(n)}$. Si denota con Q l'unione delle classi Q_n . Ovviamente $P_n \subseteq Q_n$, l'inclusione è stretta, infatti il gruppo simmetrico S_n su n oggetti, $n \geq 3$, soddisfa Q_n ma non soddisfa P_n . In [4] Blyth ha mostrato però che $G \in Q$ se e solo se G è finito-per-abeliano-per-finito, sicché $P = Q$. Risultati quantitativi sulle classi P_n e Q_n sono stati recentemente ottenuti da M.I. Elashitri e D.S. Passman e da D.S. Passman in [16] e in [48].

Un altro esempio di generalizzazione della proprietà P è negli articoli [52], [36] e [37], dove, fissato un intero n , vengono studiati gruppi in cui, per ogni n -pla $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ di sottogruppi di G , esiste una permutazione σ non banale di $\{1, 2, \dots, n\}$, tale che $H_1 H_2 \dots H_n = H_{\sigma(1)} H_{\sigma(2)} \dots H_{\sigma(n)}$.

Un altro problema di tipo combinatorio studiato da Curzio è collegato ad una questione posta da Paul Erdős: qual è la struttura dei gruppi in cui ogni sottoinsieme infinito contiene due elementi distinti che sono tra loro permutabili? B.H. Neumann ha provato in [43] che un gruppo G ha tale proprietà se e solo se G è centrale-per-finito, cioè $G/Z(G)$ è finito. Nel lavoro [C56] vengono studiati gruppi, detti PH -gruppi, in cui ogni insieme infinito di sottogruppi contiene una coppia di sottogruppi distinti che permutano tra loro, e gruppi, detti PH^* -gruppi, in cui ogni insieme infinito di sottogruppi ciclici contie-

ne due elementi distinti che permutano tra loro. Viene provato in [C56] che un gruppo risolubile finitamente generabile è un PH^* -gruppo se e solo se è un PH -gruppo, e se e solo se G è centrale-perfinito; un gruppo aperiodico è un PH^* -gruppo se e solo se è un PH -gruppo, e se e solo se G è abeliano.

In relazione a tale problematica, Curzio, nel lavoro [C57], studia gruppi con una proprietà che generalizza la n -riscrivibilità, precisamente gruppi G in cui, per ogni sottoinsieme infinito X di G , esistono n elementi $x_1, \dots, x_n$ in X tali che $x_1 x_2 \dots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$, per un' opportuna permutazione σ . Viene provato che un gruppo G soddisfa tale proprietà se e solo se esiste un sottogruppo normale H di G di indice finito, con $H/Z(H)$ di esponente finito e con H a classi di coniugio finite.

Articoli su vari aspetti della Teoria dei gruppi finiti e infiniti

In altri suoi lavori Curzio affronta svariati aspetti della Teoria dei gruppi finiti o infiniti. È interessante notare che molte delle problematiche studiate sono state poi riprese dopo molti anni anche da famosissimi studiosi di Teoria dei gruppi.

Nel lavoro [C13], presentato da R. Caccioppoli all'Accademia dei Lincei, nella seduta del 13 dicembre 1958, Curzio studia un'interessante classe di gruppi, che chiama $\mathcal{N}$ -gruppi: gruppi in cui ogni sottogruppo normale è unico nella sua cardinalità tra i sottogruppi di G . Egli prova che un gruppo risolubile finito è un $\mathcal{N}$ -gruppo se e solo se valgono le condizioni seguenti: (i) i sottogruppi di Sylow di G sono ciclici, o abeliani elementari, o isomorfi al gruppo dei quaternioni, (ii) se G possiede un sottogruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni, allora G è privo di sottogruppi normali di ordine $4d$, con d dispari, (iii) in ogni serie principale di G vi sono fattori di ordini uguali agli ordini di ciascun sottogruppo di Sylow di G abeliano elementare non ciclico. Inoltre un gruppo finito è un $\mathcal{N}$ -gruppo supersolubile se e solo se i suoi sottogruppi di Sylow sono ciclici. Un gruppo vien detto *supersolubile* se possiede una serie normale a fattori ciclici. Generalizzazioni della classe $\mathcal{N}$ sono state studiate negli anni successivi da J. Zhang [80], da M. Costantini e E. Jabara [11], e da F. de Giovanni e A. Russo. In particolare questi due autori, in [20], nel 2016, hanno

studiato la classe dei gruppi infiniti in cui ogni sottogruppo normale proprio è unico nella sua cardinalità tra i sottogruppi di G .

Una classe molto studiata negli anni '70 è la classe dei $\mathcal{T}$ -gruppi, gruppi in cui la relazione di normalità è transitiva, tali cioè che ogni sottogruppo subnormale è normale. Nei lavori [C36] e [C41] Curzio esamina i gruppi in cui ogni sottogruppo subnormale è caratteristico; ovviamente un gruppo con tale proprietà è un $\mathcal{T}$ -gruppo. I $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili finiti sono stati descritti da G. Zacher in [70] e da W. Gaschütz in [18]. Se G è un gruppo risolubile finito ed è un $\mathcal{T}$ -gruppo, allora G è prodotto semidiretto di un gruppo abeliano L di ordine dispari e di un gruppo H a sottogruppi tutti normali, di ordine primo con $|L|$, e ogni elemento di H agisce su L come un automorfismo potenza. Curzio trova in [C36] delle condizioni necessarie e sufficienti su L e H affinché un $\mathcal{T}$ -gruppo finito risolubile sia in più a sottogruppi subnormali caratteristici. Prova ad esempio che, con le notazioni precedenti, G è a sottogruppi subnormali caratteristici se e solo se L è ciclico, e, se $H^\alpha = H$ per qualche automorfismo α di G , si ha $S^\alpha = S$ per ogni sottogruppo S di H . Un altro interessante risultato relativo a tale classe di gruppi viene provato da Curzio in [C15]: un gruppo finito con il reticolo dei sottogruppi relativamente complementato è un $\mathcal{T}$ -gruppo risolubile a sottogruppi di Sylow abeliani elementari. I $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili infiniti sono stati studiati da D.J.S. Robinson in [53]. Robinson ha provato che un $\mathcal{T}$ -gruppo risolubile aperiodico è abeliano e studia i $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili ripartendoli in quattro classi: a) i gruppi abeliani, b) i $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili non abeliani tali che $C_G(G')$ possiede un elemento aperiodico, c) i $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili non abeliani e non periodici tali che $C_G(G')$ è periodico, d) i $\mathcal{T}$ -gruppi risolubili non abeliani e periodici. Nel lavoro [C41], partendo da tali risultati di Robinson, Curzio studia i gruppi risolubili a sottogruppi subnormali caratteristici. Per esempio prova che un gruppo abeliano periodico con tale proprietà è localmente ciclico, che non esistono gruppi abeliani misti, o gruppi nella classe b) a sottogruppi subnormali caratteristici, e descrive completamente i gruppi a sottogruppi subnormali caratteristici nella classe c) e che coincidono con la chiusura normale di un elemento, o nella classe d) nell'ipotesi che sia finito

l'insieme dei primi che dividono gli ordini degli elementi di G . I $\mathcal{T}$ -gruppi sono ancora oggi molto studiati, si vedano per esempio gli articoli [17] e [56].

Un'interessante sottoclasse della classe dei $\mathcal{T}$ -gruppi è la classe degli IM -gruppi. Un gruppo G vien detto un IM -gruppo se ogni sottogruppo proprio di G è intersezione di una famiglia di sottogruppi massimali di G . F. Menegazzo in [39] ha provato che ogni IM -gruppo è un T -gruppo, ed ha ottenuto una caratterizzazione degli IM -gruppi risolubili. Curzio e S. Rao in [C45] studiano gli IM -gruppi in generale. In particolare, dopo aver osservato che un sottogruppo normale di un IM -gruppo è ancora un IM -gruppo, studiano la struttura del sottogruppo S generato dai sottogruppi normali minimali di un IM -gruppo G . Essi mostrano che se G è un IM -gruppo allora S è semplice, oppure è prodotto diretto di IM -gruppi semplici periodici tali che fattori non isomorfi hanno ordini coprimi e soddisfano opportune ulteriori proprietà. In particolare, se S è localmente finito, G possiede al più un sottogruppo normale minimale non abeliano. Successivamente, L. Di Martino e C. Tamburini in [15], utilizzando la classificazione dei gruppi semplici finiti, hanno provato che un IM -gruppo finito non è mai semplice, risultato già congetturato da Menegazzo e da Curzio e Rao. Si noti però che esistono IM -gruppi infiniti semplici, i mostri di Tarski godono infatti di tale proprietà. Anche lo studio degli IM -gruppi è stato poi ripreso negli anni successivi, ad esempio da U. Dardano nei lavori [13] e [14].

Nei lavori [C38], [C40] e [C48], Curzio affronta un altro problema molto studiato in Teoria dei gruppi finiti e infiniti. Sia $\mathcal{X}$ una classe di gruppi, si dice che un gruppo G è *minimale-non- $\mathcal{X}$* , o che $G \in \mathcal{X}_1$, se G non appartiene alla classe $\mathcal{X}$, ma vi appartiene ogni sottogruppo proprio di G . Più in generale, se n è un intero non negativo, si definisce la classe $\mathcal{X}_n$ ponendo $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ e, con $i \geq 0$, $G \in \mathcal{X}_{i+1}$ se $G \notin \mathcal{X}_0 \cup \dots \cup \mathcal{X}_i$, ma $U \in \mathcal{X}_0 \cup \dots \cup \mathcal{X}_i$, per ogni sottogruppo proprio U di G . Ovviamente la conoscenza dei gruppi nella classe $\mathcal{X}_1$ fornisce informazioni sui gruppi nella classe $\mathcal{X}$, più in generale lo studio dei gruppi in $\mathcal{X}_i$ fornisce informazioni sui gruppi appartenenti alle classi $\mathcal{X}_j$, $j < i$. Se $\mathcal{P} = \mathcal{A}$ è la classe dei gruppi abeliani, i gruppi minimali-non-abeliani sono stati studiati da G.A. Miller e H.C. Moreno in [41], la

classe $\mathcal{N}_1$, dove $\mathcal{N}$ è la classe dei gruppi nilpotenti, è stata studiata da O. Schmidt in [57] e, più recentemente, da A. Ballester-Bolínches, R. Esteban-Romero e D.J.S. Robinson in [1], la classe $\mathcal{N}_1^p$, dove $\mathcal{N}^p$ è la classe dei gruppi p -nilpotenti (p un primo) è stata studiata da N. Itô in [26]. Nell'articolo [C38], Curzio studia le classi $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_2^p$; tra i vari risultati ottenuti, Mario prova che il gruppo alterno $\mathcal{A}_5$ su 5 elementi è l'unico gruppo semplice nella classe $\mathcal{N}_2$, e che l'ordine di un qualsiasi $\mathcal{N}_2$ -gruppo finito è divisibile per al più tre primi distinti. Inoltre ogni $\mathcal{A}_2$ -gruppo finito è semplice (e dunque isomorfo ad $\mathcal{A}_5$), oppure è risolubile. Analogo risultato vale per i gruppi finiti nella classe $\mathcal{N}_1^p$, se $p > 5$. Nell'articolo [C48] Curzio studia poi i gruppi finiti minimali non metaciclici. Qui un gruppo G vien detto *metaciclico*, se G possiede un sottogruppo normale ciclico H con quoziente G/H ciclico. I p -gruppi finiti (p primo) minimali non metaciclici erano stati descritti da N. Blackburn in [3]; Curzio esamina il caso generale. Se G è un gruppo supersolubile minimale non metaciclico, egli prova che $|G|$ è divisibile per al più tre primi, e ottiene una completa descrizione della struttura di tali gruppi. Se G non è supersolubile, prova che G è minimale non metaciclico se e solo se vale una delle seguenti condizioni: (i) G è minimale nonabeliano di ordine p^2q^n ($p \neq q$ primi, il p -sottogruppo di Sylow G_p di G è normale in G); (ii) $G = Q_8 \rtimes \langle x \rangle$, dove $|x| = 3^n$ e x induce su Q_8 un automorfismo di ordine 3.

Gli articoli [C17], [C19] e [C33] trattano un problema duale, lo studio dei gruppi in cui ogni quoziente appartiene ad una classe $\mathcal{X}$. In particolare, in [C33], si studiano i gruppi a quozienti abeliani, in [C17] e [C19] i gruppi a quozienti supersolubili. Anche questa problematica è stata poi ripresa da molti celebri autori, per esempio da D.J.S. Robinson e J. Wilson in [55], e da L.A. Kurdachenko, J. Otal e I. Subbotin in [24].

Gli articoli [C5], [C32] e [C34] sono di Geometria algebrica.

Negli articoli [C23], [C25], [C32], [C39], [C50], [C52] e [C53] sono contenuti i risultati di alcune delle bellissime conferenze tenute da Mario, in tutta Italia ed in Francia. I primi due sono relativi a conferenze tenute da Mario durante il "Séminaire d'Algèbre", presso l'Istituto H. Poincaré di Parigi. Gli altri si riferiscono a conferenze tenute presso le Università

di Bari, di Milano, di Siena, di Palermo, dell'Aquila. Desideriamo solo citare la nota [C39], in cui sono illustrati risultati sui λ -moduli per i quali ogni sottomodulo proprio è contenuto in un sottomodulo massimale. Vengono presentate interessanti caratterizzazioni se λ è un anello principale. Come applicazione dei risultati ottenuti, nella nota [C37], viene ottenuta una caratterizzazione dei gruppi risolubili in cui ogni sottogruppo normale è incluso in un sottogruppo normale massimale.

Curzio ha poi scritto alcuni libri e monografie.

I testi [LC1] e [LC5] hanno uno scopo essenzialmente didattico. Il testo [LC1], "Complementi ed esercizi di Geometria descrittiva", scritto da Mario con Rodolfo Permutti, è una raccolta di esercizi e complementi al Corso di Geometria descrittiva tenuto dal Prof. Alfredo Franchetta. Il testo [LC5], "Esercizi di Algebra - Una raccolta di prove d'esame svolte", scritto con le autrici di questo articolo, è una collezione di prove d'esame di Algebra svolte, raccolte negli anni.

Il testo [LC6], "Topics in Infinite Groups", curato in collaborazione con Francesco de Giovanni, è una collezione di articoli di autori vari, su svariati aspetti della Teoria dei gruppi infiniti.

Il testo [LC3], "Some Problems of Sylow Type in Locally Finite Groups", raccoglie le lezioni di un corso tenuto da Mario presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi" (INdAM), a Roma, nel semestre invernale 1975/76. Una prima edizione del testo venne pubblicata dall'Academic Press, nel 1979, ed è attualmente esaurita. Recentemente una nuova edizione è stata pubblicata dall'AGTA (Advances in Group Theory and Applications) nell'ambito della raccolta AGTA Lost Monographs. In esso vengono discussi alcuni argomenti della teoria dei gruppi localmente finiti. In particolare si studia il coniugio dei p -sottogruppi di Sylow in tale classe di gruppi, riportando risultati di A.O. Asar, B. Hartley, V.P. Šunkov, B.A.F. Wehrfritz. Si studiano inoltre, in tale classe di gruppi, teoremi di spezzamento tipo Schur-Zassenhaus, riportando risultati di J.D. Dixon e controesempi di L.G. Kovács, B.H. Neumann, H. de Vries.

Il testo [LC2] "Lezioni di algebra" deriva da corsi di Algebra tenuti dall'Autore presso l'Università di Napoli. Ma in realtà è molto di più di un testo di riferimento, è un vero e proprio manuale di Algebra,

completo e rigoroso, riferimento per studenti e ricercatori di Matematica. Tratta di Teoria degli insiemi, gruppi e anelli, moduli e spazi vettoriali, reticoli, campi e Teoria di Galois. Curzio ha chiesto la collaborazione delle autrici di questo articolo, e di questo gli saremo sempre infinitamente grate, per una nuova versione, [LC4], nella quale vengono aggiunti, oltre a numerosi esercizi, anche capitoli su Elementi di aritmetica, sulle Rappresentazioni dei gruppi finiti e due Appendici su Categorie e funtori e su Matrici e sistemi lineari.

Il testo "Lezioni di algebra" è ancora oggi utilizzato come testo di riferimento in corsi di Laurea Triennale e Magistrale in Matematica.

Conclusioni

La figura e l'attività di Mario Curzio sono state ricordate in un Convegno che si è tenuto a Napoli, il 25 gennaio 2016, cui hanno partecipato amici e colleghi da tutta Italia, studenti e vecchi allievi.

UNA GIORNATA DI ALGEBRA
nell'ambito delle attività del dottorato di ricerca in Scienze Matematiche

25 GENNAIO 2016
Monte S. Angelo
Sala Azzurra, Napoli UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

CONFERENZE www.gamc.unina.it

ALDO DE LUCA
(Università degli Studi di Napoli Federico II)

LINO DI MARTINO
(Università degli Studi di Milano-Bicocca)

FEDERICO MENEGAZZO
(Università degli Studi di Padova)

COMITATO SCIENTIFICO

FRANCESCO DE GIOVANNI
(Università di Napoli Federico II)

PATRIZIA LONGOBARDI
(Università di Salerno)

MERCEDE MAJ
(Università di Salerno)

INTERVENTI

V. Ancona, M. Bianchi, V. Bonanzinga, A. Caranti, L. Carbone, L. Centrone, C. Ciliberto, F. Dalla Volta, U. Dardano, G. Falcone, R. Gatto, F. Mazzocca, N. Melone, G. Moscarillo, G. Patrizio, G. Pirillo, C. Procesi, S. Rao, G. Restuccia, S. Rionero, A. Russo, C. Sbordone, C.M. Scoppola, E. Strickland, C. Toffalori, G. Trombetti, G. Vincenzi, T. Weigel

 **RICORDANDO MARIO CURZIO**

Una giornata di Algebra

La giornata si è svolta in un'atmosfera nostalgica, ma serena, a volte giocosa, come gli sarebbe piaciuta. Oltre alle tre interessanti conferenze di natura scientifica, molti sono stati gli interventi con ricordi ed aneddoti: si aveva proprio l'impressione che Mario fosse lì, presente con noi, sorridente a arguto come sempre.

In precedenza, l'8 e il 9 ottobre 1998, si erano tenute a Napoli "Due Giornate Dedicate a Mario Curzio", organizzate da noi suoi allievi, per festeggiare il suo 70° compleanno. In un'atmosfera gioiosa

e stimolante, dopo gli interventi delle autorità accademiche, si erano susseguite interessanti conferenze, tenute, tra l'altro, da alcuni dei più prestigiosi gruppisti del momento, quali Guido Zappa, Stewart Stonehewer, Bernhard Amberg, Herman Heineken, Cesarina Tibiletti, Roland Schmidt e da famosi matematici italiani, quali Daniele Mundici, Luigi Salce, Aldo de Luca. Il convegno aveva visto anche l'intervento di giovani promettenti gruppisti italiani e la partecipazione di più di novanta studiosi italiani e stranieri.

<i>Due Giornate Dedicate a Mario Curzio</i>		Venerdì 9 Ottobre 1998	
Complesso Universitario Monte S. Angelo - Centri Comuni		Chairman Federico Menegazzo	
Giovedì 8 Ottobre 1998		9.30 H. Heineken Groups generated by two mutually Engel periodic elements	
9.00 Registrazione		10.30 C. Tibiletti Gruppi S-semplfici rispetto alla permutabilità	
10.00 Inizio dei lavori Saluto ai partecipanti. Interventi di Ovidio Bucci, Carlo Ciliberto, Domenico Olanda, Guido Trombetti, Francesca Visentin.		11.20 Coffee Break	
11.00 Coffee Break		11.40 R. Schmidt Certain properties of lattices of normal subgroups, composition subgroups, and cosets	
Chairman Giovanni Zacher		12.40 F. Dalla Volta Gruppi con rango di presentazione positivo	
11.20 G. Zappa Sul reticolo dei centralizzanti dei sottogruppi di un gruppo: risultati e problemi		13.10 Buffet	
12.10 S.E. Stonehewer Permutation properties of groups		Chairman Martin Newell	
13.00 Buffet		15.00 L. Salce Gruppi abeliani, semigrupp di Clifford e domini di valutazione	
Chairman Lino Di Martino		16.00 O. Puglisi Immagini e rappresentazioni di gruppi finitari	
15.00 A. Leone Sottogruppi quasinnormali nei gruppi infiniti		16.40 A. De Luca Parole e fattori speciali	
15.40 B. Amberg Radical rings		17.30 Termine dei lavori	
16.40 D. Mundici Approximating lattice-groups by free abelian groups with product ordering		Il Convegno è realizzato con il contributo finanziario di: Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università di Napoli Federico II Dipartimento di Matematica della Seconda Università di Napoli Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Salerno Facoltà di Scienze M.F.N. dell'Università di Salerno Università di Napoli	

Due Giornate Dedicate a Mario Curzio

L'Accademia Pontaniana ha bandito, nel 2019, un premio nazionale "Mario Curzio" per l'Algebra, riservato a studiosi di Teoria dei gruppi con meno di 33 anni, e non professori universitari. I vincitori ex-aequo sono risultati due "pronipoti" di Mario: Eugenio Gian-

nelli, allievo di Carlo Casolo, un allievo di Zappa, e Marco Trombetti, allievo di Francesco de Giovanni.

Molto libri della biblioteca privata di Mario sono conservati nella sede del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Salerno.



Dipartimento di Matematica,
Università degli Studi di Salerno

Nell'ambito del progetto INdAM-DMA, "I Luoghi di Caccioppoli", ad opera soprattutto dei Professori Luciano Carbone ed Ulderico Dardano, sono recentemente stati restaurati i locali dell'Istituto di Analisi Superiore, al IV piano di Via Mezzocannone 8, ed in essi è stata conservata la scrivania di Mario, utilizzata quindi ancora da allievi dei suoi allievi.

Il ricordo di Mario Curzio è ancora oggi perfettamente presente, non solo nella mente e nel cuore di chi, come noi, conserva nei suoi riguardi graditudine ed affetto. Attraverso i suoi scritti, i suoi allievi e gli allievi dei suoi allievi, Mario Curzio continua ad influenzare profondamente la formazione dei giovani matematici, e ad insegnare l'amore per l'Algebra ed il piacere di studiarla ed insegnarla.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BALLESTER-BOLINCHES, R. ESTEBAN-ROMERO, D.J.S. ROBINSON, On finite minimal non-nilpotent groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, (12) 133 (2005), 3455-3462.
- [2] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, third edition, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.
- [3] N. BLACKBURN, Generalizations of certain elementary theorems on p -groups, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 11 (1961), 1-22.
- [4] R.D. BLYTH, Rewriting products of group elements, I, *J. Algebra*, 116 (1988), 506-521.
- [5] R.D. BLYTH, Rewriting products of group elements, II, *J. Algebra*, 118 (1988), 246-259.
- [6] R.D. BLYTH, D.J.S. ROBINSON, Recent progress on rewritability in groups, *Proceedings of the 1987 Singapore Group Theory Conference*, Walter de Gruyter and co., Berlin, 1989, 77-86.
- [7] R.D. BLYTH, D.J.S. ROBINSON, Solution of the solubility problem for rewritable groups, *J. London Math. Soc.*, 41 (1990), 438-444.
- [8] R.D. BLYTH, D.J.S. ROBINSON, Insoluble groups with the rewriting property P_8 , *J. Pure Appl. Algebra*, 72 (1991), 251-263.
- [9] W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.
- [10] C.D.H. COOPER, Power automorphisms of a group, *Math. Z.*, 107 (1968), 335-356.
- [11] M. COSTANTINI, E. JABARA, On Finite Groups in Which Cyclic Subgroups of the Same Order are Conjugate, *Comm. Algebra*, 37 (2009), 3966-3990.
- [12] M. CURZIO, Guido Zappa e la teoria dei gruppi, Atti del Convegno Internazionale di Teoria dei Gruppi e Geometria Combinatoria, Firenze 23-25, 1986, in onore di Guido Zappa, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., serie II*, 19 (1988), 19-34.
- [13] U. DARDANO, On groups with many maximal subgroups, *Ricerche Mat.*, (2) 38 (1989), 261-271.
- [14] U. DARDANO, Groups whose nonnormal subgroups are intersection of maximal subgroups, *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, (3) 6 (1992), 365-377.
- [15] L. DI MARTINO, M.C. TAMBURINI BELLANI, On the solvability of finite IM -groups, *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 115 (1981), 235-242.
- [16] M.I. ELASHIRI, D.S. PASSMAN, Rewritable groups, *J. Algebra*, 345 (2011), 190-201.
- [17] R. ESTEBAN-ROMERO, G. VINCENZI, Characterizations of groups in which normality is a transitive relation by means of subgroup embedding properties, *Int. J. Group Theory*, (2) 7 (2018), 9-16.
- [18] W. GASCHÜTZ, Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist, *J. Reine Angew. Math.*, 198, 1957, 87-92.
- [19] R. GATTO, Ricordi e riflessioni di un matematico: Mario Curzio, *Lettera Pristem*, 9 (1994), 4-8.
- [20] F. DE GIOVANNI, A. RUSSO, A note on groups with few isomorphism classes of subgroups, *Colloquium Math.*, (2) 144 (2016), 265-271.
- [21] G. HIGMAN, Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements, *J. London Math. Soc.*, 32 (1957), 321-334.
- [22] I. KAPLANSKY, Groups with representations of bounded degree, *Canad. J. Math.*, 1 (1949), 105-112.
- [23] L.G. KOVACS, Groups with uniform automorphisms, Atti del Convegno Internazionale di Teoria dei Gruppi e Geometria Combinatoria, Firenze 23-25, 1986, in onore di

- Guido Zappa, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, serie II, **19** (1988), 125-133.
- [24] L. KURDACHENKO, J. OTAL, I. SUBBOTIN, *Groups with Prescribed Quotient Groups and Associated Module Theory*, Series in Algebra, Vol. 8, World Scientific, 2002.
- [25] A.G. KUROSH, *The theory of groups*, 2nd edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1953.
- [26] N. ITÔ, Note on (LM) -groups of finite order, Technical report, *Kodai Math. Seminar Report*, 1951.
- [27] S.G. IVANOV, Standard and dually standard elements of the subgroup lattice of a group, *Algebra i Logika*, **8** (1969), 440-446.
- [28] S.G. IVANOV, L -homomorphisms of locally soluble torsion-free groups, *Mat. Zametki*, (5) **37** (1985), 627-635.
- [29] K. IWASAWA, Über die Endliche Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen, *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sect. I*, **4** (1941), 171-199.
- [30] K. IWASAWA, On the structure of infinite M -groups, *Jap. J. Math.* **18** (1943), 709-728.
- [31] E. JABARA, Gruppi Policiclici Dotati di un Automorfismo Uniforme di Ordine pq , *Rend. Circ. Mat. Palermo*, (3) **54** (2005), 367-380.
- [32] E. JABARA, Sugli automorfismi uniformi e privi di coincidenze dei gruppi infiniti, *Boll. Un. Mat. Ital. B*, (2) **10** (2007), 501-510.
- [33] P. LONGOBARDI, M. MAJ, Finite groups with nilpotent derived subgroup, having a distributive lattice of normal subgroups, *J. Algebra* (1) **101**, (1986), 251-261.
- [34] P. LONGOBARDI, M. MAJ, On groups in which every product of four elements can be reordered, *Arch. Math* **49** (1987), 15-19.
- [35] P. LONGOBARDI, S.E. STONEHEWER, Finite 2-groups of class 2 in which every product of four elements can be reordered, *Arch. Math* **35** (1991), 198-209.
- [36] P. LONGOBARDI, M. MAJ, A.H. RHEMTULLA, Periodic groups with permutable subgroup products, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* (3) **106** (1989), 431-437.
- [37] P. LONGOBARDI, M. MAJ, A.H. RHEMTULLA, Residually solvable PSP-groups, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7) **7** (1993), 253-261.
- [38] M. MAJ, S.E. STONEHEWER, Nilpotent groups in which every product of four elements can be reordered, *Canad. J. Math.* (4) **2** (1990), 1053-1066.
- [39] F. MENEGAZZO, Gruppi nei quali ogni sottogruppo è intersezione di sottogruppi massimali, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. Nat.*, (8) **48** (1970), 559-562.
- [40] F. MIGLIORINI, L. SERENA, Ricordo di Guido Zappa, *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli*, **LXXXIII** (2016), 1-13.
- [41] G.A. MILLER, H.C. MORENO, Nonabelian groups in which every subgroup is abelian, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **4** (1903), 398-404.
- [42] F. NAPOLITANI, Elementi $\cup$ -quasi distributivi nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo, *Ricerche Math.*, **14** (1965), 93-101.
- [43] B.H. NEUMANN, A problem of P. Erdős on groups, *J. Austral. Math. Soc.*, **21** (1976), 4589-463.
- [44] A. YU. OL'SHANSKII, An infinite group with subgroups of prime orders, *Math. USSR Izv.*, **16** (1981), 279-289; translation of *Izvestia Akad. Nauk SSR Ser. Matem.* **44** (1980), 309-321.
- [45] O. ORE, Structures and group theory I, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 149-173.
- [46] O. ORE, Structures and group theory II, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 247-269.
- [47] O. ORE, Contribution to the theory of groups of finite order, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 431-460.
- [48] D.S. PASSMAN, Permutational and rewritable groups, *Proc. AMS*, **147** (2019), 2539-2555.
- [49] G. PAZDERSKI, Über Gruppen mit isomorphen Subnormalteilerverbände, *Publ. Math. Debrecen*, **19** (1972), 1-19.
- [50] C.E. PRAEGER, C. SCHNEIDER, Group factorisations, uniform automorphisms and permutation groups of simple diagonal type, *Israel J. Math.*, **228** (2018), 1001-1023.
- [51] A. RESTIVO, C. REUTENAUER, On the Burnside problem for semigroups, *J. Algebra*, **89** (1984), 102-104.
- [52] A.H. RHEMTULLA, A.R. WEISS, Groups with permutable subgroup products, *Proceedings of the 1987 Singapore Group Theory Conference*, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1989, 485-495.
- [53] D.J.S. ROBINSON, Groups in which normality is a transitive relation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 21-38.
- [54] D.J.S. ROBINSON, *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*, Parts 1-2, Springer, 1972.
- [55] D.J.S. ROBINSON, J. WILSON, Soluble groups with many polycyclic quotients, *Proc. London Math. Soc.* **48** (1984), 193-229.
- [56] A. RUSSO, Groups in which normality is a transitive relation, *Comm. Algebra*, **40** (2012), 3950-3954.
- [57] O.J. SCHMIDT, Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind, *Mat. Sbornik*, **31** (1924), 366-372.
- [58] O.Ju. SCHMIDT, *Abstract Theory of Groups*, W.H. Freeman and Co., 1966 (Translation by F. Holling and J.B. Roberts of the 1916 Russian edition).
- [59] R. SCHMIDT, *Gruppen mit modularer Untergruppenverband*, *Archiv Math*, **46** (1986), 118-124.
- [60] R. SCHMIDT, *Subgroup Lattices of Groups*, de Gruyter Exp. Math., **14**, de Gruyter, Berlin, New York, 1994.
- [61] S. STONEHEWER, G. ZACHER, Dual-standard subgroups of finite and locally finite groups, *Manuscripta Math.*, **70** (1991), 115-132.
- [62] S. STONEHEWER, G. ZACHER, Lattice homomorphisms of non-periodic groups, *J. Algebra*, **138** (1991), 48-90.
- [63] S. STONEHEWER, G. ZACHER, Lattice homomorphisms of groups and dual standard subgroups, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **23** (1990), 289-297.
- [64] S. STONEHEWER, G. ZACHER, Dual standard subgroups in non-periodic locally soluble groups, *Accad. Naz. Lincei*, **9** (1990), 101-104.
- [65] M. SUZUKI, On the lattice of subgroups of finite groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 345-71.
- [66] M. SUZUKI, On the L -homomorphisms of finite groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 372-386.
- [67] J.G. THOMPSON, Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45** (1959), 578-581.
- [68] U. TIBERIO, Sottogruppi duali standard nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo localmente finito e numerabile, *Matematiche (Catania)*, **24** (1969), 416-428.
- [69] G. ZACHER, Conoscenze attuali relative ad alcuni aspetti del reticolo dei sottogruppi di un gruppo, *Atti del Conve-*

gno Internazionale di Teoria dei Gruppi e Geometria Combinatoria, Firenze 23-25, 1986, in onore di Guido Zappa, *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, serie II, **19** (1988), 39-60.

- [70] G. ZACHER, Determinazione dei gruppi di ordine finito relativamente complementati, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, (4) **19** (1952), 200-206.
- [71] G. ZACHER, Caratterizzazione dei t -gruppi risolubili finiti, *Ricerche Math.*, **1** (1952), 287-292.
- [72] G. ZACHER, Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **22** (1952), 113-122.
- [73] G. ZACHER, Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **27** (1957), 75-79.
- [74] G. ZACHER, Sui gruppi risolubili finiti col reticolo dei sottogruppi di composizione dotato di duale, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **32** (1962), 325-327.
- [75] G. ZAPPA, Determinazione degli elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, (4) **18** (1951), 22-28.
- [76] G. ZAPPA, Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo, *Boll. Unione Mat. Ital. Seri 8*, **11** (1956), 150-157.
- [77] G. ZAPPA, Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è modulare, *Boll. Unione Mat. Ital. Seri 8*, **11** (1956), 315-318.
- [78] G. ZAPPA, Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch, *Ricerche Mat.*, **7** (1958), 1-13.
- [79] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Bd.1, **21**, Hamburg. Math. Einzelschriften, B.G. Teubner, 1937.
- [80] J. ZHANG, Structure of finite ISO-groups, *Comm. Algebra*, **23** (1995), 1605-1612.

ARTICOLI DI MARIO CURZIO

- [C1] M. CURZIO, Alcune limitazioni sul minimo ordine dei reticoli modulari di lunghezza 3 contenenti sottoreticoli d'ordine dato, *Ricerche Mat.* **2** (1953), 140-147.
- [C2] M. CURZIO, Su di un particolare isomorfismo di struttura, *Ricerche Mat.* **2** (1953), 288-300.
- [C3] M. CURZIO, I gruppi finiti che sono somma di tre o quattro laterali di sottogruppi propri, *Boll. Un. Mat. Ital.* **10** (1955), 228-232.
- [C4] M. CURZIO, Gli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi d'un gruppo, *Ricerche Mat.* **4** (1955), 3-14.
- [C5] M. CURZIO, Una osservazione sui piani grafici h - l transitivi, *Boll. Un. Mat. Ital. III. Ser.* **11** (1956), 238-241.
- [C6] M. CURZIO, Su di una questione proposta da G. Birkhoff, *Ricerche Mat.* **6** (1957), 27-33.
- [C7] M. CURZIO, Alcune osservazioni sul reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito, *Ricerche Mat.* **6** (1957), 96-110.
- [C8] M. CURZIO, Sui reticoli U -quasi distributivi, *Ricerche Mat.* **6** (1957), 237-240.
- [C9] M. CURZIO, Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti, *Boll. Un. Mat. Ital. III Ser.* **12** (1957), 284-289.
- [C10] M. CURZIO, Sui gruppi supersolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è autoduale, *Matematiche (Catania)* **12** (1957), 74-79.

- [C11] M. CURZIO, Sui gruppi φ -isomorfi ad un gruppo speciale finito, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., IV Ser., Napoli* **24** (1957), 70-75.
- [C12] M. CURZIO, Sugli elementi $\cap$ e $\cup$ -quasi distributivi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito, *Convegno internaz. Reticoli Geom. proiettive, Palermo-Messina 1957* (1958), 79-80.
- [C13] M. CURZIO, Sugli N -gruppi risolubili, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **25** (1958), 447-452.
- [C14] M. CURZIO, Sui sottogruppi di composizione dei gruppi finiti, *Ricerche Mat.* **7** (1958), 265-280.
- [C15] M. CURZIO, Su alcuni gruppi complementati, *Ricerche Mat.* **8** (1959), 172-179.
- [C16] M. CURZIO, Proprietà di struttura delle classi laterali relative ad un gruppo, *Matematiche* **12** (1957), 51-57 (1959).
- [C17] M. CURZIO, Sui gruppi risolubili a fattoriali supersolubili, *Ricerche Mat.* **9** (1960), 82-90.
- [C18] M. CURZIO, Alcuni criteri di finitezza per i gruppi a condizione massimale o minimale, *Ricerche Mat.* **9** (1960), 248-254.
- [C19] M. CURZIO, Una osservazione sui gruppi finiti a fattoriali supersolubili, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., IV Ser., Napoli* **27** (1960), 59-62.
- [C20] M. CURZIO, Sugli automorfismi uniformi nei gruppi a condizione minimale, *Riv. Mat. Univ. Parma, II Ser.* **1** (1960), 107-122.
- [C21] M. CURZIO, Sui sottogruppi normali dei gruppi speciali, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., IV Ser., Napoli* **28** (1961), 395-402.
- [C22] M. CURZIO, Alcune congruenze del reticolo dei sottogruppi di composizione, *Conf. Semin. Mat. Univ. Bari* **77** (1962), 24 pp.
- [C23] M. CURZIO, Sui trasportatori nei gruppi e nelle algebre di Lie, *Ricerche Mat.* **11** (1962), 3-23.
- [C24] M. CURZIO, Certains critères de nilpotence pour les groupes finis, *Bull. Sci. Math., II Ser* **86** (1962), 74-80.
- [C25] M. CURZIO, Les transporteurs d'un groupe fini dans les sous-groupes de Fitting et Frattini, *Algèbre et Théorie des Nombres, Sémin. P. Dubreil. M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot* **15** no.1, exp. no. 1 (1961/62), (1963), 1-11.
- [C26] M. CURZIO, Treillis des sous-groupes de composition, *Algèbre et Théorie des Nombres, Sémin. P. Dubreil. M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot* **14** no.1, exp. no. 9 (1961/62), (1963), 1-12.
- [C27] M. CURZIO, Elementi $\cup$ quasi-distributivi in alcuni reticoli di gruppi, *Ricerche Mat.* **13** (1964), 70-79.
- [C28] M. CURZIO, Sui gruppi per cui sono riducibili alcuni reticoli di sottogruppi notevoli, *Matematiche (Catania)* **19** (1964), 1-10.
- [C29] M. CURZIO, R. PERMUTTI, Distributività nel reticolo dei sottogruppi normali di un T -gruppo *Matematiche (Catania)* **20** (1965), 46-63.
- [C30] M. CURZIO, Una caratterizzazione reticolare dei gruppi abeliani, *Rend. Mat. Appl., V Ser.* **24** (1965), 1-10.
- [C31] M. CURZIO, M. GIORDANO, Una proprietà reticolare di alcuni p -gruppi localmente finiti, *Matematiche (Catania)* **21** (1966), 18-22.
- [C32] M. CURZIO, Corpi semiordinati e funzioni d'ordine di uno spazio sopra un corpo, *Confer. Sem. Mat. Univ. Bari* **105-106** (1966), 24 pp.
- [C33] M. CURZIO, Sui gruppi di torsione a fattoriali abeliani, *Ricerche Mat.* **16** (1967), 154-161.

- [C34] M. CURZIO, Una generalizzazione degli spazi di Sperner, *Ricerche Mat.* **16** (1967), 145-153.
- [C35] M. CURZIO, Problemi di complementazione in teoria dei gruppi, *Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68)*, Vol 1, Academic Press, London, 1969, 195-208.
- [C36] M. CURZIO, Gruppi risolubili finiti a sottogruppi subnormali caratteristici *Ricerche Mat.* **18** (1969), 75-82.
- [C37] M. CURZIO, Gruppi risolubili verificanti una condizione di massimo, *Ricerche Mat.* **18** (1969), 120-127.
- [C38] M. CURZIO, Su un problema di minimalità per gruppi finiti, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* **4** (1972), 78-84.
- [C39] M. CURZIO, Un problema di massimo in teoria dei moduli, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **42** (1972), 111-118.
- [C40] M. CURZIO, Problemi di minimalità in teoria dei gruppi, *Boll. Un. Mat. Ital.*, IV Ser. **7**, Suppl. al Fasc. 1 (1973), 1-9.
- [C41] M. CURZIO, Gruppi risolubili a sottogruppi subnormali caratteristici, Academic Press, London-New York, 1976, 283-300.
- [C42] M. CURZIO, On groups with finite automorphism group, *Sistemi binari e loro applicazioni, Conv. Taormina/Messina* 1978 (1978), 193-217.
- [C43] M. CURZIO, The groups for which each proper subgroup has a finite automorphism group, *Ricerche Mat.* **28** (1979), 203-210.
- [C44] M. CURZIO, Groups with finite automorphism group, *Quad. Ric. Sci.* **109** (1981), 71-90.
- [C45] M. CURZIO, S. RAO, Chief factors of IM-groups, *Ricerche Mat.* **30** (1981), 279-295; Errata: Chief factors of IM-groups, *Ricerche Mat.* **31** (1982), 220.
- [C46] M. CURZIO, Recent results on minimal and maximal conditions for the subnormal subgroups of a group, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **52** (1982), 331-340.
- [C47] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **74** (1983), 136-142.
- [C48] M. CURZIO, Classification of finite minimal nonmetacyclic groups, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **47** (1984), 289-295.
- [C49] M. CURZIO, Some supersolvability criteria for finite groups, *Stochastica* **8** (1984), 147-156.
- [C50] M. CURZIO, Sul problema di Burnside, *Seminario di Geometrie Combinatorie, Università degli Studi dell'Aquila*, **8** (1985).
- [C51] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, D.J.S. ROBINSON, A permutational property of groups, *Arch. Math. (Basel)* **44** (1985), 385-389.
- [C52] M. CURZIO, Guido Zappa e la teoria dei gruppi, *Atti del Convegno Internazionale di Teoria dei Gruppi e Geometria Combinatoria, Firenze 23-25, 1986, in onore di Guido Zappa, Rend. Circ. Mat. Palermo, II Ser.* **19**, Suppl.(1988), 19-34.
- [C53] M. CURZIO, Round table on the theme "Logic in mathematics". Introductory intervention, Mathematical foundations, Proc. Meet., Siena/Italy 1987, Atti Incontri Logica Math **4** (1988), 29-33.
- [C54] M. CURZIO, D.J.S. ROBINSON, H. SMITH, J. WIEGOLD, Some remarks on central automorphisms of hypercentral groups, *Arch. Math. (Basel)* **53**, no.4 (1989), 327-331.
- [C55] M. CURZIO, S. FRANCIOSI, F. DE GIOVANNI, On automorphisms fixing infinite subgroups of groups, *Arch. Math. (Basel)* **54**, no.1 (1990), 4-13.
- [C56] M. CURZIO, J. LENNOX, A. RHEMTULLA, J. WIEGOLD, Groups with many permutable subgroups, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **48**, no.3 (1990), 397-401.
- [C57] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, A. RHEMTULLA, Groups with many rewritable products, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115**, no.4 (1992), 931-934.
- [C58] M. CURZIO, C.K. GUPTA, Second Fox subgroups of arbitrary groups, *Canad. Math. Bull.* **38**, no.2 (1995), 177-181.
- [C59] M. CURZIO, Some congruences of subnormal subgroups, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **65** (1995), 53-62.

TESTI E MONOGRAFIE DI MARIO CURZIO

- [LC1] M. CURZIO, R. PERMUTTI, *Complementi ed esercizi di geometria descrittiva*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 1958.
- [LC2] M. CURZIO, *Lezioni di algebra*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 1970.
- [LC3] M. CURZIO, *Some problems of Sylow type in locally finite groups*, Institutiones Mathematicae, Vol. V, Roma, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Academic Press, 1979, 69 p.; AGTA Lost Monographs, 2024.
- [LC4] M. CURZIO, F. DE GIOVANNI, *Topics in Infinite Groups*, Quaderni di Matematica **8**, Roma, Aracne, 2001, 333 p.
- [LC5] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, *Esercizi di algebra. Una raccolta di prove d'esame svolte*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 2011.
- [LC6] M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, *Lezioni di algebra*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 2014.



Patrizia
Longobardi

Patrizia Longobardi è attualmente professoressa a contratto dell'Università degli Studi di Salerno dove ha prestato servizio fino al 2024 come professoressa ordinaria di Algebra. Ha pubblicato oltre cento articoli su riviste internazionali e tre testi didattici. Organizza dal 2004, ogni due anni, il Convegno Internazionale "Ischia Group Theory" ed è editor dei relativi proceedings. È editor della rivista "International Journal of Group Theory".



Mercedes Maj

Mercedes Maj è stata professoressa ordinaria di Algebra presso l'Università degli Studi di Salerno dal 1996 al 2024, di cui è stata anche Presidente della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Ha pubblicato oltre cento articoli su riviste internazionali e tre testi didattici. Attualmente è professoressa a contratto della stessa Università. Organizza dal 2004, ogni due anni, il Convegno Internazionale "Ischia Group Theory" ed è editor dei relativi proceedings.