Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Alessandro Zaccagnini

2025. Il teorema di Nicomaco e i suoi sviluppi

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (2025), n.2, p. 147–161.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_2_147_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2025.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 10, N. 2, agosto 2025, 147-161

2025. Il teorema di Nicomaco e i suoi sviluppi

ALESSANDRO ZACCAGNINI
Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Parma
E-mail: alessandro.zaccagnini@unipr.it

Sommario: *Partendo dall'osservazione che* $1^3+2^3+\cdots+9^3=45^2=2025$*, introduciamo alcune identità e facciamo un giro nella matematica parlando di combinatoria, analisi matematica e molto altro, arrivando a "intuire" una proprietà profonda della funzione zeta di Riemann.*

Abstract: *Starting from the remark that* $1^3+2^3+\cdots+9^3=45^2=2025$*, we introduce some identities and have a mathematical tour talking about combinatorics, mathematical analysis and much else, until we "guess" a deep property of the Riemann zeta-function.*

1. – Storia

La motivazione per scrivere un nuovo articolo che contiene nel titolo l'anno in cui è stato pubblicato proviene dall'uguaglianza

$$1^3+2^3+\cdots+9^3=(1+2+\cdots+9)^2=45^2=2025.$$

Si tratta di un caso particolare del Teorema o Identità di Nicomaco, secondo i quali

$$1^3+2^3+\cdots+N^3=(1+2+\cdots+N)^2=\\ =\Big(\frac{N(N+1)}{2}\Big)^2$$

per ogni intero positivo N. L'identità

$$1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2} \tag{1}$$

è ben nota, così come l'aneddoto secondo il quale Gauss l'avrebbe riscoperta da bambino e utilizzata per risolvere molto velocemente un problema posto dal suo maestro. La parte sinistra della Figura 1 ne illustra un caso particolare.

Accettato: 29 giugno 2025.

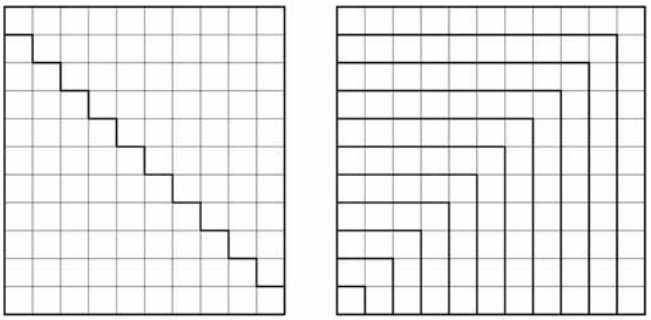

FIGURA 1 – A sinistra la dimostrazione dell'identità (1) per $N=10$. Il rettangolo ha una base lunga 10 unità ed un'altezza di 11; la somma $1+2+\cdots+9+10$ vale metà della sua area. A destra la dimostrazione dell'identità (2) per $N=10$. La somma $1+3+5+\cdots+19+21$ è pari all'area del quadrato di lato 11.

La relazione equivalente

$$1+3+5+\cdots+(2N+1)=(N+1)^2 \tag{2}$$

era certamente nota agli antichi Greci. La dimostrazione per mezzo degli "gnomoni" è riprodotta nella parte destra della Figura 1. Molti ricordano anche le due identità

$$\sum_{j=1}^{N}j^2=\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

e

$$\sum_{j=1}^{N} j^3 = \Big(\frac{N(N+1)}{2}\Big)^2.$$

La prima può essere usata per dare una dimostrazione delle formule di Archimede per la quadratura della parabola, la seconda è proprio l'identità di Nicomaco.

Considerazioni euristiche. Queste relazioni suggeriscono che la funzione

$$S_k(N) = \sum_{j=0}^{N} j^k, \tag{3}$$

si possa rappresentare mediante un polinomio p_k di grado $k+1$ nella variabile N, quando k è un intero non negativo. Ci possiamo anche spingere a congetturare che il primo coefficiente di p_k sia $(k+1)^{-1}$ sulla base delle formule date sopra. Nei prossimi paragrafi daremo argomentazioni di varia natura che suggeriscono la correttezza di questa congettura, e vari modi per determinare concretamente i coefficienti di p_k. Per motivi formali è più semplice se facciamo partire da 0 la somma nella definizione (3); l'unica differenza si ha per $k = 0$ quando definiamo $S_0(N) = N + 1$, usando la stessa convenzione che si usa quando si scrivono le serie di potenze e le si calcolano nel centro dello sviluppo, cioè $0^0 = 1$; di solito questa convenzione resta implicita e non ci si fa nemmeno caso. Questo ci permetterà di dare alcune proprietà valide per $k \in \mathbb{N}$ senza fare eccezioni per $k = 0$. Per esempio, $N + 1$ divide $S_k(N)$ in $\mathbb{Q}[N]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Discuteremo di queste proprietà di divisibilità nel §7.

Una puntualizzazione formale. Prima di proseguire è necessario fare qualche altra considerazione di carattere formale; il dominio di S_k è $\mathbb{N}$, l'insieme degli interi non negativi, e conoscere una funzione sugli interi non è sufficiente a determinare completamente una sua eventuale estensione ad $\mathbb{R}$: per esempio le funzioni $f(x)$ ed $f(x) + \sin(\pi x)$ coincidono su tutti i numeri interi senza coincidere come funzioni. Dunque stiamo dicendo questo: se k è intero, esiste un polinomio p_k tale che $S_k(N) = p_k(N)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Non si tratta esclusivamente di una questione formale sul dominio di una certa funzione: vedremo anche il caso in cui k è positivo ma non necessariamente intero, e quindi S_k non si può rappresentare mediante un polinomio, ma le approssimazioni che troveremo saranno valide a prescindere perché si ottengono tramite considerazioni di monotonia di una certa funzione reale, e cioè $f_k(x) = x^k$. Estenderemo ulteriormente questi risultati al caso in cui k è negativo (eliminando l'addendo $j = 0$ dalla definizione, beninteso), e parleremo quindi della funzione zeta di Riemann, vedendone alcune proprietà interessanti. Saremo dunque costretti a distinguere quali valori di k stiamo prendendo in considerazione, ma questo è inevitabile in vista delle estensioni che vogliamo trattare nella seconda parte dell'articolo.

Inizialmente consideriamo il caso "facile" in cui $k \in \mathbb{N}$. Una volta che avremo dimostrato che esiste un polinomio p_k tale che $S_k(N) = p_k(N)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$, ci potremo concentrare sulla determinazione dei coefficienti di p_k sfruttando il fatto che il suo dominio è $\mathbb{R}$, e che su questo insieme è una funzione continua, derivabile, ... In pratica ci avvaliamo del principio di identità dei polinomi che ricordiamo più avanti. In linea di principio non avrebbe senso parlare di integrali e derivate di S_k; ma se dimostriamo che S_k, ristretto ai numeri naturali, è un polinomio, possiamo poi ricavarne i coefficienti usando argomentazioni di natura diversa, uscendo in un certo senso dal dominio naturale della funzione S_k. Una discussione puntuale di questa questione si può trovare nell'articolo di Levy citato in Bibliografia.

Perché queste identità sono interessanti? Per spiegare meglio l'interesse per identità di questo tipo anche al di fuori della matematica vera e propria conviene raccontare per intero l'aneddoto di Gauss bambino: a quanto pare il suo maestro dette il compito di calcolare $1 + 2 + \cdots + 100$; qualche minuto dopo Gauss consegnò la sua lavagnetta con il risultato corretto, 5050, e dovettero aspettare parecchio tempo perché i compagni di scuola consegnassero le loro. Lo scetticismo del maestro dovette svanire quando vide che l'unico risultato giusto era appunto quello di Gauss. Con il linguaggio moderno dell'informatica, possiamo dire che l'uso di una identità ha ridotto la *complessità computazionale* del calcolo e allo stesso tempo ne ha aumentato

l'accuratezza; se questo può essere relativamente poco rilevante quando è coinvolta la sola aritmetica dei numeri interi, diventa molto più importante quando si devono eseguire calcoli in virgola mobile, come può essere la somma parziale di una serie geometrica (8) con argomento non intero.

Come è strutturato questo articolo. Il primo risultato che enunceremo è il teorema che per l'appunto garantisce che c'è un polinomio con la proprietà che cerchiamo quando k è un intero non negativo. Nel prossimo paragrafo vedremo argomentazioni euristiche di varia natura, alcune delle quali permettono di dare una dimostrazione rigorosa e anche un modo per determinare i coefficienti del polinomio in questione. Più avanti vedremo il Teorema di Levy che dà la possibilità di ottenere i polinomi p_k ricorsivamente ed il Teorema di Faulhaber che ci permetterà di legare i coefficienti del polinomio p_k ai numeri di Bernoulli che definiremo nell'Appendice B; anche questi ultimi possono essere determinati ricorsivamente. Completano l'articolo alcune discussioni relative al caso in cui k non è intero.

Teorema 1 *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un polinomio p_k di grado $k+1$ a coefficienti razionali tale che per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha $S_k(N) = p_k(N)$.*

Naturalmente i $k+2$ coefficienti di p_k possono essere determinati imponendo $k+2$ condizioni (per esempio, osservando che $p_k(n) = S_k(n)$ per $n \in \{0, 1, \dots, k+1\}$), ma resta la domanda se possa esistere un procedimento più efficiente rispetto a risolvere un sistema lineare con $k+2$ incognite. I teoremi che vedremo più avanti conterranno qualche risposta a questa domanda.

2. – Euristica

Per prima cosa vedremo un'argomentazione non molto profonda che suggerisce il corretto andamento asintotico per la funzione S_k quando k è un numero *reale* positivo. Proseguiremo con un'argomentazione combinatoria elementare che è sufficiente a dimostrare rigorosamente il Teorema appena enunciato, dando una relazione di ricorrenza che lega fra loro i polinomi p_k per diversi valori di k, ovviamente quando $k \in \mathbb{N}$. Poi daremo una nuova argomentazione analitica che permette di determinare i primi due coefficienti di p_k, il cui interesse principale sta nel fatto che si può usare anche per k non intero e addirittura negativo (ridefinendo come detto la funzione S_k), ottenendo la corretta asintotica per la funzione S_k in generale. Ma cominciamo piano piano, andando con ordine.

2.1 – *Andamento asintotico*

Qui supponiamo che $k > 0$ sia un numero reale fissato. Possiamo notare che S_k è una *somma di Riemann* per la funzione $f_k(x) = x^k$ sull'intervallo $[0, N]$ e quindi ci si aspetta che, almeno asintoticamente, si debba avere

$$S_k(N) = \sum_{j=0}^{N} j^k \sim \int_0^N x^k \,\mathrm{d}x = \frac{N^{k+1}}{k+1}.$$

La dimostrazione della relazione asintotica non è difficile e segue dalle disuguaglianze che intercorrono tra un integrale di Riemann per funzioni monotòne e la relativa primitiva. In sostanza, se $f\colon \mathbb{R}^{0+} \to \mathbb{R}^{0+}$ è monotòna crescente allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(n) \le \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le f(n+1)$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) \le \int_0^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{N+1} f(n).$$

Nel nostro caso $f(x) = x^k$ e quindi le quantità estreme valgono rispettivamente $S_k(N)$ ed $S_k(N+1)$ mentre la quantità al centro vale $(N+1)^{k+1}/(k+1)$. Questo basta per dimostrare la relazione asintotica, perché queste disuguaglianze implicano che $N^{k+1}/(k+1) \le S_k(N) \le (N+1)^{k+1}/(k+1)$, e le due quantità estreme sono polinomi di grado $k+1$ con primo coefficiente $(k+1)^{-1}$ quando k è intero. Più avanti useremo una versione della "formula dei trapezi" enunciata nell'Appendice A che fornisce un risultato più preciso per le funzioni f derivabili e non semplicemente monotòne.

Ora torniamo a restringere il dominio per k ai soli numeri naturali. Un modo simile per intuire la stessa

cosa è osservare che per definizione la funzione S_k soddisfa

$$S_k(N+1) - S_k(N) = (N+1)^k, \tag{4}$$

e questo, per il Teorema di Lagrange, è compatibile con l'idea che S_k sia la restrizione ad $\mathbb{N}$ di un polinomio p_k di grado $k+1$. Oggi sappiamo dalla teoria generale che un'equazione alle differenze come (4) ha una tale soluzione; ovviamente la teoria in questione è stata sviluppata dopo che sono emerse tante istanze di risultati simili a questo. Un'idea alternativa è considerare l'identità

$$\frac{(N+1)^{k+1} - N^{k+1}}{k+1} = \int_N^{N+1} t^k \, \mathrm{d}t \sim N^k,$$

che ci mette sulla strada che porta alla scoperta dei polinomi di Bernoulli; si veda l'Appendice B e in particolare la formula (17).

3. – Dimostrazione combinatoria

In questo paragrafo prendiamo $k \in \mathbb{N}$. Un modo elementare per convincerci che le funzioni S_k sono effettivamente restrizioni ad $\mathbb{N}$ di polinomi p_k proviene da un esame del Triangolo di Tartaglia. Se sommiamo alcuni elementi consecutivi su una diagonale fissata troviamo un opportuno coefficiente sulla diagonale successiva: si veda la Figura 2. Più formalmente si dimostra per induzione su N che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{n+k}{k} = \binom{N+k+1}{k+1}, \tag{5}$$

essenzialmente sfruttando solo le proprietà

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{e} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},$$

valide rispettivamente per $n \geq 0$ e per $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Vediamo in azione un esempio concreto: per $k = 0$ e $k = 1$ l'identità (5) restituisce le due uguaglianze

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{n}{0} = \binom{N+1}{1} = N+1$$

e

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{n+1}{1} = \binom{N+2}{2} = \frac{1}{2}(N+1)(N+2).$$

La prima è evidentemente banale, mentre la seconda equivale a $S_0(N) + S_1(N) = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ e quindi alla relazione (1). Fin qui niente di nuovo, e allora prendiamo $k = 2$, ottenendo

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{n+2}{2} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2}(n+1)(n+2) =$$

$$= \binom{N+3}{3} = \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(N+3).$$

Semplificando otteniamo

$$\sum_{n=0}^{N} (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(N+1)(N+2)(N+3). \tag{6}$$

Il primo membro vale $S_2(N) + 3S_1(N) + 2S_0(N)$ e quindi, usando le formule ricavate sopra per S_0 ed S_1, possiamo dedurre che $S_2(N) = p_2(N)$ ha la forma data in una delle formule ricordate in precedenza.

È evidente che questo procedimento può essere utilizzato in generale per trovare che una certa combinazione lineare delle funzioni S_0, …, S_k è un polinomio a coefficienti interi di grado $k+1$. Questo permette di dimostrare per induzione che S_k è (la restrizione ad $\mathbb{N}$ di) un polinomio a coefficienti razionali di grado $k+1$, quello che chiamiamo p_k, cioè il Teorema 1; la base dell'induzione è pressoché banale. Inoltre, questo ci dà un procedimento pratico, estremamente inefficiente, per ricavare la forma concreta di p_k conoscendo le espressioni di p_j con $j < k$; il Teorema di Levy qui sotto ci permetterà una cosa analoga in cui però è sufficiente la conoscenza di p_{k-1}.

Una conseguenza non ovvia è la dimostrazione che $N+1$ è sempre un fattore algebrico di $p_k(N)$; in altre parole, esiste un polinomio q_k a coefficienti razionali tale che $p_k(N) = (N+1)q_k(N)$. Anche questo si dimostra facilmente per induzione, ricordando la nostra convenzione iniziale che $p_0(N) = N+1$. Torneremo su questo aspetto nel §7 dedicato alla scomposizione in fattori dei polinomi p_k.

Basi dello spazio vettoriale dei polinomi. I polinomi $q_k(n) = \binom{n+k}{k}$ sono una *base* dello spazio vetto-

riale $\mathbb{Q}[n]$; quelli con $k \leq d$ sono una base del sottospazio dei polinomi di grado $\leq d$. Da un certo punto di vista costituiscono una base più *naturale* di quella dei monomi 1, n, n^2, …, ed il nostro problema consiste nell'esprimere i vettori di quest'ultima base come combinazione lineare di elementi della precedente. Notiamo che si tratta di polinomi che assumono valori interi negli argomenti interi, ma hanno coefficienti razionali non tutti interi.

Nell'Appendice C introdurremo il simbolo di Pochhammer $(a)_n$, che in un certo senso generalizza i polinomi q_k (definiti solo sui numeri naturali, per costruzione) a valori non necessariamente interi della variabile, un tema che tornerà fra breve. Nel §4, nel quale parleremo principalmente di derivate, vedremo che un'altra base che emerge in modo naturale è costituita dai polinomi 1, n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, …

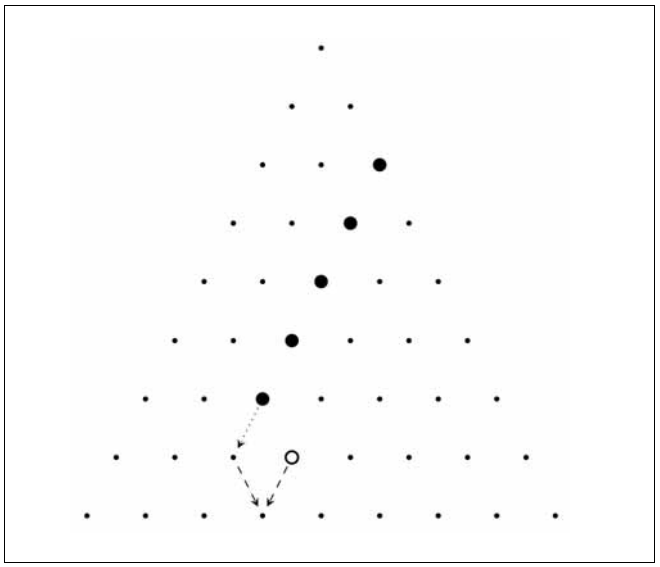

FIGURA 2 – La dimostrazione per induzione della relazione (5). La somma dei coefficienti binomiali indicati dal pallino grande è data dal pallino vuoto. Se aggiungiamo anche il coefficiente successivo sulla stessa diagonale, indicato dalla freccia con i puntini, troviamo quello indicato dalle altre frecce, per una delle proprietà dei coefficienti binomiali.

3.1 – *Una relazione di ricorrenza*

La relazione (4) suggerisce di usare il Triangolo di Tartaglia e scrivere in questo modo

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} n^j (-1)^{k-j}.$$

Quindi, sommando su $n = 0, \ldots, N$ troviamo

$$N^{k+1} + (-1)^k = \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} n^j (-1)^{k-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} \sum_{n=0}^{N} n^j = \tag{7}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j} S_j(N).$$

Questo fornisce una relazione di ricorrenza per calcolare S_k conoscendo S_0, …, S_{k-1}, e conferma quanto visto nel paragrafo precedente sul fatto che S_k si rappresenta mediante un polinomio p_k; non diamo i dettagli. Inoltre, distinguendo a primo membro fra k pari e dispari e ragionando per induzione su k si ricava che, come polinomio, $N+1$ divide p_k; ci torniamo su nel §7.

4. – Analisi matematica

L'analisi matematica ci offre vari modi diversi di affrontare il problema. Può sembrare strano introdurre una variabile continua in un problema che appare di pertinenza esclusiva della matematica discreta, ma ci sono diversi motivi per fare questo;([1]) tanto per cominciare, sappiamo dalle considerazioni fatte nel paragrafo precedente che quando $k \in \mathbb{N}$ la soluzione del problema che ci siamo posti è un polinomio, che per sua propria natura ha come dominio i numeri reali (o volendo quelli complessi). Inoltre, in generale le proprietà "aritmetiche" della

([1]) Per chi, come l'autore di questo articolo, si occupa principalmente della distribuzione dei numeri primi, la consapevolezza che non si può trattare la matematica come se fosse fatta a compartimenti stagni, tenendo rigorosamente separate *aritmetica*, *analisi matematica* e *algebra*, tanto per dire, arriva abbastanza presto nel corso dei propri studi. In effetti, scopo della buona matematica è gettare ponti tra aree apparentemente distanti e rivelare connessioni nascoste o inattese.

successione $(a_n)_{n\geq 0}$ si riflettono sulle proprietà "analitiche" della funzione

$$f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

posto che la serie converga; l'esempio più noto di questo fenomeno è probabilmente il caso in cui prendiamo la successione di Fibonacci, che descriviamo brevemente nell'Appendice D. In situazioni più difficili, sappiamo che si può "estrarre" il coefficiente a_n di questa serie di potenze usando il Teorema dei residui.

Ora ci limitiamo a trattare i polinomi, evitando per il momento problemi di convergenza, ma più avanti considereremo anche le serie, nell'Appendice C. Per $k\in\mathbb{N}$ consideriamo i polinomi

$$\phi_k(N;x)=\sum_{n=0}^{N}\binom{n+k}{k}x^n.$$

Osserviamo che $\phi_k'(N;x)=(k+1)\phi_{k+1}(N-1;x)$, usando una semplice proprietà dei coefficienti binomiali, e cioè

$$(n+1)\binom{n+k+1}{k}=(k+1)\binom{n+k+1}{n}.$$

L'identità elementare

$$(8)\quad \phi_0(N;x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^N=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

valida per $N\in\mathbb{N}$ ed $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ci consente di calcolare $p_0(N)$: infatti

$$p_0(N)=\lim_{x\to 1}\phi_0(N;x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{N+1}}{1-x}=N+1,$$

come si vede immediatamente applicando per esempio il Teorema di de l'Hôpital.

Questo naturalmente è del tutto banale, ma se deriviamo rispetto ad x l'identità qui sopra otteniamo

$$\phi_0'(N;x)=\phi_1(N-1;x)=1+2x+3x^2+\cdots+Nx^{N-1}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1-x^{N+1}}{1-x}=\frac{1-(N+1)x^N+Nx^{N+1}}{(1-x)^2}.$$

Ragionando esattamente come prima abbiamo

$$p_1(N)=\lim_{x\to 1}\phi_1(N-1;x)=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-(N+1)x^N+Nx^{N+1}}{(1-x)^2}=\frac{1}{2}N(N+1).$$

Potremmo proseguire allo stesso modo trovando relazioni simili a quelle ottenute sopra, ma i calcoli diventano rapidamente molto noiosi. Ci limitiamo ad osservare che

$$\phi_0''(N;x)=\phi_1'(N-1;x)=2\phi_2(N-2;x)$$

$$=2+6x+12x^2+\cdots+(N-1)(N-2)x^{N-3}+N(N-1)x^{N-2}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1-x^{N+1}}{1-x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1-(N+1)x^N+Nx^{N+1}}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{2-N(N+1)x^{N-1}+2(N^2-1)x^N-N(N-1)x^{N+1}}{(1-x)^3}.$$

Questa volta

$$\lim_{x\to 1}\phi_0''(N;x)=\frac{1}{3}N(N-1)(N+1)=\sum_{n=0}^{N-2}(n+1)(n+2)$$

$$=2p_0(N-2)+3p_1(N-2)+p_2(N-2),$$

da cui deduciamo rapidamente il valore di $p_2(N)$, esattamente come nella formula (6). Questo procedimento è abbastanza complicato e per certi versi inutile ma suggerisce l'introduzione delle serie che vedremo qui sotto nell'Appendice C.

5. – Applicazione della formula dei trapezi

Consideriamo la formula dei trapezi nella versione semplificata (15) con $M=0$ ed $f(x)=x^k$, dove $k\geq 1$; per il momento non supponiamo che k sia intero.

Abbiamo dunque

$$S_k(N)=\sum_{j=0}^{N}j^k=\int_0^N t^k\,\mathrm{d}t+k\int_0^N\phi(t)t^{k-1}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}N^k$$

$$=\frac{N^{k+1}}{k+1}+\frac{1}{2}N^k+k\int_0^N\phi(t)t^{k-1}\,\mathrm{d}t,$$

dove $\phi(x)=\{x\}-\dfrac{1}{2}$. La funzione ϕ ha periodo 1 e media nulla sul periodo, ed è quindi naturale aspettarsi che l'integrale all'estrema destra abbia ordine $O_k(N^{k-1})$, cosa che dimostreremo qui sotto senza particolare fatica. Questa formula "rivela" l'origine del termine spurio $N^k/2$, l'unico con la stessa parità di k nella formula per p_k quando k è intero, ma al

tempo stesso "nasconde" la proprietà di divisibilità di p_k per $N+1$ che abbiamo ricavato dalle considerazioni combinatorie.

Ora ci concentriamo sull'ultimo addendo a destra. Sfruttando il fatto che ϕ ha media nulla su $[0,1]$, abbiamo che questo addendo vale 0 quando $k=1$, una conferma che $p_1(N)$ ha la forma nota. Se $k \geq 2$ possiamo integrare per parti una volta. Poniamo $\Phi(x) = \dfrac{1}{2}\{x\}(\{x\}-1)$; si verifica immediatamente che Φ è continua ovunque e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Inoltre, su quest'ultimo insieme abbiamo $\Phi'(x) = \phi(x)$. Dunque l'ultimo addendo qui sopra vale

$$k\int_0^N \phi(t)t^{k-1}\,\mathrm{d}t = k\sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1}\phi(t)t^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= k\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\Big[\Phi(t)t^{k-1}\Big]_n^{n+1} - (k-1)\int_n^{n+1}\Phi(t)t^{k-2}\,\mathrm{d}t\Big) \tag{9}$$

$$= -k(k-1)\int_0^N \Phi(t)t^{k-2}\,\mathrm{d}t$$

poiché $\Phi(n)=0$ se n è intero. La tesi, cioè il fatto che l'integrale in questione è $O_k(N^{k-1})$, segue perché Φ è una funzione limitata. Più precisamente, $|\Phi(x)| \leq \dfrac{1}{8}$ per ogni x reale e quindi

$$\Big|S_k(N) - \Big(\frac{1}{k+1}N^{k+1} + \frac{1}{2}N^k\Big)\Big| =$$

$$= k(k-1)\Big|\int_0^N \Phi(t)t^{k-2}\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{k}{8}(k-1)\int_0^N t^{k-2}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{8}N^{k-1}.$$

Per $k=2$ possiamo portare a termine il calcolo esatto, partendo dalla relazione (9) e sfruttando il fatto che Φ ha periodo 1 e media

$$\int_0^1 \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^2-t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = -\frac{1}{12},$$

trovando di nuovo l'espressione nota per S_2 che abbiamo dato all'inizio di questo articolo.

Per $k>2$ possiamo integrare per parti di nuovo, definendo per comodità $\widetilde{\Phi}(x) = \Phi(x) + \dfrac{1}{12}$, in modo che $\widetilde{\Phi}$ sia periodica di periodo 1 e abbia media nulla. Si può poi iterare e se $k \in \mathbb{N}$ questo processo termina dopo un numero finito di passi; non diamo i dettagli, ma in linea di principio ne possiamo ricavare una nuova dimostrazione del Teorema 1. Segnaliamo solo che siamo inesorabilmente sulla strada della scoperta dei polinomi di Bernoulli e di formule che estendono la "formula dei trapezi" che abbiamo usato in questa analisi, dalle importanti applicazioni nelle questioni di Analisi Numerica; si vedano le Appendici A e B.

Due brevi osservazioni conclusive: dal punto di vista dell'analisi matematica non è molto rilevante il fatto che il parametro k sia intero, purché soddisfi certi vincoli; si veda il §9. Inoltre, potremmo inserire lo sviluppo in serie di Fourier della funzione ϕ ed integrare termine a termine; per il momento lasciamo perdere, ma vedremo più avanti, sempre nel §9, un'interessante applicazione della stessa formula al caso in cui $k<-1$, ed effettivamente sarà utile fare questa operazione.

6. – Una relazione di ricorrenza: il Teorema di Levy

Vediamo ora una dimostrazione molto semplice di una proprietà fondamentale dei polinomi p_k: come si vedrà, sono sufficienti considerazioni relativamente elementari, mentre il Teorema di Faulhaber qui sotto richiede conoscenze più profonde. La dimostrazione sfrutta il fatto che p_k è una funzione definita su $\mathbb{R}$, che è continua e derivabile e possiamo usare queste proprietà per determinarlo; naturalmente per il Teorema 1 sappiamo che $p_k(N) = S_k(N)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Teorema 2 (Levy) *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$ esiste una costante C_k tale che*

$$p_k(N) = k\int_0^N p_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t + C_k N.$$

La chiave per la dimostrazione è il "principio di identità dei polinomi": se un polinomio di grado che non supera n si annulla in $n+1$ punti distinti, allora è il polinomio nullo. Alternativamente, se due polinomi di grado che non supera n coincidono in $n+1$ punti distinti allora sono lo stesso polinomio, cioè hanno tutti i coefficienti ordinatamente uguali.

Possiamo procedere con la dimostrazione del Teorema di Levy. Per definizione, il polinomio p_k ha la proprietà

$$p_k(x) - p_k(x-1) = x^k \tag{10}$$

per tutti gli $x \in \mathbb{N}^*$, perché vale il Teorema 1. Per il principio di identità dei polinomi, poiché questa relazione tra polinomi vale per infiniti valori della variabile x, deve valere *per ogni* x reale e possiamo dimenticare il vincolo che x sia un intero positivo. Rimpiazzando k con $k-1$ e poi moltiplicando per k abbiamo dunque

$$k\big(p_{k-1}(x) - p_{k-1}(x-1)\big) = kx^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^k = \\ = p_k'(x) - p_k'(x-1).$$

A destra stiamo usando l'identità (10): stiamo evidentemente sfruttando il fatto che stiamo parlando di p_k e non di S_k che ha un dominio che non permette di derivare. Ora rimpiazziamo x con $x-1$ ottenendo

$$k\big(p_{k-1}(x-1) - p_{k-1}(x-2)\big) = p_k'(x-1) - p_k'(x-2).$$

Sommando le ultime due relazioni abbiamo

$$k\big(p_{k-1}(x) - p_{k-1}(x-2)\big) = p_k'(x) - p_k'(x-2).$$

Iterando, per $n \in \mathbb{N}$ concludiamo che

$$k\big(p_{k-1}(x) - p_{k-1}(x-n)\big) = p_k'(x) - p_k'(x-n),$$

purché $n \leq x$. Questa relazione è stata dimostrata con l'ipotesi che n sia un intero non negativo: prendiamo $x = n = N \in \mathbb{N}$, ottenendo

$$k\big(p_{k-1}(N) - p_{k-1}(0)\big) = p_k'(N) - p_k'(0),$$

cioè

$$p_k'(N) = kp_{k-1}(N) + C_k, \tag{11}$$

dove $C_k = p_k'(0) - kp_{k-1}(0)$. Vorremmo naturalmente integrare questa relazione, ottenendo in sostanza la tesi a meno del valore della costante di integrazione, ma la formula (11) è legata in modo apparentemente indissolubile al fatto che la variabile N sia un numero intero. È in questo punto che abbiamo bisogno di fare la transizione tra una funzione definita sui naturali come S_k ed un polinomio come p_k. La via d'uscita è ancora il principio di identità dei polinomi: i polinomi a primo e secondo membro della relazione (11) hanno grado k (come abbiamo dimostrato sopra) e coincidono su *tutti* i numeri interi positivi. Dunque sono lo stesso polinomio e cioè $p_k'(t) = kp_{k-1}(t) + C_k$ per ogni t reale e in pratica possiamo integrare tra 0 ed N questa ultima relazione, che generalizza la (11) a tutti i numeri reali, ottenendo

$$p_k(N) = k\int_0^N p_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t + C_kN + p_k(0). \tag{12}$$

Ma $p_k(0) = 0$ poiché $k \geq 1$ e il Teorema di Levy è dimostrato.

7. – Proprietà algebriche dei polinomi p_k

Ci occupiamo della scomposizione in fattori dei polinomi p_k, quando k è un numero naturale. L'ambito naturale dove fare queste considerazioni è $\mathbb{Q}[x]$: diremo che il polinomio a coefficienti razionali p_k è divisibile per un altro polinomio a coefficienti razionali q_k se esiste un terzo polinomio a coefficienti razionali s_k tale che $p_k(x) = q_k(x)s_k(x)$. Questo fatto non implica in generale che per N intero il valore di $q_k(N)$, posto che sia intero, debba dividere il valore di $p_k(N)$, che certamente lo è nel nostro caso, come si verifica immediatamente già per $k = 1$.

Dal Teorema di Levy deduciamo senza fatica che p_k è divisibile per x per ogni $k \geq 1$, cosa peraltro ovvia perché come appena ricordato $p_k(0) = 0$ non appena $k \neq 0$. La dimostrazione "combinatoria" del Teorema 1 dà anche l'informazione ulteriore che il polinomio $x+1$ divide $p_k(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$: come già osservato, è una conseguenza della relazione (7).

La dimostrazione del Teorema di Levy, così come quella del Teorema di Faulhaber qui sotto, è fortemente dipendente dai concetti dell'analisi matematica e non si presta immediatamente a dare i risultati voluti. Abbiamo anche bisogno di alcune proprietà più algebriche dei polinomi che stiamo considerando. Il nostro obiettivo è dimostrare il seguente risultato, per il quale ci dobbiamo procurare alcuni strumenti.

Teorema 3 *Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, il polinomio p_k è divisibile per $x(x+1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ con k pari, p_k è divisibile per $x(x+1)(2x+1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ dispari con $k \geq 3$, p_k è divisibile per $x^2(x+1)^2$.*

Lemma 4 *Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $p_k(-x) = (-1)^{k+1} p_k(x-1)$.*

Questo Lemma si dimostra mettendo $1-x$ al posto di x nella relazione (10), ottenendo $p_k(-x) - p_k(1-x) = -(1-x)^k$; prendiamo N intero positivo, sostituiamo in quest'ultima relazione i valori $x = N$, $x = N-1$, …, $x = 1$ e sommiamo tutte le relazioni così ottenute; la tesi segue immediatamente, usando ancora il principio di identità dei polinomi.

Corollario 5 *Se $k > 1$ è dispari la costante C_k nel Teorema di Levy vale* 0.

Dimostriamo questo corollario del Teorema di Levy ottenendo due espressioni diverse per la stessa quantità e mettendole a confronto. Per definizione, per $k \in \mathbb{N}$ il polinomio p_k soddisfa la relazione

$$p_k(t) - p_k(t-1) = t^k \tag{13}$$

per tutti i $t \in \mathbb{N}$ e quindi per *tutti* i numeri reali t per il principio di identità. Per $k \in \mathbb{N}^*$ poniamo $k-1$ al posto di k in questa relazione, moltiplichiamo per k e integriamo

$$x^k = k \int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = k \int_0^x \big(p_{k-1}(t) - p_{k-1}(t-1)\big)\,\mathrm{d}t$$

(per il Teorema di Levy e per il Lemma 4, purché $k-1 > 0$)

$$= \big(p_k(x) - C_k x\big) - k(-1)^k \int_0^x p_{k-1}(-t)\,\mathrm{d}t$$

(cambiando variabile)

$$= \big(p_k(x) - C_k x\big) + k(-1)^k \int_0^{-x} p_{k-1}(u)\,\mathrm{d}u$$

(per il Teorema di Levy con $-x$ al posto di x)

$$= \big(p_k(x) - C_k x\big) + (-1)^k \big(p_k(-x) + C_k x\big)$$

(ancora per il Lemma 4)

$$= \big(p_k(x) - C_k x\big) + (-1)^k \big((-1)^{k+1} p_k(x-1) + C_k x\big)$$
$$= \big(p_k(x) - p_k(x-1)\big) + C_k x\big(-1 + (-1)^k\big)$$

(ancora per la (13) con $t = x$)

$$= x^k + C_k\big(-1 + (-1)^k\big)x.$$

Quando k è pari la quantità $\big(-1 + (-1)^k\big)$ vale 0 e quindi troviamo un'identità priva di qualunque interesse, ma quando k è dispari la stessa quantità vale -2 e l'identità tra polinomi $x^k = x^k - 2C_k x$, valida per $k > 1$, implica che $C_k = 0$.

La stessa cosa segue, più semplicemente, dal Teorema di Faulhaber qui sotto, perché $\beta_r = 0$ se $r \geq 3$ è dispari. Abbiamo incluso questa dimostrazione perché richiede solo concetti relativamente elementari, mentre la dimostrazione del Teorema di Faulhaber è ben più profonda.

Lemma 6 *Se $q \in \mathbb{R}[x]$ è un polinomio a coefficienti reali, e $q(a) = q'(a) = 0$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, allora $q(x)$ è divisibile per $(x-a)^2$.*

Sia $q(x) = (x-a)^2 g(x) + h(x)$, dove g è un polinomio opportuno ed h è un polinomio di grado che non supera 1. Allora $h'(x) = q'(x) - g'(x)(x-a)^2 - 2(x-a)g(x)$ e dunque per le ipotesi $h(a) = 0$ ed $h'(a) = 0$, cioè h è il polinomio nullo.

Possiamo cominciare la dimostrazione del Teorema 3; la prima affermazione segue dal fatto che $p_k(0) = 0$ non appena $k \geq 1$ e dal fatto già osservato nella dimostrazione del Teorema 1. La seconda affermazione segue ponendo $x = \dfrac{1}{2}$ nel Lemma 4: se k è pari, questo implica $p_k\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ e quindi $2x+1$ è un fattore di $p_k(x)$. La terza affermazione segue combinando la formula (11) della dimostrazione del Teorema di Levy, il Corollario 5 ed il Lemma 6, poiché per $k \geq 3$, con k dispari, abbiamo $p_k(0) = p_k(-1) = p_k'(0) = p_k'(-1) = 0$. Le ultime due uguaglianze seguono per induzione dalla (11) e dal fatto che p_{k-1} è divisibile per $x(x+1)$ per la prima affermazione.

8. – Il Teorema di Faulhaber

Per enunciare il Teorema di Johann Faulhaber, che permette in linea di principio di determinare i coefficienti dei polinomi p_k, abbiamo bisogno di ricordare alcune definizioni che diamo in appendice. In particolare, ci servono i numeri di Bernoulli β_r: questi sono stati "scoperti" più volte e non esiste una loro definizione univoca. Per questo motivo il Teo-

rema di Faulhaber può essere enunciato in vari modi leggermente diversi tra loro: per evitare ambiguità, qui ci atteniamo alla definizione dei coefficienti β_r data nella formula (16) dell'Appendice B.

Teorema 7 (Faulhaber) *Con le definizioni ricordate sopra si ha*

$$p_k(N) = N^k + \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{k+1-r} \binom{k}{r} \beta_r N^{k+1-r}.$$

Dato che $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, $\beta_3 = 0$ e $\beta_4 = -\frac{1}{30}$, questo ci dà di nuovo i risultati già trovati prima, e ci permette di ricavare che $P_4(N) = N^5/5 + N^4/2 + N^3/3 - N/30$. Notiamo inoltre che $\beta_{2r+1} = 0$ per ogni $r \in \mathbb{N}^*$ e quindi, a parte il monomio $\frac{1}{2}N^k$, tutti i monomi di p_k con coefficienti non nulli hanno grado della stessa parità di $k+1$. Un aspetto interessante di questa formula è che i coefficienti β_r *non* dipendono da k e quindi si possono "riciclare" da una valore di k ad un altro.

Per dimostrare questo importante risultato introduciamo la funzione

$$F_k(N; x) = k! x \big(1 + \mathrm{e}^x + \cdots + \mathrm{e}^{(N-1)x}\big).$$

Un breve calcolo con la serie di Taylor della funzione esponenziale rivela che $F_k(N; x)$ ha lo sviluppo di Taylor

$$F_k(N; x) = \sum_{m \geq 0} \frac{k!}{m!} p_m(N-1) x^{m+1}.$$

Dunque $p_k(N-1)$ è il coefficiente di Taylor di x^{k+1} in questa espressione, cioè quando $m = k$.

Nel linguaggio dell'Appendice D, F_k è una sorta di "funzione generatrice" fatta con i valori del polinomio p_k.

Ora scriviamo F_k in un'altra forma e calcoliamo il suo sviluppo di Taylor in un altro modo: per la somma parziale della serie geometrica (8) abbiamo

$$F_k(N; x) = k! x \frac{\mathrm{e}^{Nx} - 1}{\mathrm{e}^x - 1} = k! \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \, (\mathrm{e}^{Nx} - 1).$$

Espandiamo la frazione usando la definizione dei coefficienti β_k nella formula (16) e il fattore a destra con la solita serie della funzione esponenziale:

$$F_k(N; x) = k! \Big(\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \frac{\beta_3}{3!} x^3 + \cdots\Big) \sum_{m \geq 1} \frac{N^m}{m!} x^m.$$

Con una modica dose di pazienza si scopre che il coefficiente del monomio di grado m del prodotto di Cauchy delle serie qui sopra vale

$$\frac{\beta_0 N^m}{0! m!} + \frac{\beta_1 N^{m-1}}{1!(m-1)!} + \ldots + \frac{\beta_{m-1} N}{(m-1)! 1!} =$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^{m-1} \beta_r \binom{m}{r} N^{m-r}.$$

Per quanto visto sopra ci interessa il coefficiente del monomio con $m = k+1$; tenendo conto del fattore $k!$ che abbiamo trascurato, troviamo che questo coefficiente vale

$$\frac{k!}{(k+1)!} \sum_{r=0}^{k} \beta_r \binom{k+1}{r} N^{k+1-r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \beta_r \binom{k}{r} \frac{1}{k+1-r} N^{k+1-r},$$

e il Teorema di Faulhaber è dimostrato.

La dimostrazione si basa sul "principio di identità delle serie di potenze" ed è quindi più sofisticata della dimostrazione del Teorema di Levy. Una parte dell'interesse di questo risultato è che in un certo senso si sposta il problema su un altro piano, cioè si passa dalla determinazione di una funzione al più semplice calcolo di un'opportuna successione di numeri razionali (i numeri di Bernoulli) che possono essere definiti mediante una relazione di ricorrenza, come facciamo nell'Appendice B. Questo porta ad una riduzione della complessità computazionale del calcolo, perché, come osservato sopra, in principio, i coefficienti di p_k si possono calcolare con l'interpolazione.

Abbiamo trovato due diverse rappresentazioni del polinomio p_k, con i teoremi di Levy e Faulhaber rispettivamente. È interessante mettere a confronto le due espressioni. Supponendo per induzione che p_{k-1} abbia la forma data dal Teorema di Faulhaber e sostituendo nella formula (12) scopriamo che queste coincidono utilizzando per $r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ le

consuete proprietà dei coefficienti binomiali, mentre per $r = k$ scopriamo che $C_k = \beta_k$. Dato che $\beta_k = 0$ se $k \geq 3$ è dispari, questo ci dice di nuovo che p_k è divisibile per N^2 se $k \geq 3$ è dispari.

9. – Estensione ad altri valori di *k*

Finora abbiamo considerato k positivo o nullo, concentrandoci sui valori interi; per k positivo non intero si possono parzialmente riutilizzare le considerazioni fatte nei §§2.1 e 5. Che dire quando k è negativo? Cominciamo osservando che è necessario ridefinire S_k facendo partire la somma da $j = 1$. Per $k \in (-1, 0)$ valgono ancora, in sostanza, le considerazioni del §5, facendo attenzione al fatto che ora la funzione è monotòna decrescente.

Per $k = -1$ la formula dei trapezi (15) dà la familiare asintotica per le somme parziali della serie armonica, con un valore "esplicito" per la costante γ di Eulero-Mascheroni. Infatti, prendendo $f(x) = x^{-1}$ abbiamo

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} = \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^N \frac{\phi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

$$= \log(N) - \int_1^N \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^N \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

$$= \log(N) + 1 - \int_1^N \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'ultimo integrale è convergente se esteso alla semiretta $[1, +\infty)$ poiché $0 \leq \{t\} < 1$.
Posto

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

usando semplici stime si ottiene

$$\int_1^N \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \gamma - \int_N^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \gamma + \boldsymbol{O}(N^{-1}),$$

dalla quale deduciamo una formula precisa per le somme parziali della serie armonica. Se la formula dei trapezi avesse solo questa conseguenza non l'avrei inclusa in questo articolo, ma invece possiamo usarla per indagare cosa succede quando consideriamo $k < -1$: i nostri calcoli valgono quando k è reale, non necessariamente intero. In questo caso la serie, estesa a *tutti* gli interi positivi, converge a $\zeta(-k)$, dove ζ indica la funzione zeta di Riemann. Usiamo la notazione standard

$$\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$$

nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) > 1\}$, dove la serie è puntualmente convergente per il criterio integrale per le serie. Storicamente questa serie è stata studiata in dettaglio da Eulero nel XVIII secolo, per valori reali della variabile, ma era già comparsa nel secolo precedente, per esempio nel problema di Basilea: il matematico bolognese Pietro Mengoli ha chiesto infatti quanto vale $\zeta(2)$, chiedendo di esprimerne il valore in modo finito per mezzo di quantità note; Eulero dimostrò che $\zeta(2) = \pi^2/6$, cosa che al giorno d'oggi si ottiene come corollario di varie proprietà delle serie di Fourier.

Per $x > 1$ (non necessariamente intero), $M = 1$ ed $N \in \mathbb{N}^*$ la formula (15) con $f(t) = t^{-x}$ dà

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - x\int_1^N \frac{\phi(t)}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N^x}\right)$$

$$= \frac{1}{x-1}\left(1 - N^{1-x}\right) - x\int_1^N \frac{\phi(t)}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N^x}\right).$$

Dato che $x > 1$ per ipotesi, possiamo prendere il limite per N che tende all'infinito, ottenendo

$$\zeta(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{x-1} - x\int_1^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}.$$

Questa cosa è vera in realtà se al posto di x scriviamo un qualunque numero complesso $z = x + \mathrm{i}y$, purché $\Re(z) = x > 1$. La formula qui sopra dà il *prolungamento analitico* della funzione zeta di Riemann all'insieme più ampio $\{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) > 0\} \setminus \{1\}$ con

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} - z\int_1^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^{z+1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Infatti l'integrale a destra converge in questo semipiano poiché ϕ è una funzione limitata; in effetti, sfruttando il fatto che ϕ ha media nulla su ogni intervallo di lunghezza 1, questa stessa formula dimostra che questo prolungamento è valido nell'insieme ancora più ampio $\{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) = x > -1\} \setminus \{1\}$.

Per inciso, l'ultima formula mostra che ζ ha un polo semplice con residuo 1 in $z = 1$ e, con qualche calcolo, che vicino ad 1 vale lo sviluppo $\zeta(z) = (z-1)^{-1} + \gamma + \boldsymbol{O}(|z-1|)$.

L'interesse della formula (14) non si esaurisce qui: nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$ vale l'identità

$$\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} = -z \int_0^1 \frac{\phi(t)}{t^{z+1}}\, \mathrm{d}t,$$

cosicché in definitiva nella striscia $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re(z) < 0\}$ si ha

$$\zeta(z) = -z \int_0^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^{z+1}}\, \mathrm{d}t.$$

Perché ci siamo spinti così in là, rispetto al punto da cui siamo partiti? Perché facendo un piccolo passo ulteriore "scopriamo" una cosa non scontata: per la precisione, è opportuno dire che la giustificazione dei passaggi che seguono non è immediata, ma si può dare. Ricordiamo lo sviluppo in serie di Fourier

$$\phi(x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}.$$

Se introduciamo questo sviluppo nella formula precedente e scambiamo formalmente serie e integrale troviamo

$$\zeta(z) = \frac{z}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{t^{z+1}}\, \mathrm{d}t.$$

Prendiamo $y = 2\pi n t$ e cambiamo la variabile nell'integrale:

$$\zeta(z) = \frac{z}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(2\pi n)^z}{n} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y^{z+1}}\, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{z}{\pi} (2\pi)^z \big(-\Gamma(-z)\big) \sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right) \zeta(1-z),$$

per una delle tante proprietà della funzione Γ di Eulero. La cosa più importante, al di là della presenza della funzione Γ, è il fatto che questa formula mostra una possibile connessione fra i valori che ζ assume nei punti z ed $1 - z$. Naturalmente c'è un passaggio non pienamente giustificato, cioè lo scambio tra integrale e serie, ma questa argomentazione è molto interessante perché fornisce evidenza per l'equazione funzionale soddisfatta dalla funzione zeta, e cioè il fatto che sussista una relazione tra i valori di $\zeta(z)$ e $\zeta(1-z)$. Esistono una decina di dimostrazioni dell'equazione funzionale, ma la cosa più sorprendente dal mio punto di vista è immaginare come possa essere stata scoperta da Riemann.

Eulero conosceva la connessione fra $\zeta(2k)$, dove k è un intero positivo, e i numeri di Bernoulli e sapeva che $\zeta(2k)\pi^{-2k} \in \mathbb{Q}$. Più precisamente, Eulero ha dimostrato che vale la rappresentazione $\zeta(2k) = 2^{2k-1}(-1)^{k+1}\beta_{2k}\pi^{2k}(2k)!^{-1}$ per $k \in \mathbb{N}^*$, dove i β_k sono i numeri di Bernoulli definiti nella formula (16) dell'Appendice B. Nel suo libro sulla funzione zeta, Edwards ipotizza che Riemann sia stato condotto alla scoperta dell'equazione funzionale dalla ricerca di una dimostrazione alternativa di questa relazione scoperta da Eulero. Probabilmente quest'ultimo conosceva una versione dell'equazione funzionale, senza una dimostrazione formale della sua correttezza.

10. – Conclusioni

Siamo partiti da un problema elementare che ha origine nella notte dei tempi, e abbiamo visto come vari tentativi di soluzione ci portino a "scoprire" aree della matematica quali la combinatoria, l'analisi numerica, a introdurre nuove funzioni definite mediante opportune serie di potenze, e perfino ad immaginare una proprietà molto importante della funzione zeta di Riemann.

A La formula di Euler-MacLaurin

Con $\{x\}$ indichiamo la *parte frazionaria* del numero reale x.

Teorema 8 *Sia $f : (x, y] \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1. Allora*

$$\sum_{x < n \leq y} f(n) = \int_x^y f(t)\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \int_x^y \{t\} f'(t)\, \mathrm{d}t - \{y\} f(y) + \{x\} f(x).$$

La dimostrazione si può dare osservando che se questa formula vale sugli intervalli $(x, y]$ ed $(y, z]$ allora vale sull'intervallo $(x, z]$. Se l'intervallo $(x, y]$ non contiene interi il primo membro vale 0; posto $n = [x] = [y]$, si ha che $\{t\} = t - n$ su tutto l'inter-

vallo (x, y) ed è sufficiente integrare per parti per verificare che anche il secondo membro vale 0. Se invece esiste un intero $n_0 \in (x, y]$ il primo membro vale $f(n_0)$ mentre per valutare il secondo membro bisogna spezzare il secondo integrale sui due sottointervalli $(x, n_0]$ ed $(n_0, y]$, tener conto del fatto che $\{t\}$ vale $t - n_0 + 1$ e $t - n_0$ rispettivamente e poi integrare per parti e semplificare.

Posto $\phi(t) = \{t\} - \dfrac{1}{2}$ la formula qui sopra diventa

$$\sum_{x<n\le y} f(n) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^y \phi(t) f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(f(y) - f(x)) - \{y\}f(y) + \{x\}f(x).$$

Questa è una versione della "formula dei trapezi" che nel nostro caso è utile perché mostra da dove proviene il termine "spurio" $\dfrac{1}{2}N^k$ presente nella formula per p_k. Come abbiamo notato per inciso nel §5, c'è la possibilità di integrare ϕ se $f \in C^2$, oppure di sostituire la serie di Fourier per ϕ come abbiamo fatto nel §9. Non entriamo nel dettaglio per brevità.

Una semplificazione verrà dal fatto che useremo questa formula esclusivamente per valori interi di x ed y; preso $x = M$ ed $y = N$, dove M, $N \in \mathbb{N}$ con $M \le N$, e aggiungendo $f(M)$ ad ambo i membri abbiamo dunque

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(t)\,\mathrm{d}t + \int_M^N \phi(t) f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(f(M) + f(N)). \tag{15}$$

Esistono versioni più raffinate di questa formula in cui compaiono come coefficienti proprio i numeri di Bernoulli che vedremo nel prossimo paragrafo. Queste sono indispensabili nell'analisi numerica della funzione zeta; vedi Edwards [1], Capitolo 6.

B Numeri e polinomi di Bernoulli

Ricordiamo che non esiste una convenzione univoca sulla definizione dei numeri di Bernoulli; per gli scopi di questo articolo ci atteniamo a questa: i numeri β_n sono quelli che compaiono esplicitamente nel Teorema di Faulhaber 7.

Definizione 9 (Numeri di Bernoulli) *I numeri di Bernoulli β_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor*

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}z + \frac{\beta_2}{2!}z^2 + \frac{\beta_3}{3!}z^3 + \cdots \tag{16}$$

valido per $|z| < 2\pi$.

In particolare, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -\dfrac{1}{2}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{6}$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = -\dfrac{1}{30}$, $\beta_5 = 0$ e $\beta_6 = \dfrac{1}{42}$. In generale $\beta_{2k+1} = 0$ per $k \in \mathbb{N}^*$: infatti, la funzione

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z\,\frac{\mathrm{e}^z + 1}{\mathrm{e}^z - 1}$$

è pari, e quindi $\beta_1 = -\dfrac{1}{2}$ mentre per $k \ge 1$ tutti i coefficienti β_{2k+1} sono nulli. Vediamo anche in questo caso comparire il coefficiente $\dfrac{1}{2}$ che abbiamo già incontrato tante volte sulla nostra strada.

In effetti, la funzione $z/(\mathrm{e}^z - 1)$ o sue piccole varianti compaiono in una delle dimostrazioni dell'equazione funzionale della funzione zeta di Riemann: la sua presenza in questo contesto, dunque, non è per niente casuale o accidentale.

I coefficienti β_k soddisfano varie relazioni di ricorrenza che permettono di calcolarli in successione: qui ci limitiamo ad affermare che

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k+1}{r} \beta_r = \begin{cases} 1 \text{ se } k = 0; \\ 0 \text{ se } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Questa è una conseguenza del Teorema di Faulhaber con $N = 1$ e di semplici proprietà dei coefficienti binomiali.

I polinomi di Bernoulli sono definiti come i coefficienti nello sviluppo di Taylor

$$\frac{z\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{k\ge 0} B_k(x)\frac{t^k}{k!},$$

che generalizza quello dei numeri di Bernoulli definiti sopra; infatti $\beta_k = B_k(0)$. Fra le tante proprietà

di questi polinomi, c'è il fatto che B_k è univocamente determinato come soluzione della relazione

$$\int_x^{x+1} B_k(t)\,\mathrm{d}t = x^k, \tag{17}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, e da questa segue che per $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$S_k(N) = \int_0^{N+1} B_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{B_{k+1}(N+1) - B_{k+1}(0)}{k+1}.$$

Come vediamo, numeri e polinomi di Bernoulli sono intrinsecamente legati al problema che stiamo studiando.

C Le funzioni ipergeometriche

Nel §4 abbiamo introdotto alcuni polinomi di forma speciale che ci hanno consentito di trovare un procedimento molto indiretto per determinare i polinomi p_k. Le corrispondenti serie si chiamano funzioni ipergeometriche e hanno proprietà simili a quelle che abbiamo visto sopra. Per cominciare, poniamo

$$F_k(z) = \sum_{n\ge0} \binom{n+k}{k} z^n = \sum_{n\ge0} \binom{n+k}{n} z^n.$$

Si verifica facilmente che $F_k'(z) = (k+1)F_{k+1}(z)$; in effetti, $F_k(z) = (1-z)^{-k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Questa è una versione più "comoda" di una relazione che abbiamo usato per calcolare in modo apparentemente non combinatorio il valore di p_0, p_1 e p_2. Se diamo la definizione qui a destra vediamo che non è più necessario che k sia intero, pur di dare una definizione più generale del coefficiente binomiale.

Definizione 10 (Simbolo di Pochhammer) *Per $n \in \mathbb{N}$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $(1)_n = n!$ e che $\binom{n+k}{n} = (k+1)_n/n!$.

Definizione 11 (Funzione ipergeometrica) *Se α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ con $\gamma \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ allora per $z \in \mathbb{C}$ definiamo*

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum_{n\ge0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

La serie converge per $|z| < 1$.

In particolare, $F_k(z) = {}_2F_1(k+1,1;1;z)$ e la relazione $F_k'(z) = (k+1)F_{k+1}(z)$ segue dai teoremi generali sulle funzioni ipergeometriche. Questo insieme di funzioni contiene come casi speciali molte funzioni standard dell'analisi matematica (serie geometrica, esponenziale, logaritmo, ...) e trova innumerevoli applicazioni in tutti i campi della matematica applicata.

D La funzione generatrice dei numeri di Fibonacci

Poniamo come di consueto $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ed $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. A questa successione associamo la sua *funzione generatrice*, cioè la serie di potenze

$$F(z) = \sum_{n\ge0} f_n z^n.$$

Poiché $f_n \le 2^n$, come si vede immediatamente per induzione, il raggio di convergenza della serie vale almeno $\frac{1}{2}$. Dunque, in un disco di $\mathbb{C}$ di centro l'origine e raggio positivo abbiamo

$$\begin{aligned}(z+z^2)F(z) &= \sum_{n\ge0} f_n z^{n+1} + \sum_{n\ge0} f_n z^{n+2} \\ &= \sum_{n\ge1} f_{n-1} z^n + \sum_{n\ge2} f_{n-2} z^n \\ &= f_0 z + \sum_{n\ge2} (f_{n-2} + f_{n-1}) z^n \\ &= \sum_{n\ge2} f_n z^n = F(z) - f_0 - f_1 z = F(z) - z.\end{aligned}$$

Tutte le operazioni sono legittime in un opportuno disco chiuso di raggio positivo.

Semplificando

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}.$$

Posto $\psi_1 = (-1-\sqrt{5})/2$ e $\psi_2 = (-1+\sqrt{5})/2$ le due radici reali del polinomio z^2+z-1, esistono numeri reali A e B tali che

$$\begin{aligned}F(z) &= \frac{A}{\psi_1 - z} + \frac{B}{\psi_2 - z} = \\ &= \frac{A}{\psi_1}\cdot\frac{1}{1-(z/\psi_1)} + \frac{B}{\psi_2}\cdot\frac{1}{1-(z/\psi_2)}.\end{aligned}$$

In effetti, $A = -\psi_1/(\psi_2 - \psi_1)$ e $B = \psi_2/(\psi_2 - \psi_1)$. È ora possibile espandere le due frazioni a destra come serie geometriche nel dominio $|z| < \min(|\psi_1|, |\psi_2|) = \psi_2$, ottenendo

$$F(z) = \frac{1}{\psi_2 - \psi_1}\left(\frac{1}{1-(z/\psi_2)} - \frac{1}{1-(z/\psi_1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\psi_2 - \psi_1}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{\psi_2^n} - \frac{1}{\psi_1^n}\right)z^n$$

e con qualche breve calcolo si trovano le formule di Binet, valendosi ancora una volta del principio di identità delle serie di potenze, dato che $\psi_2 - \psi_1 = \sqrt{5}$, $\psi_1 = -\phi$ e $\psi_2 = \phi^{-1}$, dove ϕ è la sezione aurea.

E Riferimenti utili

Articoli e libri. La dimostrazione del Teorema di Levy 2 e le considerazioni sui fattori dei polinomi p_k nel §7 sono adattate dagli articoli di Levy [3]. La presente trattazione risulta semplificata perché diamo per prima cosa una dimostrazione combinatoria del Teorema 1. La dimostrazione del Teorema di Faulhaber 7 e le definizioni dell'Appendice B sono sviluppati a partire da Hardy & Wright [2], §7.9. La teoria della funzione zeta, e le sue applicazioni ai numeri primi che qui abbiamo totalmente trascurato per evidenti motivi, si trova nel libro di Edwards [1]; si veda in particolare il Capitolo 6 per un approfondimento di quello che abbiamo visto qui a proposito della formula di Euler-MacLaurin e della sua versione più generale che contiene numeri e polinomi di Bernoulli. La sua personale congettura su come Riemann sia stato condotto alla scoperta dell'equazione funzionale si trova a pagina 12. Utili considerazioni su alcune questioni formali sulla dimostrazione di identità si trovano in Petkovšek, Wilf, Zeilberger [4] e in Wilf [5].

Siti web. Possono integrare le considerazioni di questo articolo queste pagine di Wikipedia.

- Teorema di Nicomaco: https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Nicomaco
- Gnomone: https://it.wikipedia.org/wiki/Gnomone
- Numeri di Bernoulli: https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number
- Polinomi di Bernoulli: https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_polynomials

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974, Dover Reprint 2001.

[2] G. H. Hardy & E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, sesta ed., Oxford University Press, Oxford, 2008.

[3] L. S. Levy, *Summation of the series* $1^n + 2^n + \cdots + x^n$ *using elementary calculus*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 840-847. *Corrigendum*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 987.

[4] M. Petkovšek, H. S. Wilf, & D. Zeilberger, $A = B$, A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996. Disponibile dall'indirizzo https://www.math.upenn.edu/ wilf/.

[5] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994, Disponibile dall'indirizzo https://www.math.upenn.edu/ wilf/.

Alessandro Zaccagnini

Alessandro Zaccagnini è professore di Analisi Matematica a Parma, ma la sua attività di ricerca è concentrata nella Teoria Analitica dei Numeri, che studia principalmente le proprietà dei numeri primi. Oltre all'attività di ricerca, ha al suo attivo qualche decina di articoli divulgativi, compresi molti su rete, e ha un suo canale YouTube per fare divulgazione in modo meno tradizionale.