
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALBERTO COGLIATI

Ricci Curbastro e la nascita del calcolo differenziale assoluto

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 10
(2025), n.2, p. 121–145.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_2_121_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_2_121_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Ricci Curbastro e la nascita del calcolo differenziale assoluto

ALBERTO COGLIATI

Università degli Studi di Padova

E-mail: alberto.cogliati@unipd.it

Sommario: *In occasione del centenario dalla scomparsa del suo principale ideatore, questo articolo si propone di ripercorrere alcune delle tappe più significative che portarono Gregorio Ricci Curbastro allo sviluppo del nuovo calcolo. Particolare attenzione sarà dedicata agli anni della sua formazione scientifica presso l'Università di Pisa e la Scuola Normale Superiore, con un'enfasi particolare sul ruolo svolto da Enrico Betti nell'orientare gli interessi di ricerca del giovane Ricci verso la fisica matematica e, più in generale, verso un approfondito studio dell'eredità scientifica di Riemann. Vengono inoltre analizzati alcuni dei lavori prodotti tra il 1884 e il 1892, nei quali comparvero per la prima volta i concetti fondamentali della teoria: la proprietà di covarianza dei coefficienti di particolari forme differenziali quadratiche, la definizione esplicita dei sistemi di funzioni covarianti e controvarianti (tensori) e la nozione di derivata covariante.*

Abstract: *On the centenary of the death of its main discoverer, this article aims to retrace some of the most significant steps that led Ricci to develop the new calculus. Particular attention will be devoted to the years of his scientific training at the University of Pisa and the Scuola Normale Superiore, and to the decisive role played by Enrico Betti in guiding the young Gregorio's research interests towards mathematical physics and, more generally, towards a careful study of Riemann's scientific legacy. Some works from the period 1884-1892 will also be analysed in some detail, in which the main notions of the theory appeared: the covariance property of the coefficients of certain quadratic differential forms, the explicit definition of systems of covariant and contravariant functions (tensors), and the covariant derivative*

1. – Introduzione

Diversamente da molti contributi fondamentali nella storia della matematica, il calcolo differenziale assoluto sviluppato da Gregorio Ricci Curbastro non consistette tanto nella scoperta di nuove nozioni e di nuovi teoremi, ma piuttosto in un modo nuovo di organizzare e comprendere risultati già noti che poterono finalmente essere interpretati alla luce di radici concettuali comuni. In altri termini, si potrebbe dire, da un punto di vista storico la portata del calcolo di Ricci fu di natura prevalentemente meta-teorica, nel senso che esso si esplicitò come una riflessione matura, e per nulla banale, sopra un

corpo di dottrine già esistenti, quali la teoria delle varietà riemanniane, la teoria dell'equivalenza delle forme quadratiche differenziali e la teoria degli invarianti e dei parametri differenziali.

Tale carattere metateorico dal nuovo strumento algoritmico impedì per qualche tempo il riconoscimento delle sue reali potenzialità. Allo stesso tempo, però, esso rese disponibile un vasto spettro di applicazioni che investirono tanto la fisica-matematica quanto la geometria pura. Due esempi, tra i molti, nei quali il calcolo di Ricci poté dispiegare la sua feconda efficacia possiamo ritrovare nella teoria della relatività generale e nei numerosi tentativi di generalizzazione della geometria metrica riemanniana che fecero seguito all'interpretazione geometrica della derivata covariante proposta nel 1917 da Tullio Levi-Civita, che di Ricci fu allievo, nel suo

Accettato: 29 giugno 2025.

celebre contributo [Levi-Civita 1917], *Sulla nozione di parallelismo in una varietà qualunque*.

In effetti, il calcolo differenziale assoluto fu riconosciuto come strumento essenziale di ricerca solo all'indomani della pubblicazione, nel biennio 1915-1916, da parte di Einstein delle fondamentali memorie sulla teoria della gravitazione, nelle quali venne esplicitamente menzionato il ruolo cruciale che i lavori di Ricci avevano rivestito nello sviluppo della nuova teoria. Prima di allora, come evidenzia l'esito delle competizioni per il Premio Reale di Matematica alle quali Ricci partecipò nel 1887 e nel 1901, prevalsero posizioni di scetticismo che vedevano (per la verità, non senza qualche giustificazione) negli sviluppi formali del calcolo un corpo di tecniche e di nozioni di gran lunga sproporzionato rispetto alle applicazioni esplorate sino a quel momento.

A 100 anni dalla morte del suo principale scopritore, ci proponiamo di ripercorrere alcune delle tappe più significative che condussero Ricci a sviluppare il nuovo calcolo. Porremo una particolare attenzione agli anni della sua formazione scientifica presso l'Università di Pisa e la Scuola Normale Superiore e al ruolo preponderante rivestito da Enrico Betti nell'orientare gli interessi di ricerca del giovane Gregorio nel campo della fisica matematica e più in generale verso un attento studio dell'eredità scientifica di Riemann. Saranno poi analizzati in qualche dettaglio alcuni lavori del periodo 1884-1892 nei quali fecero la loro comparsa le nozioni principali della teoria: proprietà di covarianza dei coefficienti di certe forme differenziali quadratiche, definizione esplicita dei sistemi di funzioni covarianti e controvarianti (tensori), derivata covariante. Infine, svolgeremo qualche riflessione sul processo di ricezione del calcolo tensoriale in rapporto ai già citati Premi Reali. Specie per quanto riguarda i §§2-4, la trattazione si avvarrà di alcune fonti inedite che si sono rese disponibili grazie alla cortesia del Centro Archivistico della Scuola Normale Superiore di Pisa e dell'Archivio Ricci Curbastro presso il Liceo G. Ricci Curbastro di Lugo (RA).

2. – Gli anni giovanili e i primi studi

La formazione matematica del giovane Gregorio fu contraddistinta, inizialmente, da un certa frammen-

tarietà. Gli studi presso la pontificia università *La Sapienza* che si erano avviati nel 1869 vennero interrotti nel 1870 a causa dei rivolgenti politici del settembre di quello stesso anno che fecero seguito alla breccia di Porta Pia.⁽¹⁾ Ricci, insieme al fratello Domenico, tentò un trasferimento all'Università di Bologna che tuttavia fu ostacolato dalla mancanza di un diploma di scuola superiore, di cui Ricci non disponeva poiché la sua prima formazione era stata affidata a precettori privati. Ricci entrò nell'Ateneo bolognese soltanto nel 1872. Qui seguì, tra gli altri, corsi di calcolo differenziale e integrale, di fisica e di geometria descrittiva sotto la guida di Eugenio Beltrami, che avrebbe a brevissimo lasciato Bologna per assumere la cattedra di meccanica razionale a Roma.

Dopo un solo anno trascorso a Bologna, probabilmente in cerca di un ambiente scientifico più stimolante, Ricci optò per il trasferimento alla Normale di Pisa dove fu effettivamente ammesso nel novembre 1873, come studente esterno. Tra i suoi compagni di studio ritroviamo quello stesso anno anche Luigi Bianchi (1856-1826) il cui lavoro nel campo della geometria differenziale, pur con metodi e intenti assai diversi da quelli perseguiti da Ricci con il suo calcolo tensoriale, avrebbe contribuito a plasmare i lineamenti della disciplina fra Ottocento e Novecento.

Degli anni trascorsi da Ricci all'Università di Pisa e alla Scuola Normale abbiamo preziosa testimonianza nei quaderni di appunti che egli stesso trascrisse e che sono conservati nell'archivio delle sue carte a Lugo. Tra questi spiccano le *Lezioni di Analisi Superiore* (1873-74) di Ulisse Dini, le *Lezioni di Meccanica Razionale* (1873-74) di Ernesto Padova, le *Lezioni di Complementi di Calcolo Differenziale e Integrale* (1873-74) di Cesare Finzi, le *Lezioni di Meccanica Celeste* (1874-75) e le *Lezioni di Fisica Matematica* (1874-75) di Enrico Betti.

L'influenza più marcata sulla formazione di Ricci fu esercitata proprio da Betti e Dini. Quest'ultimo, in particolare, fu supervisore della tesi di laurea (il cui testo non ci è purtroppo pervenuto) che Ricci difese nel giugno del 1875, intorno ad alcuni aspetti della teoria delle equazioni lineari ordinarie nel campo

⁽¹⁾ In generale sulla biografia di Ricci, si vedano [Levi-Civita 1925] e [Goodstein 2018].

complesso e di tipo fuchsiano. Ad un tentativo di generalizzazione della teoria di Fuchs ad equazioni lineari che ammettono integrali non regolari, Ricci dedicò invece la tesi di abilitazione all'insegnamento. Il lavoro, che pure non fu mai pubblicato e che è rimasto in forma manoscritta⁽²⁾ (il titolo è *Alcune Ricerche sulle Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Razionali*), riveste tuttavia una qualche importanza poiché contribuisce a chiarire il quadro degli interessi di ricerca di Ricci, indicando il ruolo rilevante che l'opera di Riemann esercitò su di lui sin da giovanissimo. Ispirato dai lavori del matematico Wilhelm Thomé con i quali quest'ultimo, che era stato allievo di Weierstrass a Berlino, aveva avviato un primo tentativo di estensione della teoria di Fuchs al caso di integrali irregolari,⁽³⁾ Ricci si proponeva di superare le difficoltà che tale generalizzazione implicava, mediante un opportuno adattamento dei procedimenti cui Riemann aveva rapidamente accennato in un celebre lavoro dedicato alle equazioni ipergeometriche.⁽⁴⁾

Risultato vincitore di una borsa di studio, Ricci trascorse a Pisa anche l'anno accademico 1876-77. Ciò gli permise di dedicarsi in particolare allo studio dell'elettrodinamica verso la quale ormai da qualche anno Betti aveva rivolto i suoi interessi. Proprio su stimolo di Betti nel 1877 Ricci si dedicò alla stesura di [Ricci 1877b], [Ricci 1877c] due articoli di rassegna per la rivista *Il Nuovo Cimento* sulle più recenti acquisizioni nel campo delle interazioni elettromagnetiche.

Nel primo di questi contributi Ricci si propose di esporre le principali conseguenze di una formula che il fisico Clausius aveva recentemente introdotto per descrivere matematicamente l'interazione fra particelle cariche e che in termini vettoriali (e quindi anacronistici) può essere resa nel modo seguente:

$$(1) \quad \mathbf{F} = -ee' \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2} \right) - \frac{ee'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}'}{r} \right),$$

dove $\mathbf{F}$ indica la forza esercitata dalla particella e' sulla particella e , r la loro distanza relativa e $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ le velocità, rispettivamente, di e ed e' .

⁽²⁾ Il manoscritto è conservato presso l'Archivio di Lugo.

⁽³⁾ Si vedano in particolare [Thomé 1872a], [Thomé 1872b], [Thomé 1873].

⁽⁴⁾ Si tratta di [Riemann 1857].

L'intento che Ricci si prefiggeva era di procedere ad un confronto con formule analoghe introdotte da Weber e da Riemann e di valutarne le conseguenze a partire da principi di conservazione generali quali la conservazione del momento lineare, del momento angolare e un principio di natura più astratta (di cui non veniva fornita alcuna interpretazione fisica) che Ricci indicava con l'espressione di "principio di Betti". Si trattava di un principio, per certi versi assimilabile a quello di conservazione del momento angolare la cui introduzione si doveva allo stesso Betti il quale ne aveva discusso il contenuto nel corso di alcune lezioni tenute a Pisa nel 1877. Ai medesimi intenti espositivi aspirava anche il secondo lavoro sopra menzionato, pubblicato in quello stesso anno sempre su *Il Nuovo Cimento*, nel quale Ricci presentava i punti essenziali della nuova elettrodinamica di Maxwell.

3. – Il periodo trascorso a Monaco

Nel 1878 Ricci risultò vincitore di un bando ministeriale per borse di perfezionamento all'estero con le quali il Ministero dell'Istruzione del neocostituito stato unitario sosteneva il soggiorno di giovani studiosi presso atenei esteri. Su consiglio dello stesso Betti, la scelta di Gregorio si orientò verso il Politecnico di Monaco dove dal 1875 insegnava Felix Klein. Da qualche anno Klein era in contatto epistolare con Betti, al quale lo accumulavano gli interessi di ricerca per la teoria delle equazioni algebriche e per l'opera di Riemann nel campo dell'analisi com-

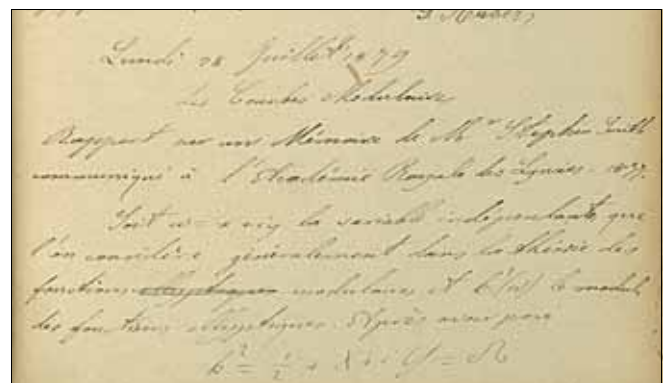


FIGURA 1 – Un particolare del manoscritto che reca il resoconto del seminario tenuto da Ricci a Monaco nel luglio 1879, Band 1, 2, Seite 75.

plexa. Betti, dovette vedere nel collega tedesco l'interlocutore privilegiato per guidare i primi passi di Ricci nella ricerca matematica, tantopiù dal momento che in anni recenti (1876-1877) nel contesto delle proprie ricerche sull'icosaedro e sulle equazioni di quinto grado Klein si era occupato anche della teoria delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine di tipo fuchsiano, un campo al quale lo stesso Ricci aveva dedicato la propria tesi di laurea e quella di abilitazione all'insegnamento.

Ricci giunse a Monaco nel novembre del 1878, quando il semestre invernale era già avviato. Su indicazioni di Klein, cominciò a seguire due corsi: il primo, tenuto dallo stesso Klein, verteva su argomenti avanzati della teoria delle equazioni algebriche; il secondo, tenuto da Alexander von Brill, riguardava invece la teoria delle funzioni ellittiche.

Una vivida testimonianza delle prime settimane trascorse a Monaco possiamo trarre da una lettera del dicembre 1878 che Ricci inviò al proprio maestro Betti, per ragguagliarlo sull'andamento del soggiorno di studio.

Chiarissimo Sig.r Professore

Ella mi avrà scusato se prima d'ora non Le ho mandato notizie mie e dei miei studi, come Ella gentilmente mi scrisse di desiderare, perché io stesso ho voluto prima non solamente fissare il piano di detti studi, ma addentrarmi un po' per saperlene dire qualche cosa di preciso. Quando presentai al Prof.r Klein la di Lei lettera, questi mi disse che dei corsi, che si facevano qui, egli vedeva due soltanto mi potessero essere utili, il suo sulla teoria delle equazioni, e quello del Prof.r Brill sulle funzioni ellittiche. In pari tempo egli mi indicò alcune teorie come necessarie a conoscersi per l'intelligenza del suo corso, e mi consigliò di studiare nel Serret la teoria dei numeri e quella delle sostituzioni e di più la seconda parte del Corso di Geometria del Clebsch pubblicato da Lindemann. Aggiunga a questo il dovermi mettere al corrente delle lezioni già fatte dal Klein prima del mio arrivo e comprenderà che il lavoro non mi è proprio mancato, né mi può mancare per ora. Anzi per non disperdere l'attenzione sopra troppi soggetti ho dovuto rinunciare a seguire il corso del Brill, ciò, che non mi è molto rincresciuto, perché la teoria delle funzioni ellittiche l'ho fatta anche costì sotto il Prof.r Dini. A questo modo ho potuto rivolgere tutta la mia attenzione al corso interessantissimo del Klein e alle diverse teorie, che a questo si riannodano, fra le quali alcune, specialmente le geometriche mi sono affatto nove. Vedo pure che mi sarebbe molto utile studiare

la memoria di Riemann sulle funzioni abeliane, e lo farò se per l'avvenire troverò il tempo, che ora mi manca.

Intanto ho visto nel Serret i due primi capitoli della teoria dei numeri e i primi quattro di quella delle sostituzioni, argomenti, al cui studio sento che prenderei molto gusto, perché mi pare che ci sia ancora molto da fare, così che mi auguro di poterci tornare sopra con più calma e di proposito.

Quanto al corso del Klein, egli si è finora trattenuto sulla parte generale e preparatoria, come sulla riducibilità ed il suo significato nei diversi casi, sulla trasformazione di Tschirnhaus e sulle equazioni, che ammettono trasformazioni razionali in sé stesse, sui gruppi di sostituzioni nei casi di $n = 5, 7, 11, 6, 8, 12$; etc.. Soltanto nelle ultime lezioni prima del Natale egli è venuto allo studio delle risolvibili, che proseguiremo dopo le vacanze.

Del resto io mi trovo benissimo qui [sic!] e son molto contento di aver seguito il di Lei consiglio, del quale La ringrazio, come pure dell'avermi procurata la conoscenza di una persona così istruita e gentile come il Prof.r Klein, da cui ho nei miei studi il più valido aiuto. ⁽⁵⁾

Gli interessi di studio di Ricci non mutarono nei mesi successivi. Come egli stesso spiegò nella seconda delle relazioni ⁽⁶⁾ inviate al Ministero nell'agosto del 1879, decise di continuare a seguire i corsi di Klein e in particolare il suo "Corso Speciale" dedicato in quell'anno alla teoria delle funzioni modulari e alla teoria delle trasformazioni delle funzioni ellittiche. Del secondo semestre trascorso a Monaco restano inoltre i sunti di due seminari che egli tenne nel marzo e nel luglio del 1879 sul tema della teoria di Galois di certe particolari equazioni algebriche di grado 2^n e su una memoria del matematico irlandese Stephen Smith intorno ad una "nesso importantissimo" tra la teoria delle forme quadratiche e delle curve modulari. ⁽⁷⁾

Nel necrologio ⁽⁸⁾ che scrisse per Ricci nel 1925, Levi-Civita osservava che i mesi trascorsi a Monaco sotto la guida scientifica di Klein non paiono avere suscitato un effetto evidente sulla sua produzione

⁽⁵⁾ Centro Archivistico SNS, Lettera di Ricci a Betti, 29 Dicembre 1878.

⁽⁶⁾ [Goodstein 2018, Cap. 3].

⁽⁷⁾ Si tratta di [Smith 1877], una breve memoria presentata da Luigi Cremona all'Accademia dei Lincei.

⁽⁸⁾ Si veda [Levi-Civita 1925].

matematica. In effetti, come si è visto, le materie di studio che Ricci poté approfondire (teoria delle equazioni algebriche, teoria dei numeri e teoria delle funzioni ellittiche) ebbero poco a che fare con i temi verso i quali di lì a qualche anno i suoi interessi si sarebbero rivolti.

Si può supporre piuttosto, come lo stesso Levi-Civita fu disposto a riconoscere, che Klein abbia esercitato sul giovane Ricci un'influenza di natura più generale (e sotterranea), consolidando in lui una attitudine verso il perseguimento di un'ideale unità della scienza e favorendo, se mai ce ne fosse stato bisogno, l'interesse verso l'intera opera di Riemann.

4. – Il trasferimento a Padova e il primo dei lavori sul calcolo

Al ritorno da Monaco, Ricci ottenne il suo primo incarico accademico, con la nomina ad assistente di Ulisse Dini presso l'Università di Pisa per l'anno 1879-1880. Pressoché contemporaneamente, Ricci tentò di muovere i primi passi della sua carriera universitaria partecipando a svariati concorsi a cattedra a Roma, Bologna, Napoli, Palermo e a Padova. Proprio a Padova egli risultò vincitore di una posizione per Professore Straordinario in Fisica Matematica. La presa di servizio presso l'Ateneo patavino avvenne nel dicembre 1880, l'inizio del corso a lui affidato era invece previsto per il gennaio dell'anno successivo.

Della prima lezione per il corso di Fisica Matematica che Ricci tenne a Padova l'8 gennaio 1881 abbiamo preziosa testimonianza in un documento manoscritto (che già Levi-Civita ebbe occasione di visionare e di citare al momento della stesura del necrologio per la morte dello stesso Ricci) che riporta il testo dell'intero discorso inaugurale.⁽⁹⁾

Soltanto qualche settimana prima, il 3 dicembre 1880, Ricci aveva interpellato Betti in cerca di qualche consiglio rispetto al contenuto della lezione inaugurale alla quale, con sua sorpresa, erano invitati a partecipare non solo studenti della facoltà ma anche molti colleghi professori.

⁽⁹⁾ Il manoscritto è preservato presso l'Archivio Ricci-Curbastro di Lugo.

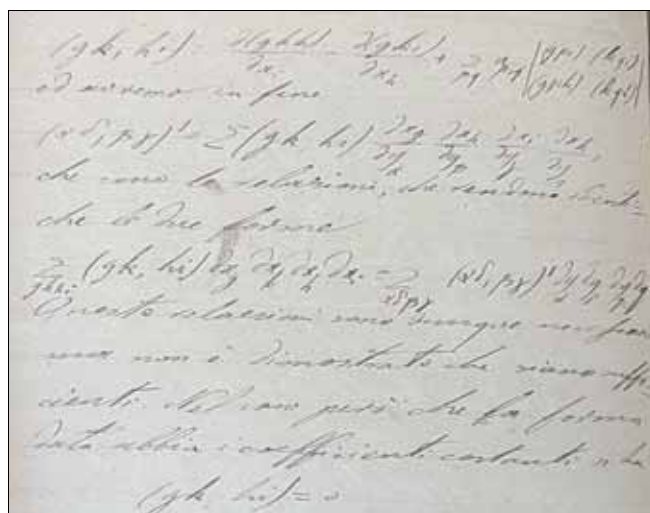


FIGURA 2 – Un particolare del quaderno contenente appunti manoscritti, per mano di Ricci, delle lezioni di Enrico Betti sulla Teoria del Calore, Pisa, 1876-77. Archivio Ricci Curbastro di Lugo.

Chiar.mo Sig.r. Professore,

Ho appreso che a Padova vige l'uso a dir vero increscioso che i nuovi Professori inaugurino il loro corso con una prelezione, a cui intervengono molti colleghi e discepoli della facoltà. A quanto mi hanno detto si tratta di cosa di poca importanza, ma che pur bisogna fare e che specialmente in un corso matematico presenta le sue difficoltà. Mi parrebbe opportuno nel caso mio di trattare qualche argomento di storia o della scienza o dell'insegnamento delle Matematiche superiori in Italia, ma ora non saprei dove mettermi le mani per trovare la materia prima di un lavoro di questo genere.⁽¹⁰⁾

Ricci continuava la sua lettera appellandosi alla cortesia di Betti, richiedendo consigli e una lista di riferimenti bibliografici utili per predisporre la lezione inaugurale e più in generale per orientare i contenuti del corso cui stava per dare inizio. In una bozza di risposta non datata, che è preservata sul retro della lettera di Ricci appena citata, Betti elargiva suggerimenti interessanti che, come si vedrà, Ricci avrebbe diligentemente fatto propri.

Caro Ricci,

Mi pare che un soggetto di una prelezione potrebbe essere la influenza della Fisica Matematica ai progressi dell'Analisi matematica. La rappresentabilità

⁽¹⁰⁾ Centro Archivistico SNS, Lettera di Ricci a Betti, 3 Dicembre 1880.

analitica di funzioni di quantità reali arbitrariamente date originata dalla quistione delle corde vibranti e dalla teoria del calore. La teoria delle funzioni di variabili complesse della quale Riemann ha trovato [...] principii delle funzioni potenziali [...] di Green [...] originata dalla teoria della elettrostatica e del magnetismo [...] ⁽¹¹⁾

Tra i consigli bibliografici inviati a Ricci, con ogni probabilità Betti dovette includere anche quello alle *Lezioni elementari di Fisica Matematica* di Fabrizio Ottaviano Mossotti e alla prolusione, lì contenuta, con la quale quest'ultimo aveva inaugurato il corso di Fisica Matematica e Meccanica Celeste al momento di assumere la cattedra di Fisica presso l'Università di Pisa nel 1841.

Sancendo un'ideale continuità con l'iniziatore della scuola pisana, proprio alle parole che Mossotti pronunciò in quella occasione Ricci affidò il compito di introdurre una descrizione generale del fine della ricerca fisica e quindi una definizione del campo di indagine della Fisica Matematica, in contrapposizione con quello della Fisica Sperimentale.

“L'investigazione delle leggi e la determinazione teorica delle forze sono dunque i due grandi oggetti che si propone la fisica e ciascuno di essi si consegue con i suoi mezzi propri. Per primo oggetto è necessario studiare la natura quale è, cioè esaminarla per mezzo di osservazioni, interrogarla per mezzo di esperienze, ed analizzando i risultamenti ottenuti, riconoscere per induzioni successive quali sono le leggi, con cui il Creatore ha regolato il mondo. Niente si può scoprire in questa parte per mezzo del solo raziocinio ... per il secondo oggetto si parte pure dalle leggi del movimento, che l'esperienza ci ha somministrate, ma si procede poi con raziocini puramente matematici a dedurre dalle leggi verificate i caratteri delle forze, e di lì si discende a tutte le conclusioni riguardo ai fenomeni. Di qui avviene la divisione della fisica in isperimentale e matematica. La fisica sperimentale ha per oggetto di far conoscere le osservazioni e le esperienze, dalle quali si sono indotte le leggi, che regolano i fenomeni; la fisica matematica di esporre i metodi per i quali siamo saliti dall'analisi delle leggi a caratterizzare le forze ed a somministrare i mezzi per

discendere in seguito dalla cognizione delle forze al calcolo di tutti i fenomeni.” ⁽¹²⁾

Individuato così il fine che Fisica Matematica si propone, seguendo i suggerimenti di Betti, Ricci passava a discutere del ruolo che questa disciplina aveva rivestito nel plasmare gli sviluppi dell'Analisi, affrontando in particolare il problema della corda vibrante e la questione della rappresentabilità in serie trigonometriche di funzioni arbitrarie.

l'influenza più decisiva è stata esercitata dalla Fisica Matematica sui progressi dell'Analisi così che ad essa può dirsi si debba tutto quel complesso di teorie che nelle nostre Università si insegnano sotto il nome di Analisi Superiore e che hanno prodotto un rivolgimento radicale nello studio delle funzioni tanto di variabili reali, quanto di variabili complesse. ⁽¹³⁾

L'enfasi con la quale Ricci affrontò il tema appare significativa, in primo luogo perché testimonia dell'idea di un rapporto strettissimo fra ricerca fisica e ricerca matematica; in secondo luogo, poiché rivela l'influenza esercitata sulla sua formazione dagli insegnamenti di Ulisse Dini, del quale come sappiamo egli fu assistente e al quale nel corso della sua prolusione egli volle porgere uno speciale tributo di stima e di riconoscenza, ricordando la recente pubblicazione del trattato *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*.

Questi problemi sono stati oggetto continuo di studi profondi per parte specialmente dei Matematici tedeschi del nostro secolo, ma mi è grato il poter rendere omaggio al nome del mio amato ed illustre maestro il Prof. Dini col ricordare qui il suo libro, di cui la prima parte soltanto è uscita l'anno scorso alla luce, e sul quale il problema delle rappresentazioni analitiche delle funzioni delle variabili reali è trattata con tanta generalità di metodi, ricchezza e novità di risultati da assicurargli un posto distintissimo nella storia della Scienza. ⁽¹⁴⁾

Per qualche anno dopo il suo trasferimento a Padova, la Fisica Matematica costituì non soltanto la sua

⁽¹¹⁾ Centro Archivistico SNS, Minuta (non datata) di una lettera di Betti a Ricci. Ringrazio Umberto Bottazzini per l'aiuto nel decifrare alcune parti del manoscritto la cui lettura è particolarmente difficile.

⁽¹²⁾ Archivio Ricci Curbastro di Lugo, Raccoglitore III. La lunga citazione è tratta, con qualche modifica, da [Mossotti 1845, p. 6].

⁽¹³⁾ Archivio Ricci-Curbastro di Lugo, Raccoglitore III.

⁽¹⁴⁾ Archivio Ricci-Curbastro di Lugo, Raccoglitore III.

principale materia di insegnamento ma anche l'ambito privilegiato di ricerca.⁽¹⁵⁾ Ne è testimonianza una pubblicazione del 1882, *Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti*, dedicata all'elettrodinamica e alla teoria del potenziale nella quale, come ebbe a scrivere a Betti in una lettera del marzo 1882, Ricci si proponeva di affrontare il seguente problema:

Dato un sistema di correnti elettriche costanti entro a un conduttore isolato S , determinare in S una tale distribuzione una tale distribuzione magnetica, la cui azione sui punti esterni ad S equivalga quella delle correnti date.⁽¹⁶⁾

A partire dal 1884, con il lavoro *Sui principi di una teoria delle forme quadratiche differenziali*, il tenore delle pubblicazioni di Ricci mutò profondamente rispetto ai precedenti contributi di carattere fisico-matematico, spostandosi prevalentemente verso uno studio sistematico delle forme quadratiche differenziali e dei loro invarianti, sancendo così la nascita di ciò che solo qualche anno più tardi egli avrebbe indicato con la denominazione di "calcolo differenziale assoluto".

Ma quali furono, è lecito chiedersi, le ragioni che condussero Ricci a orientare i suoi interessi verso un tale genere di questioni? Posticipando al paragrafo successivo una esame più dettagliato del contesto di risultati e di problemi con i quali Ricci dovette confrontarsi, un aspetto della formazione fisico-matematica presso l'Università di Pisa non dovrebbe essere trascurato. Nonostante avesse già ottenuta la laurea e la abilitazione all'insegnamento, Ricci trascorse a Pisa l'intero anno accademico 1876-77, potendo usufruire di una borsa di studio. Proprio in quell'anno Betti dedicò un corso di Fisica Matematica alla teoria del calore. Possiamo farci un'idea assai precisa del contenuto di quelle lezioni oltre che dagli appunti dello stesso Betti che sono conservati presso il fondo archivistico della Scuola Normale anche dai quaderni di mano dello stesso Ricci

⁽¹⁵⁾ Ricci continuò a tenere corsi di Fisica Matematica anche dopo la sua promozione a professore ordinario nel 1890 sulla cattedra di Algebra Complementare. Si veda a questo riguardo [Goodstein 2018, Capp. 6, 8].

⁽¹⁶⁾ Centro Archivistico SNS, Lettera di Ricci a Betti, 6 marzo 1882.

preservati a Lugo. Particolarmente interessante è la prima parte del corso che reca il titolo "Conducibilità" nella quale Betti affrontò un caso particolare del problema dell'equivalenza per due forme quadratiche differenziali.⁽¹⁷⁾ Con un evidente, seppur implicito, riferimento alla discussione che dello stesso problema aveva fornito Riemann nella sua *Commentatio Mathematica*, Betti aveva ricondotto l'intera trattazione a due problemi distinti: da un lato, la determinazione di un opportuno sistema di coordinate e dall'altro l'integrazione delle equazioni della teoria che proprio il cambiamento di coordinate adottato ha reso accessibile. Nelle parole di Betti:

Lo studio del problema generale [della conduzione del calore], che forma l'oggetto di questa teoria, consiste evidentemente di due parti, in una delle quali si tratta di trasformare conveniente[mente] le equazioni del problema,⁽¹⁸⁾ o gli integrali, da cui queste dipendono, e nell'altra di trovare la funzione F che soddisfa alle equazioni stesse. Occupiamoci della prima, e dimostriamo prima di tutto che se si ha una forma

$\sum_{i,i'} a_{i,i'} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_{i'}}$ e si pone $x_i = \xi(y_1, y_2, y_3)$ la determinazione dei coefficienti della forma trasformata

$\sum_{i,i'} b_{i,i'} \frac{\partial T}{\partial y_i} \frac{\partial T}{\partial y_{i'}}$, dipendono dalla determinazione dei coefficienti della forma differenziale $\sum_{i,i'} B_{i,i'} dy_i dy_{i'}$, in

cui si trasforma per mezzo delle stesse formule $\sum_{i,i'} A_{i,i'} dx_i dx_{i'}$. Noi dimostreremo questo teorema in generale per qualunque numero di variabili.

⁽¹⁷⁾ Una formulazione precisa del problema è data nel § 5 di questo lavoro.

⁽¹⁸⁾ Betti si riferisce qui ad una formulazione variazionale del problema della conducibilità per un corpo solido S di superficie σ , data dalla seguente condizione:

$$\delta \int_S \left(\sum_{i,i'} a_{i,i'} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_{i'}} \right) dS + \\ + \delta \int_{\sigma} h(T - T_0)^2 d\sigma + 2 \int_S pC \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dS = 0;$$

T , la temperatura è funzione del tempo t e delle coordinate x^1, x^2, x^3 ; $a_{i,i'}$ sono i coefficienti della conducibilità termica, h e T_0 sono rispettivamente la conducibilità esterna e la temperatura esterna; infine, p è la densità e C il calore specifico. Qui, e nel seguito, contariamente all'uso di Ricci e dei suoi contemporanei, impiegherò indici "in alto" per denotare gli indici delle coordinate. Ciò per rendere le formule più ordinate e trasparenti.

La trasformazione dell'equazione del calore rispetto a un cambiamento di coordinate qualunque è così ricondotta al più semplice problema della trasformazione di due forme quadratiche differenziali i cui coefficienti, denotati con B_{rs} e A_{rs} , sono legati ai coefficienti della conducibilità termica a_{rs} , b_{rs} dalle relazioni:

$$B_{rs} := \frac{1}{\det(\mathbf{B})} \frac{\partial \det(\mathbf{B})}{\partial b_{rs}}, \quad A_{rs} := \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \frac{\partial \det(\mathbf{A})}{\partial a_{rs}}$$

e cioè sono tali per cui se si pone $[a_{rs}] =: \mathbf{A}$, $[A_{rs}] =: \tilde{\mathbf{A}}$ e $[b_{rs}] =: \mathbf{B}$, $[B_{rs}] =: \tilde{\mathbf{B}}$, si ha: $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}$. Alla luce di queste semplici considerazioni Betti si diffondeva quindi in un'ampia discussione volta a ricavare condizioni necessarie per l'esistenza di un cambiamento di coordinate che trasforma una data forma differenziale $\sum_{i,i'} A_{i,i'} dx^i dx^{i'}$ nella $\sum_{i,i'} B_{i,i'} dy^i dy^{i'}$. Tra queste condizioni spiccano alcune relazioni differenziali notevoli, indicate come condizioni necessarie per la trasformabilità, quali:

$$(\alpha\delta, \beta\gamma)' = \sum_{g,h,k,i=1}^n (gk, hi) \frac{\partial x^g}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^h}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^i}{\partial y^\gamma} \frac{\partial x^k}{\partial y^\delta},$$

$$\alpha, \delta, \beta, \gamma = 1, \dots, n$$

che in effetti possiamo interpretare (retrospettivamente) come le leggi di trasformazione delle componenti completamente covarianti del tensore di curvatura di Riemann, ⁽¹⁹⁾ e la relazione

$$(gk, hi) = 0, \quad g, k, h, i = 1, \dots, n,$$

indicata come condizione necessaria affinché la forma $\Phi = \sum_{i,i'} A_{i,i'} dx^i dx^{i'}$ sia trasformabile in una forma differenziale quadratica a coefficienti costanti. Proprio la dimostrazione del fatto che queste ultime relazioni sono in realtà anche sufficienti sarebbe stato dimostrato da Ricci nel 1884 nel primo dei numerosi contributi dedicati allo sviluppo del calcolo differenziale assoluto.

È verosimile che proprio questo corso di lezioni tenute da Betti abbia suscitato in Ricci un vivo interesse verso lo studio delle forme quadratiche differenziali e delle loro proprietà di trasformazione rispetto a trasformazioni di coordinate arbitrarie, che Riemann aveva avviato già nel 1854 e che altri

matematici, quali Erwin Christoffel, Rudolf Lipschitz e Richard Beez, dopo la pubblicazione della *Habilitationsvortrag* (1868) e della *Commentatio Mathematica* (1876), avevano proseguito e approfondito.

5. – Intermezzo: sulla storia del concetto di tensore

Lo strumento delle coordinate offre l'innegabile vantaggio di consentire l'impiego delle tecniche dell'analisi per la risoluzione di problemi di ordine geometrico. Allo stesso tempo, tuttavia, esso introduce un carattere di arbitrarietà che è estraneo alla natura delle questioni che si intendono trattare. Per tale ragione, è necessario assicurarsi che le nozioni geometriche (o fisiche) di cui si fa uso, pur espresse in una forma dipendente dalle coordinate, abbiano un significato intrinseco e indipendente dalla scelta adottata. Il concetto di tensore risponde a questa necessità.

Da un punto di vista storico, il calcolo tensoriale fu il risultato di un processo di scoperta piuttosto complesso che coinvolse svariati ambiti di ricerca quali la geometria differenziale, la teoria della elasticità, la cristallografia e naturalmente la teoria della relatività. Verso la fine dell'Ottocento, soprattutto per opera di Gregorio Ricci Curbastro e del suo allievo Tullio Levi-Civita, a partire da un disorganico e multiforme insieme di tecniche e di strumenti già esistenti, il calcolo poté organizzarsi in una disciplina matematica autonoma.

Le denominazioni di tensore e di calcolo tensoriale non furono proprie dell'originaria trattazione di Ricci, il quale parlò piuttosto di sistemi di funzioni covarianti, controvarianti o misti e di calcolo differenziale assoluto. Il termine, introdotto per la prima

expressionibus eruitur

$$(5) \quad 2 \sum \frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_{i'}} \frac{\partial x}{\partial x_j} = \frac{\partial b_{i,j}}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial b_{i',j}}{\partial x_i} - \frac{\partial b_{i,j'}}{\partial x_i}$$

et si haec quantitas per $p_{i,j,i',j'}$ designatur

$$(6) \quad 2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_{i'}} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x_{i'}} p_{i,j,i',j'}$$

FIGURA 3 – Un dettaglio della *Commentatio Mathematica* di Riemann, dove compare la definizione dei simboli $p_{i,j,i',j'}$, coincidenti, a meno di un inessenziale fattore numerico con i simboli dati da (6).

⁽¹⁹⁾ Un'espressione esplicita per tali funzioni a quattro indici è data nel § 5.

volta (1847) da W. Hamilton per designare la norma di un quaternione, fu impiegato dal fisico Woldemar Voigt, nello studio delle proprietà di simmetria dei cristalli, per designare una quantità fisica determinata da sei componenti e caratterizzata da opportune leggi di trasformazione. Le grandezze tensoriali di Voigt venivano di fatto a coincidere con tensori simmetrici covarianti di ordine due, in tre variabili. ⁽²⁰⁾

In seguito la nozione di tensore di Voigt fu generalizzata al caso non simmetrico e a tensori di ordine superiore e quindi proficuamente applicata allo studio della elettrodinamica e della relatività speciale. A partire dal 1913, Einstein riconobbe per la fisica e gli sviluppi della propria relatività generale la necessità di disporre di un calcolo differenziale assoluto, come quello che Ricci aveva sviluppato da circa un ventennio, per fornire una formulazione invariante delle leggi di natura. Assecondando l'uso dei fisici del tempo, Einstein impiegò la denominazione di Voigt per indicare i sistemi di funzioni covarianti o controvarianti introdotti da Ricci e da allora le espressioni “tensore” e “calcolo tensoriale” si affermarono definitivamente.

Secondo la definizione adottata da Ricci un sistema di funzioni misto r -volte covariante e s -volte controvariante consiste nella assegnazione di n^{r+s} funzioni delle coordinate $(x^1, \dots, x^n)$, $T_{i_1, \dots, i_r}^{k_1, \dots, k_s}$ tali che, rispetto a un qualunque cambiamento di coordinate $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1(x), \dots, y^n(x))$, sussistono le seguenti leggi di trasformazione:

$$(2) \quad \bar{T}_{j_1, \dots, j_r}^{l_1, \dots, l_s} = \sum_{h_1, \dots, h_s} \sum_{t_1, \dots, t_r} \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{h_1}} \cdots \frac{\partial y^{l_s}}{\partial x^{h_s}} \frac{\partial x^{t_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{t_r}}{\partial y^{j_r}} T_{t_1, \dots, t_r}^{h_1, \dots, h_s},$$

dove si intende che le somme siano estese a $h_1, \dots, h_s, j_1, \dots, j_r = 1, \dots, n$.

Esempi elementari di tensori sono offerti dalle componenti dei campi vettoriali e delle cosiddette forme pfaffiane che sono rispettivamente tensori controvarianti e covarianti di ordine 1. Un esempio notevole di tensore covariante di ordine 2 è la metrica di una varietà riemanniana, immediata generalizzazione della prima forma fondamentale

⁽²⁰⁾ Per una disamina dettagliata dell'origine della denominazione e della stessa nozione di tensore, si veda [Reich 1994].

di una superficie, che in un dato sistema di coordinate $(x^1, \dots, x^n)$ assume la forma seguente:

$$(3) \quad \Psi = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad (21)$$

dove le a_{ik} sono funzioni delle coordinate che soddisfano alle seguenti proprietà: i) $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, \dots, n$; ii) $\sum_{i,k} a_{ik} v^i v^k > 0$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v^1, \dots, v^n) \neq 0$; iii) le funzioni $x \mapsto a_{ik}(x)$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^2$, dove definite.

L'introduzione di tale nozione risale al 1854, anno in cui Riemann presentò il proprio discorso di abilitazione nel quale enunciò, in una forma piuttosto vaga e discorsiva, le idee generali alla base di una teoria delle varietà, oggi dette riemanniane, a un numero qualunque di dimensioni.

Pur non disponendo del concetto di tensore, Riemann fu molto esplicito nel riconoscere che le funzioni $x \mapsto a_{ik}(x)$, coefficienti della metrica, non hanno di per sé un significato geometrico intrinseco, poiché esse dipendono dalla scelta (arbitraria) del particolare sistema di coordinate adottato. Sorse allora il problema di stabilire condizioni atte a stabilire se due date forme differenziali quadratiche differiscono o meno l'una dall'altra per un semplice cambiamento di coordinate. Esso può essere così riformulato:

Problema 5.1 *Trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché, date due forme differenziali quadratiche*

$$(4) \quad \Phi = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad \Psi = \sum_{r,s=1}^n b_{rs}(y) dy^r dy^s$$

nelle variabili $x^i, i = 1, \dots, n$ e $y^i, i = 1, \dots, n$, esista un cambiamento di coordinate $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ (sufficientemente regolare) che trasformi Ψ in Φ e cioè tale che sussistano le relazioni:

$$(5) \quad a_{ik}(x) = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial y^r}{\partial x^i} \frac{\partial y^s}{\partial x^k} b_{rs}(y(x)).$$

⁽²¹⁾ In termini più precisi, una metrica riemanniana è identificabile con un elemento del fibrato dei tensori covarianti di ordine 2. Più propriamente, dunque, Ψ dovrebbe scriversi nella forma seguente $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx^i \otimes dx^k$. Si veda [Spivak 1999, I, capp. 4 e 9]. Qui e nel seguito ignoreremo tale distinzione, adeguandoci alla notazione “storica”.

Il problema fu affrontato e parzialmente risolto da Christoffel e Lipschitz con tecniche assai diverse. Christoffel, come già Riemann prima di lui, si servì una serie di funzioni con multi-indici in termini delle quali poté esprimere condizioni necessarie (e solo in qualche caso anche sufficienti) affinché una data forma Φ nelle variabili $x^1, \dots, x^n$ sia trasformabile in una seconda forma (essa pure data) Ψ nelle variabili $y^1, \dots, y^n$. Tra queste funzioni rivestono un ruolo assai rilevante i cosiddetti simboli di Riemann-Christoffel di prima e seconda specie:

$$\left[\begin{matrix} gh \\ k \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{gk}}{\partial x^h} + \frac{\partial a_{kh}}{\partial x^g} - \frac{\partial a_{gh}}{\partial x^k} \right), \quad g, h, k = 1, \dots, n;$$

(6)

$$\left\{ \begin{matrix} gh \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{s=1}^n a^{sk} \left[\begin{matrix} gh \\ s \end{matrix} \right]$$

e i seguenti simboli a quattro indici, che oggi possiamo riguardare come le componenti totalmente covarianti del tensore di curvatura di Riemann:

$$(gkhi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a_{gi}}{\partial x^h \partial x^k} + \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x^g \partial x^i} - \frac{\partial^2 a_{gh}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x^g \partial x^h} \right) +$$

(R)

$$+ \sum_{\beta=1}^n \left\{ \begin{matrix} gi \\ \beta \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} hk \\ \beta \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} gh \\ \beta \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} ik \\ \beta \end{matrix} \right] \quad g, k, h, i = 1, \dots, n.$$

Riemann guardò alle funzioni (R) come a una estensione della nozione gaussiana della curvatura di una superficie a varietà di dimensione n qualunque. Nel caso pluridimensionale, la curvatura cessa di essere una semplice funzione scalare definita sulla varietà (come succede nel caso delle superfici) per acquisire una struttura a quattro indici che, unitamente a opportune proprietà di trasformazione, fanno di essa un tensore. Tali coefficienti furono introdotti per la prima volta dallo stesso Riemann, non nel suo discorso inaugurale ma nel già citato lavoro del 1861 (ma pubblicato solo in [Riemann 1876] con il quale Riemann partecipò ad una competizione indetta dall'Accademia delle Scienze di Parigi sul problema della conduzione del calore. In questo stesso lavoro, fecero la propria comparsa anche i simboli di Riemann-Christoffel di prima specie, in una forma di poco differente rispetto a quella data da (6).

Inizialmente tali simboli furono introdotti per scopi prevalentemente algoritmici. Christoffel e

Ricci, in maniera più esplicita e generale, si servirono di essi per definire una operazione che proprio da Ricci fu battezzata con l'espressione di derivazione covariante: un tipo di derivazione (estensione della ordinaria derivazione in uno spazio euclideo) che consente di ottenere tensori $(r+1)$ -volte covarianti a partire da un tensore r -volte covariante; soltanto verso la fine degli anni Dieci del secolo scorso per opera di alcuni fondamentali contributi di Levi-Civita e di Arnoldus Jan Schouten, ad essi fu effettivamente attribuito un significato geometrico in termini della nozione di parallelismo fra vettori controvarianti (o covarianti). Fu questo l'inizio di una fase di nuovi sviluppi e di profondi mutamenti per la disciplina che orientarono le ricerche di molti specialisti (lo stesso Schouten, Hermann Weyl, Élie Cartan) verso un superamento del quadro teorico riemanniano e verso la creazione della cosiddetta teoria delle connessioni.

6. – La nascita del Calcolo Differenziale Assoluto

Il calcolo differenziale assoluto fu il risultato di un processo di scoperta lento e graduale che si svolse nell'arco di circa un decennio (1884-1892), durante il quale Ricci ideò e perfezionò progressivamente le nozioni chiave del suo algoritmo. Un primo importante contributo fu l'articolo intitolato *Principi di una teoria delle forme quadratiche differenziali*, [Ricci 1884], in cui Ricci fornì una discussione molto dettagliata del problema dell'equivalenza per le forme quadratiche differenziali, proponendosi un duplice obiettivo: offrire una trattazione delle forme quadratiche differenziali attraverso strumenti di natura puramente analitica e introdurre un criterio di classificazione che potesse aprire la strada a ricerche più sistematiche sull'argomento.

L'introduzione a [Ricci 1884] offre interessanti spunti di riflessione da questo punto di vista. Qui Ricci esprimeva la volontà di perseguire un ideale di uniformità e generalità nei metodi che, a suo avviso, non si riscontrava negli studi pubblicati in precedenza. Dopo aver richiamato i lavori pionieristici di Riemann, in particolare, l'*Habilitationsvortrag* e la *Commentatio Mathematica*, Ricci descriveva brevemente i contributi dei suoi predecessori (Christoffel

fel, Lipschitz, Voss e Beez) osservando che, a suo giudizio, (quasi) tutti presentavano difetti metodologici comuni:

quasi tutti i Geometri che si sono fino ad ora occupati di questo argomento [cioè della teoria delle forme quadratiche differenziali], [...] chiesero alle teorie che valgono pel nostro spazio e per le superficie ordinarie a due dimensioni, norma alle loro ricerche. E se i risultati a cui giunsero furono notevoli, i metodi non appaiono sempre chiari e non rendono dei risultati stessi sufficiente ragione [...]. [Ricci 1884, pp. 139-140]

Inoltre, Ricci intendeva abbandonare ogni riferimento esplicito ad analogie di natura meccanica e geometrica, a favore di una trattazione puramente analitica, priva di ogni coinvolgimento in discussioni “oziose” sulla natura degli spazi multidimensionali. Come spiegava:

Oggetto di questo scritto è di iniziare sulle forme differenziali quadratiche una serie di ricerche, le quali, condotte su concetti puramente analitici, meglio ci addentrino nella conoscenza della loro natura, e sfuggano anche così alle discussioni, a dir vero, alquanto oziose sulla esistenza e sulla natura degli spazi a più di tre dimensioni. Le interpretazioni dettate dalle analogie geometriche o meccaniche, che a quei risultati si potranno dare, non saranno che illustrazioni di una tale teoria. [Ricci 1884, pp. 139-140]

Non sorprende che queste osservazioni abbiano attirato tra gli storici una certa attenzione.⁽²²⁾ Sono state interpretate come una dichiarazione programmatica che documenta la volontà di sviluppare la teoria delle forme quadratiche differenziali e, più in generale, il nascente calcolo differenziale assoluto, in maniera indipendentemente da qualsiasi ricorso all'intuizione geometrica, confinando così la geometria differenziale a un ruolo affatto secondario nello sviluppo storico del calcolo.

Certamente, le parole di Ricci indicano una preferenza per metodi analitici e algebrici, in contrapposizione, ad esempio, a quelli impiegati da Lipschitz che era ricorso sovente ad argomentazioni tratte dalla meccanica e dal calcolo delle variazioni.⁽²³⁾ Tuttavia, esse non dovrebbero essere inter-

pretate come segno che Ricci intendesse sminuire il ruolo della geometria, o addirittura ignorarne l'importanza per le sue ricerche sulla teoria delle forme quadratiche differenziali.

La sua affermazione circa la volontà di evitare ogni discussione sulla natura degli spazi multidimensionali ha ragioni storiche specifiche, che andrebbero prese nella dovuta considerazione quando si valutano le dichiarazioni di Ricci e il loro impatto effettivo sul processo che ha portato alla creazione del calcolo differenziale assoluto.

Poco prima della pubblicazione di [Ricci 1884], la questione della legittimità degli spazi multidimensionali era stata al centro delle indagini del matematico tedesco Richard Beez.⁽²⁴⁾ A partire dalla fine degli anni Settanta dell'Ottocento, dopo la pubblicazione delle *Werke* di Riemann, Beez aveva perseguito un ampio programma di ricerca volto a estendere la teoria delle superfici di Gauss alla geometria multidimensionale e a sviluppare una teoria generale delle ipersuperfici immerse negli spazi euclidei a più dimensioni $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 4$. Nel corso di queste indagini, Beez si era imbattuto in diversi risultati inattesi, che egli interpretò come una manifestazione dell'incoerenza logica della geometria pluridimensionale. Il più importante tra questi era il seguente: al contrario del caso bidimensionale, le ipersuperfici di dimensione superiore – cioè ipersuperfici $(n-1)$ -dimensionali immerse (isometricamente) in uno spazio euclideo n -dimensionale, con $n \geq 4$ – non possono essere deformate. Infatti, le ipersuperfici nello spazio euclideo, Beez aveva dimostrato, risultano completamente determinate dalla loro prima forma fondamentale e presentano quindi una proprietà di rigidità che non trova corrispondenza nella teoria classica delle superfici. A suo avviso, questo comportamento appariva inconcepibile per il suo carattere controintuitivo.

Come fu chiarito poco dopo in [Killing 1885] e [Schur 1887], questo risultato si rivelò errato o, al massimo, formulato in modo impreciso. Infatti, come dimostrato per primo da Killing nella sua monografia [Killing 1885], il risultato di rigidità di

⁽²²⁾ Si veda [Reich 1994, p. 67] e [Darrigol 2015, §3.4].

⁽²³⁾ Si vedano ad esempio: [Lipschitz 1869], [Lipschitz 1870].

⁽²⁴⁾ Si veda [Beez 1874], [Beez 1875], e [Beez 1876].

Beez può considerarsi corretto solo sotto particolari condizioni relative al rango della matrice associata alla seconda forma fondamentale delle ipersuperfici.⁽²⁵⁾

Nonostante queste limitazioni, Beez e i suoi scritti sembrano aver esercitato un'influenza rilevante sui primi lavori di Ricci e in particolare su [Ricci 1884]. In effetti, la trattazione delle forme quadratiche differenziali di prima classe⁽²⁶⁾ che Ricci propose può essere interpretata come una riformulazione puramente analitica della teoria delle ipersuperfici negli spazi euclidei di dimensione superiore a tre. Attraverso di essa, Ricci intendeva fornire dimostrazioni alternative di alcuni risultati di Beez, incluso il teorema (errato) secondo cui il determinante della seconda forma fondamentale associata a ipersuperfici n -dimensionali, con $n \geq 3$, è in ogni caso diverso da zero.

Fornendo strumenti euristici essenziali per l'individuazione di scelte tecniche e criteri di classificazione, i contributi di Beez alla geometria multidimensionale costituirono una fonte di ispirazione importante per la teoria che Ricci si avviava a sviluppare. Allo stesso tempo, però, egli ritenne opportuno prendere le distanze dalla trattazione geometrica di Beez, probabilmente per evitare di essere coinvolto in un delicato dibattito sulla legittimità della geometria multidimensionale, concentrandosi su una discussione puramente analitica dell'argomento.

Di conseguenza, sembra che la citazione sopra riportata vada intesa alla luce di circostanze specifiche, piuttosto che come espressione di un punto di vista metodologico chiaro e ponderato da parte di Ricci. Un esame dell'intera produzione di Ricci suggerisce l'esistenza di un rapporto piuttosto stretto tra lo sviluppo del calcolo differenziale assoluto e la geometria delle varietà riemanniane multidimensionali. Del resto, lo stesso Ricci, insieme a Levi-Civita, riconobbe di buon grado il sussistere di

questa connessione nell'introduzione a [Ricci, Levi-Civita], dove scrisse:

[...] les méthodes mêmes et les avantages, qu'ils présentent, ont leur raison d'être et leur source dans les rapports intimes, qui les lient à la notion de variété à n dimensions, que nous devons aux génies de Gauss et de Riemann. [Ricci, Levi-Civita, p. 127]

6.1 – Principi di Ricci

Il punto di partenza di [Ricci 1884] fu un'osservazione di [Schläfli 1871-73], secondo la quale, data una forma quadratica differenziale $\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ nelle n variabili $x^1, \dots, x^n$, esistono interi h , $0 \leq h \leq n(n-1)/2$ e funzioni $u^r = u^r(x^1, \dots, x^n)$, $r = 1, \dots, n+h$, tali che Φ possa essere trasformato in una forma quadratica differenziale del tipo $\sum_{r=1}^{n+h} (du^r)^2$. Alla luce di questo risultato, Ricci si propose di fornire una classificazione delle forme quadratiche differenziali basata sulla nozione di *classe*, che egli definì come il minimo intero $\tilde{h}$ per il quale questa condizione è soddisfatta.

Ricci decise di concentrare i propri sforzi intorno alla classificazione delle forme quadratiche differenziali di classe $\tilde{h} = 0, 1$. Probabilmente, tale scelta fu dettata tanto da un criterio di semplicità quanto dal fatto che questo tipo di forme quadratiche risultava rilevante per lo studio della geometria delle varietà piatte e delle ipersuperfici immerse nello spazio euclideo.

Per quanto riguarda le forme quadratiche differenziali di classe zero, Ricci offrì una nuova dimostrazione del criterio, già stabilito da Lipschitz, secondo cui l'annullarsi del tensore di curvatura è condizione non solo necessaria ma anche sufficiente affinché una forma quadratica differenziale sia trasformabile in una metrica piatta, una metrica cioè della forma: $\sum_{i=1}^n (dy^i)^2$.

La soluzione proposta del problema di fornire condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma quadratica differenziale sia di prima classe è particolarmente interessante, poiché chiaramente modellata sulle ben note proprietà geometriche delle ipersuperfici nello spazio euclideo, quali Beez aveva stabilito negli studi cui prima si è fatto cenno. In effetti, la trattazione offerta da Ricci delle forme $\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j = \sum_{r=1}^{n+1} (du^r)^2$ di questa classe si basava sull'introduzione di una forma quadratica

⁽²⁵⁾ Un'ipersuperficie di dimensione $n \geq 3$ è effettivamente indeformabile se il rango della sua seconda forma fondamentale è maggiore di 2.

⁽²⁶⁾ La nozione di classe sarà definita nel paragrafo successivo.

differenziale associata, che è covariante rispetto a Φ e che può essere interpretata geometricamente come una generalizzazione a dimensioni superiori della seconda forma fondamentale usata nella teoria classica delle superfici.

Ispirandosi alla definizione già introdotta in [Breez 1875, p. 428], Ricci considerò il seguente insieme di funzioni: ⁽²⁷⁾

$$\sqrt{a} \cdot b_{ik} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^i \partial x^k} & \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^i \partial x^k} & \cdots & \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^i \partial x^k} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^n} & \frac{\partial u^2}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x^n} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{dove } a := \sqrt{\det(a_{ij})},$$

e dimostrò che i simboli di Riemann associati a Φ possono essere espressi tramite i minori della seconda ordine della matrice simmetrica dei coefficienti b_{iq} . Inoltre, Ricci poté provare che tali coefficienti costituiscono una forma quadratica differenziale $\sum_{i,j=1}^n b_{ij} dx^i dx^j$, che noi indicheremo con $\mathbf{K}$, chiamata forma derivata di Φ che, come anticipato, presenta la notevole proprietà di essere “covariante” (vedi [Ricci 1884, p. 168]) rispetto a Φ . Ciò significa che le leggi di trasformazione dei coefficienti di $\mathbf{K}$ sono identiche a quelle dei coefficienti di Φ . Infatti, se $\bar{b}_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$ denotano le componenti di $\mathbf{K}$ rispetto a un nuovo sistema locale di coordinate $(y_1, \dots, y_n)$, si ha

$$\bar{b}_{ij} = \sum_{rs} b_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

⁽²⁷⁾ La formula di Ricci differisce da quella di Beez semplicemente per il fattore $-\sqrt{a}$. È interessante notare che il fattore $\sqrt{a}$ è essenziale affinché b_{rs} si trasformi covariantemente rispetto ad a_{rs} . Su questo punto, Ricci non menzionò il lavoro di Beez sulle ipersuperfici. Tuttavia, vi fece ripetuto riferimento nella discussione del teorema di rigidità di Beez alla luce dei suoi risultati [Ricci 1884, pp. 167-170].

L'introduzione della forma $\mathbf{K}$ si rivelò decisiva nell'orientare le successive ricerche sulle proprietà invarianti delle forme quadratiche differenziali. Infatti, la considerazione della coppia $(\Phi, \mathbf{K})$ permise a Ricci di presentare, per la prima volta, un approccio generale alla determinazione degli invarianti differenziali associati a Φ . Con questa espressione si indicavano funzioni associate ad una forma quadratica $\sum_{ik} a_{ik} dx^i dx^k$, dipendente dai coefficienti a_{ik} insieme alle loro derivate rispetto alle variabili $x^1, x^2, \dots, x^n$, fino a un dato ordine q (detto ordine dell'invariante), tale che

$$\mathcal{F}\left(a_{ij}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}, \dots\right) = \mathcal{F}\left(\bar{a}_{ij}, \frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial y^k}, \frac{\partial^2 \bar{a}_{ij}}{\partial y^k \partial y^l}, \dots\right),$$

ove $\bar{a}_{ij}$ indicano i coefficienti della prima forma fondamentale espressa nel nuovo sistema di coordinate $y^1, y^2, \dots, y^n$.

L'idea principale consisteva nel considerare sia Φ sia $\mathbf{K}$ come forme *algebriche* (quadratiche) nelle variabili dx^i , $i = 1, \dots, n$ (proprio come aveva fatto [Christoffel 1869]), alle quali potevano essere applicate le tecniche standard della teoria algebrica degli invarianti, al fine di trovare “invarianti algebrici assoluti”. Con questa espressione Ricci denotava funzioni razionali $\mathcal{F}(a_{ij}, b_{ij})$ dei coefficienti delle forme Φ e $\mathbf{K}$ che restano invarianti rispetto alle seguenti trasformazioni:

$$\bar{a}_{lq} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^q},$$

$$\bar{b}_{lq} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \frac{\partial x^j}{\partial y^q},$$

$$l, q = 1, \dots, n.$$

Tali funzioni venivano quindi interpretate come invarianti differenziali di Φ sulla base dell'errato risultato secondo cui i coefficienti di $\mathbf{K}$ possono essere espressi solo in termini dei coefficienti di Φ e delle loro derivate. La procedura adottata da Ricci può essere così descritta: ⁽²⁸⁾ per calcolare le fun-

⁽²⁸⁾ Qui e nel seguito, per brevità, adotteremo la notazione matriciale di cui Ricci non fece uso.

zioni invarianti $\mathfrak{F}(a_{ij}, b_{ij})$, egli considerava il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{BA}^{-1}$ (dove $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$) e osservava che i suoi n coefficienti (non costanti) rappresentano altrettanti invarianti assoluti, dipendenti dai coefficienti di Φ e dalle loro derivate. Tali proprietà di invarianza sono conseguenza di una semplice osservazione: se $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ denotano le matrici i cui elementi sono dati rispettivamente da $\bar{a}_{ij}$ e $\bar{b}_{ij}$, allora le matrici $\mathbf{BA}^{-1}$ e $\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}^{-1}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Infatti, introducendo la matrice $\mathbf{J} := [J_{ki}] = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}$, è facile vedere che $\bar{\mathbf{A}} = [\bar{a}_{ij}] = \mathbf{J}^t \mathbf{A} \mathbf{J}$, $\bar{\mathbf{B}} = [\bar{b}_{ij}] = \mathbf{J}^t \mathbf{B} \mathbf{J}$. Di conseguenza, $\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{J}^t \mathbf{B} \mathbf{J} (\mathbf{J}^t \mathbf{A} \mathbf{J})^{-1} = \mathbf{J}^t \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{J}^t)^{-1}$ e quindi, $\det(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}^{-1} - \lambda \mathbb{I}) = \det(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} - \lambda \mathbb{I})$.

Ricci fu particolarmente interessato a studiare il significato geometrico di questo insieme di invarianti e a ricollegarlo con la teoria delle ipersuperfici di Beez. A tal fine, Ricci dimostrò che gli n invarianti così determinati ammettono espressioni in termini delle curvature principali dell'ipersuperficie associata a Φ .

6.2 – Invarianti e Parametri Differenziali

Lo studio delle forme quadratiche differenziali di prima classe, sebbene condizionato dall'erronea convinzione che la forma derivata $\mathbf{K}$ fosse completamente determinata da Φ , spinse Ricci a sviluppare un approccio generale alla determinazione degli invarianti e dei parametri differenziali. Nel 1886 pubblicò una breve memoria *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali*, nella quale la procedura già adottata in [Ricci 1884] e appena descritta trovò un'applicazione di carattere generale.

L'idea centrale di questo approccio consisteva nella produzione di forme quadratiche differenziali covarianti rispetto alla forma fondamentale assegnata e nell'applicazione di tecniche standard della teoria degli invarianti algebrici per ricavarne invarianti differenziali. È proprio in questo contesto che l'algoritmo di Christoffel (corrispondente all'operazione di derivazione covariante) acquisì rilievo come strumento tecnico essenziale nelle ricerche di Ricci.

Questi contributi alla teoria degli invarianti e dei parametri differenziali sono stati talvolta descritti come frutto della preoccupazione di Ricci per questioni metodologiche e del desiderio di offrire un trattamento sistematico della materia, libero dall'uso di tecniche variazionali, come quelle impiegate in [Lipschitz 1869] e [Beltrami 1868]. Ricci considerava evidentemente tali tecniche come spurie e in qualche modo estranee al tipo di problemi cui venivano applicate. È certamente vero che egli fu particolarmente sensibile a preoccupazioni di carattere formale e metodologico. Tuttavia, il ruolo delle sue precedenti ricerche sulle forme quadratiche differenziali associate a ipersuperfici immerse in uno spazio euclideo fu, di gran lunga, più decisivo nell'orientare le sue scelte tecniche e nel condurlo alla nozione di derivazione covariante.

Nell'introduzione al suo lavoro del 1886, Ricci fu piuttosto esplicito nel descrivere il percorso euristico da lui seguito. Infatti, dopo aver ricordato alcuni precedenti lavori sugli invarianti differenziali di Casorati e Beltrami, cioè [Casorati 1860-61] e [Beltrami 1868], Ricci descrisse in dettaglio l'approccio algebrico che intendeva perseguire.

I risultati relativi alla ricerca medesima, contenuti nei miei *Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche*, pei quali gli invarianti degli elementi lineari delle superficie di quante si vogliano dimensioni si sono presentati come veri e propri invarianti algebrici di un sistema di due forme quadratiche covarianti, mi hanno indotto a cercare una via simile per giungere ai parametri differenziali di 2° ordine. [Ricci 1886, pp. 177-178]

Prima di analizzare il contenuto dell'articolo, è utile richiamare la definizione di parametri e invarianti differenziali fornita in [Ricci 1886, §1]. A tal fine, sia Φ una forma quadratica differenziale non singolare nelle variabili $x^1, \dots, x^n$, $\Phi = \sum_{r,s} a_{rs} dx^r dx^s$; un parametro differenziale di Φ è un'espressione che contiene i coefficienti di Φ e funzioni arbitrarie, diciamo $U(x^1, \dots, x^n)$, $V(x^1, \dots, x^n)$, ecc., insieme alle loro derivate $\left(a_{ik,r} := \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^r}\right)$, tale che essa conservi la propria forma ogniquale volta le coordinate $(x^1, \dots, x^n)$ vengano sostituite da nuove coordinate,

diciamo $(y^1, \dots, y^n)$. Ciò significa che se $\bar{a}_{ik}, \bar{a}_{ik,r}, \dots, \bar{U}, \bar{U}_r$, ecc., sono definiti da:

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{a}_{ik} = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} a_{rs}, \\ \bar{a}_{ik,r} = \frac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial y^r}, \\ \vdots \\ \bar{U}(y^1, \dots, y^n) = U(x^1(y), \dots, x^n(y)), \\ \bar{U}_r(y^1, \dots, y^n) = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y^r}, \\ \vdots \end{cases}$$

allora la funzione $\mathfrak{F}(a_{ik}, a_{ik,r}, \dots; U, U_r, \dots)$ è un parametro differenziale se, e solo se, si ha:

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}(a_{ik}, a_{ik,r}, \dots; U, U_r, \dots) = \\ = \mathfrak{F}(\bar{a}_{ik}, \bar{a}_{ik,r}, \dots; \bar{U}, \bar{U}_r, \dots). \end{aligned}$$

Come già nel caso delle forme quadratiche differenziali di prima classe, Ricci applicò il metodo della teoria degli invarianti algebrici per ottenere parametri differenziali attraverso gli “invarianti algebrici assoluti” di due forme covarianti. La sua strategia consisteva nell’associare a Φ una forma quadratica differenziale che dipende dalla funzione (arbitraria) U e dalle sue derivate fino a un certo ordine. Proprio in questa circostanza, la procedura di Christoffel che Ricci in seguito denominò “derivazione covariante” fece una prima implicita comparsa. Ricci osservava infatti che se $U(x^1, \dots, x^n)$ denota una funzione arbitraria, allora le sue derivate del primo ordine $U_r = \frac{\partial U}{\partial x^r}$, $r = 1, \dots, n$ si trasformano “controvariantemente” rispetto a dx^r , $r = 1, \dots, n$. In termini moderni, ciò equivale a dire che gli U_r sono le componenti di un tensore covariante del primo ordine, mentre i dx^r si comportano come componenti di un tensore controvariante del primo ordine. Considerando il sistema di funzioni $U^r = \sum_{k=1}^n a^{rk} U_k$, Ricci introdusse le quantità

$$U_{rs} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^r \partial x^s} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{rs,k} U^k, \quad (29) \quad r, s = 1, \dots, n,$$

(29) Qui, e nel seguito, i simboli $\Gamma_{rs,k}$, $r, s, k = 1, \dots, n$ denotano i simboli di Christoffel di prima specie; analogamente, i simboli Γ_{rs}^k , $r, s, k = 1, \dots, n$ denoteranno i simboli di Christoffel di seconda specie. Si veda §5.

e dimostrò che esse si trasformano covariantemente rispetto ai coefficienti di $\Phi = \sum_{rs} a_{rs} dx^r dx^s$, cioè:

$$\bar{U}_{ik} = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} U_{rs}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Proprio questa proprietà di covarianza può essere sfruttata per calcolare i parametri differenziali associati alla funzione U . In particolare, introducendo le matrici $\mathbf{U} = [U_{rs}]$ e $\mathbf{A} = [a_{rs}]$, Ricci determinò i parametri differenziali in termini dei coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}$. Questo perché un cambiamento di coordinate $x^k = x^k(y^1, \dots, y^n)$ coniuga la matrice $\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}$. Infatti,

se $\mathbf{J}$ denota la matrice $J_{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$, si ha $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{J}^t \mathbf{U} \mathbf{J}$,

$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{J}^t \mathbf{A} \mathbf{J}$ e quindi, $\bar{\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{A}})^{-1} = \mathbf{J}^t \mathbf{U} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{J}^t)^{-1}$. Di conseguenza, i coefficienti del polinomio caratteristico di $\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}$ sono invarianti sotto un arbitrario cambiamento di coordinate. Essi sono infatti parametri differenziali del secondo ordine della funzione $U(x^1, \dots, x^n)$, la cui dipendenza dalle derivate seconde è data dai coefficienti della matrice $\mathbf{U}$. In tal modo, oltre ad altri nuovi parametri differenziali, Ricci ottenne il parametro differenziale del secondo ordine introdotto in [Beltrami 1868, p. 98]. Infatti, se c_r denota il coefficiente del termine di ordine r del polinomio caratteristico di $\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}$, allora si verifica facilmente che vale l’equazione:

$$(10) \quad \begin{aligned} (\Delta_2)U &= c_{n-1}(-1)^{n-1} = \text{Tr}(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}) = \\ &= \sum_{h,k=1}^n a^{hk} U_{hk} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij} \sqrt{a} \frac{\partial U}{\partial x^j} \right), \end{aligned}$$

dove si intende che $a^{ij} = [\mathbf{A}^{-1}]_{ij}$ e che $a = \det \mathbf{A}$. Ricci fu particolarmente esplicito nel sottolineare i vantaggi del suo nuovo approccio nella ricerca di invarianti e parametri differenziali. A suo avviso, i metodi seguiti consentivano un trattamento unitario della materia, che non richiedeva il ricorso a tecniche indirette, come quelle di tipo variazionale, impiegate da Jacobi e Beltrami. In realtà, l’importanza del nuovo approccio andava ben oltre la scoperta di una nuova strategia per determinare invarianti e parametri differenziali. Infatti, il suo lavoro sull’argomento condusse naturalmente Ricci alla nozione di derivata covariante.

6.3 – Derivata covariante

La prima occorrenza esplicita della nozione di derivata covariante si trova in [Ricci 1887a], una breve memoria pubblicata nei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*. Nell'introduzione di questo articolo, Ricci espresse il desiderio di fornire una trattazione sistematica di una procedura generale (*operazione* è il termine che egli utilizzò) che aveva recentemente impiegato in diverse circostanze. Egli menzionava le sue ricerche sugli invarianti differenziali e sui parametri differenziali, nonché un suo lavoro sulla nozione di sistemi ortogonali n -pli in una varietà riemanniana. Con le sue stesse parole:

Nelle mie ultime ricerche sono stato naturalmente condotto ad associare alle funzioni di n variabili una forma quadratica ϕ^2 come espressione del quadrato dell'elemento lineare di una varietà, di cui quelle variabili rappresentano le coordinate. Indicando con U una funzione arbitraria di queste, mi sono così presentate delle espressioni a due o tre indici, la cui considerazione si può sostituire a quella delle derivate seconde o terze di U , e che hanno su queste il vantaggio di essere coefficienti di forme covarianti a ϕ^2 . Ho pure accennato alla possibilità di una simile sostituzione per le derivate di un ordine qualunque. L'utilità della sostituzione stessa, in ispecie nelle ricerche che sono per loro essenza indipendenti dalla natura della varietà o dalla scelta delle coordinate in una varietà data, è evidente. Così, per esempio, queste espressioni (che chiamerò derivate covarianti nella varietà di elemento lineare ϕ) danno necessariamente forma più semplice e perspicua a tutte le espressioni che godono della proprietà caratteristica dei parametri differenziali, e mi hanno permesso di dare alle equazioni, cui deve soddisfare il parametro di una famiglia di luoghi ad $n - 1$ dimensioni in una varietà qual si voglia ad n dimensioni e qualunque sia il sistema delle coordinate per poter far parte di un sistema n -plo ortogonale, una forma tanto semplice quanto quella data dal Darboux nel caso in cui la varietà proposta sia piana od euclidea e le coordinate siano cartesiane ortogonali. [Ricci 1887a, p. 199]

La menzione esplicita del problema della determinazione dei sistemi n -pli ortogonali, cui era dedicata la memoria [Ricci 1887b], è interessante soprattutto perché offre una ulteriore conferma del contesto geometrico entro il quale la nozione di derivata covariante fu introdotta. Tralasciando di fornire i dettagli della soluzione proposta da Ricci, per i quali rimandiamo a [Tonolo 1961] e [Cogliati 2024], ci

limitiamo ad enunciare i termini del problema che Ricci interpretò come una generalizzazione al caso di una metrica riemanniana qualunque di un problema già affrontato e risolto per il caso euclideo da Darboux.

Problema 6.1 *Trovare le condizioni (sia necessarie che sufficienti) affinché, data una famiglia di ipersuperfici $\rho(x^1, \dots, x^n) = c$ in una varietà Riemanniana, il cui tensore metrico è $\Phi = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx^i dx^k$, si possano associare altre famiglie di ipersuperfici, ad esempio, $\rho_1 = c_1, \rho_2 = c_2, \dots, \rho_{n-1} = c_{n-1}$, le quali, insieme a $\rho_n := \rho = c$, costituiscono un sistema ortogonale n -plo nel senso che valgono le seguenti relazioni:*

$$(11) \quad \sum_{r,s=1}^n a^{rs} \frac{\partial \rho_h}{\partial x^r} \frac{\partial \rho_k}{\partial x^s} = 0, \quad h \neq k.$$

Torniamo però a [Ricci 1887a]. L'importanza di questa memoria appare duplice. Infatti, oltre a introdurre la nozione di derivazione covariante, Ricci presentò qui per la prima volta una definizione esplicita di quella che chiamò “quantità a p indici”, che possiamo identificare, in termini moderni, come le componenti di un tensore completamente covariante di ordine p :

Definizione 6.1 *Siano $U_{r_1 \dots r_p}$ p funzioni connesse a $\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ in modo tale che, passando da $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ a $\sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij} dy^i dy^j$, esse si trasformino secondo le seguenti relazioni:*

$$(12) \quad \bar{U}_{r_1 \dots r_p} = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_p=1}^n \frac{\partial x^{s_1}}{\partial y^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_p}}{\partial y^{r_p}} U_{s_1 \dots s_p};$$

si dice che le funzioni $U_{r_1 \dots r_p}$ sono coefficienti a p indici di una forma che è covariante con Φ .

L'operazione di derivazione covariante introdotta in [Ricci 1887a], sulla scorta della nozione di “tensore” appena definita, può essere considerata come una reinterpretazione della procedura già impiegata in [Christoffel 1869], che consisteva nel generare forme differenziali covarianti di ordine crescente associate alla forma quadrilineare $G_4 = \sum_{ijkl} R_{ijkl} d^{(1)}x^i d^{(2)}x^j d^{(3)}x^k d^{(4)}x^l$, costruita a partire dalle componenti della curvatura di Riemann. Dal canto suo, Ricci estese tale nozione a forme covarianti e controvarianti qualsiasi (non

necessariamente dedotte a partire dal tensore di curvatura), enfatizzando inoltre l'analogia con l'ordinaria operazione di derivazione.

Per introdurre questa nozione, Ricci considerò un insieme di coefficienti $U_{r_1 \dots r_p}$ che si trasformano in modo covariante rispetto a Φ (secondo la definizione precedente) e definì le quantità seguenti:

$$U_{r_1 \dots r_p r_{p+1}} := \frac{\partial U_{r_1 r_2 \dots r_p}}{\partial x^{r_{p+1}}} - \sum_{q,s=1}^n a^{qs} \sum_{h=1}^p \Gamma_{r_h r_{p+1}, s} U_{r_1 \dots r_{h-1} q r_{h+1} r_p}.$$

Facendo uso delle relazioni

$$\frac{\partial^2 x^h}{\partial y^r \partial y^s} = \bar{a}^{pq} \bar{\Gamma}_{rs, q} \frac{\partial x^h}{\partial y^p} - \alpha^{hp} \Gamma_{qt, p} \frac{\partial x^s}{\partial y^t},$$

Ricci dimostrò che l'insieme delle quantità $U_{r_1 \dots r_p r_{p+1}}$ così definite si trasforma, rispetto a un cambiamento di coordinate $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1(x), \dots, y^n(x))$, come segue:

$$\bar{U}_{r_1 \dots r_p r_{p+1}} = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_p, s_{p+1}=1}^n \frac{\partial x^{s_1}}{\partial y^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_p}}{\partial y^{r_p}} \frac{\partial x^{s_{p+1}}}{\partial y^{r_{p+1}}} U_{s_1 \dots s_p s_{p+1}},$$

e quindi si comporta come “i coefficienti a $p+1$ indici” di una forma covariante con Φ .

Ricci passò quindi ad esaminare alcune proprietà generali dell'operazione che aveva appena introdotto, osservando che essa è distributiva rispetto alla somma. Investigò anche la validità della proprietà commutativa, stabilendo che “in ogni varietà, la derivazione covariante gode della proprietà commutativa fino al secondo ordine, e oltre il secondo ordine solo nelle varietà euclidee.” In tal modo, si stabilì per la prima volta un collegamento diretto tra la curvatura riemanniana e la proprietà commutativa della derivazione covariante. Più precisamente, se $\mathfrak{F}$ è una funzione arbitraria delle variabili $x_1, \dots, x_n$ e se $\mathfrak{F}_r$ denota $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x^r}$, $r = 1, \dots, n$, Ricci dimostrò che $\mathfrak{F}_{rs} = \mathfrak{F}_{sr}$, $r, s = 1, \dots, n$, e che, per le derivate di terzo ordine, si ha:

$$(13) \quad \mathfrak{F}_{rst} - \mathfrak{F}_{rts} = \sum_{i,k=1}^n a^{ik} R_{krst} \mathfrak{F}_i. \quad (30)$$

⁽³⁰⁾ Se D_k denota la derivazione covariante rispetto a x^k , allora $\mathfrak{F}_{rs} := D_s(\mathfrak{F}_r)$ e $\mathfrak{F}_{rst} := D_t(D_s(\mathfrak{F}_r))$.

Una definizione più generale di tensore, sia p volte covariante che contravariante, veniva data in termini di un sistema di np funzioni delle variabili $(x_1, \dots, x_n)$ soggette a leggi di trasformazione del tipo (12). La definizione venne ulteriormente discussa in un articolo di rassegna volto a presentare i suoi metodi a un pubblico più ampio, che Ricci pubblicò nel *Bulletin de Sciences Mathématiques* nel 1892. Qui, le quantità tensoriali venivano indicate come sistemi invarianti di funzioni. Inoltre, è in quest'opera che Ricci introdusse un simbolo specifico per indicare l'operazione di derivazione covariante (e controvariante) rispetto a una data forma differenziale quadratica Φ , denotata da D_Φ (e da D^Φ).

7. – Sviluppi successivi

Il citato articolo di rassegna scritto per il bollettino di Darboux, conteneva un cenno alle applicazioni del calcolo alla teoria delle superfici. Unitamente ai vantaggi offerti dalla nuove tecniche per lo studio della teoria dell'elasticità e della diffusione del calore, Ricci discusse brevemente del modo di ricavare a partire dai principi del calcolo differenziale assoluto le equazioni per le linee asintotiche e le linee di curvatura di una superficie definita localmente dall'annullarsi di una funzione reale di tre variabili reali.⁽³¹⁾

Un anno più tardi (1893) Ricci fece delle applicazioni del suo calcolo alla teoria delle superfici l'argomento di uno studio dettagliato che aveva il duplice scopo di dimostrare, da un lato, la fecondità dei nuovi metodi in un campo che “appunto perché esplorato in ogni sua parte dai geometri” era “meglio atto a far risaltare per mezzo di confronti i vantaggi [del calcolo differenziale assoluto]” e di presentare, dall'altro, alcuni risultati preliminari necessari alla comprensione di ulteriori sviluppi.

L'idea di fondo alla base di [Ricci 1893] consisteva in una sintesi tra i metodi del nuovo calcolo e l'impiego di alcune tecniche introdotte qualche tempo addietro da Beltrami nel corso delle sue *Ricerche di analisi applicate alla geometria*, dove quest'ulti-

⁽³¹⁾ Una discussione più dettagliata di tali applicazioni era stata fornita in [Ricci 1888, pp. 257-259].

mo aveva discusso diffusamente il tema delle linee tracciate su una data superficie ed in particolare dei sistemi di curve cosiddette isoterme.

Un'idea feconda che Ricci trasse da questo lavoro di Beltrami era la possibilità di caratterizzare le curve su una superficie non in termini finiti ma mediante la loro "rappresentazione analitica" ottenuta specificando il campo vettoriale di cui la curva è una curva integrale. Più precisamente, Ricci si propose di studiare la nozione di congruenza di curve e quella di fascio di congruenze con l'intento di tradurre concetti chiave della teoria classica delle superfici nel linguaggio del calcolo tensoriale. Erano concetti questi in parte già impiegati e tuttavia la preponderanza che Ricci gli accordava nell'economia della trattazione era del tutto nuova.

Fissata una superficie (astratta) definita dal dato di una forma quadratica differenziale $\Phi = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} dx^i dx^j$, una congruenza sulla superficie Φ veniva definita da Ricci come un "sistema semplicemente infinito" di curve sulla superficie tali che per ogni punto della superficie passa una e una sola curva del sistema. In termini analitici, una congruenza di curve corrisponde ad assegnare un campo di vettori (controvarianti) le cui componenti rispetto al sistema di coordinate locali x^1, x^2 sono $\lambda^r(x)$, $r = 1, 2$. Supponendo che il campo vettoriale λ sia normalizzato, supponendo cioè che valga la relazione $\sum_{r=1}^2 \lambda^r \lambda_r = 1$, le equazioni differenziali della congruenza assumono la forma

$$(14) \quad \lambda^r = \frac{dx^r}{ds}, \quad r = 1, 2;$$

dove s designa l'arco della curva integrale. Quelle che Ricci denominava equazioni finite della congruenza possono invece essere ottenute ricavando gli integrali dell'equazione lineare $\sum_{r=1}^2 \lambda^r \frac{\partial f}{\partial x^r} = 0$ ed eguagliando il suo integrale ad una costante arbitraria. Ne deriva che l'equazione $f(x^1, x^2) = c$, dove c è invece una costante fissata, è l'equazione di una curva della congruenza sulla superficie (al variare di c , si ottengono tutte le curve della congruenza. È chiaro che la determinazione della costante c è data dall'imposizione del passaggio di una curva per un punto assegnato). Da qui la definizione di congruenza come semplice infinità di curve tali che per ogni punto passa una e una sola curva della congruenza assegnata.

Cruciale ai fine degli sviluppi successivi era poi la nozione di "sistema canonico ortogonale" associato ad una congruenza $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, che Ricci definiva in [Ricci 1893, p. 313] nel modo seguente. Fissato un campo vettoriale $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, il sistema canonico ortogonale (designato con $\bar{\lambda}$ o alternativamente con $N_\Phi(\lambda)$) è il campo vettoriale normale e ortogonale a λ dato dalle posizioni:

$$(15) \quad \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^1, \bar{\lambda}^2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}} \lambda_2, \frac{1}{\sqrt{a}} \lambda_1 \right),$$

dove a è il determinante della matrice a_{rs} e λ_r sono le componenti covarianti associate al vettore λ , $\lambda_r = \sum_{s=1}^2 a_{rs} \lambda^s$, $r = 1, 2$. Non era difficile dimostrare che la definizione risultava ben posta (occorre infatti dimostrare che le componenti di $\bar{\lambda}$ si trasformano come le componenti di un tensore controvariante di ordine 1, o meglio, per usare le parole di Ricci, come le componenti di un sistema semplice controvariante). Il campo vettoriale $\bar{\lambda}$ risultava inoltre essere normalizzato e ovunque ortogonale alla congruenza λ . Sebbene Ricci non impiegasse questa denominazione, possiamo riassumere le posizioni appena descritte affermando che Ricci esibiva in questo modo un riferimento mobile ortonormale, definito localmente in un intorno coordinato di una superficie, la cui metrica ammette espressione locale (nel medesimo sistema di coordinate) $\Phi = \sum_{r,s=1}^2 a_{rs} dx^r dx^s$. Inoltre, poiché in ogni punto (di tale intorno coordinato) i vettori $\lambda(x)$, $\bar{\lambda}(x)$ costituiscono una base dello spazio tangente, Ricci poteva esprimere i coefficienti a_{rs} in termini delle componenti $\lambda_r, \bar{\lambda}_s$ delle 1-forme (sistemi semplici covarianti) associate a $\lambda, \bar{\lambda}$:

$$(16) \quad a_{rs} = \lambda_r \lambda_s + \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s, \quad r, s = 1, 2. \quad (32)$$

(32) La metrica è un tensore simmetrico; la totalità di tali tensori di ordine k su uno spazio vettoriale V di dimensione N , solitamente denotata con $S^k(V)$ è essa stessa uno spazio vettoriale di dimensione $\binom{N+k-1}{k}$.

L'insieme dei tensori metrici di una superficie ha dimensione tre; la metrica $a_{ij} dx^i dx^j$ può essere decomposta rispetto alla base $\{\theta \otimes \theta, \theta \otimes \bar{\theta} + \bar{\theta} \otimes \theta, \bar{\theta} \otimes \bar{\theta}\}$, dove $\theta = \sum_{r=1}^2 \lambda_r dx^r$, $\bar{\theta} = \sum_{r=1}^2 \bar{\lambda}_r dx^r$. Dal che segue la relazione: $a_{rs} = \alpha_1 \lambda_r \lambda_s + \alpha_2 (\lambda_r \bar{\lambda}_s + \bar{\lambda}_r \lambda_s) + \alpha_3 \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s$. Finalmente, ricordando che $\sum \lambda_s \lambda^s = \sum \bar{\lambda}_s \bar{\lambda}^s = 1$ e $\sum \lambda_s \bar{\lambda}^s = \bar{\lambda}_s \lambda^s = 0$, si ha $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 0$.

A partire dalla condizione $\sum_{r=1}^2 \lambda^r \lambda_r = 1$ attraverso derivazione covariante (rispetto alla metrica a_{rs}), si ottengono facilmente: $\sum_{r=1}^2 \lambda^r D_s \lambda_r = 0$, le quali implicano l'esistenza di un *tensore covariante ϕ_s , $s = 1, 2$ tale che:*

$$(17) \quad D_s \lambda_r = \bar{\lambda}_r \phi_s, \quad r, s = 1, 2.$$

Derivando ulteriormente e specializzando la formula (13) del paragrafo precedente al caso bidimensionale, Ricci otteneva l'espressione seguente per la curvatura gaussiana G :

$$(18) \quad G = \frac{D_2 \phi_1 - D_1 \phi_2}{\sqrt{a}}.$$

Sulla base di queste considerazioni, si poteva quindi introdurre la definizione, fondamentale per la formulazione della teoria delle superfici proposta, di fascio di sistemi di congruenze su una superficie: esso è un insieme di congruenze su una superficie tali che due curve appartenenti a due sistemi determinati di congruenze del fascio si tagliano ad un angolo costante. Equivalentemente, considerate due congruenze le quali sono curve integrali di campi vettoriali λ^r e ξ^r , $r = 1, 2$, esse appartengono al medesimo fascio se e solo se i tensori covarianti ad essi associati a norma delle (17) coincidono. Inoltre, ad ogni sistema semplice covariante ϕ_s , $s = 1, 2$, (cioè, ad ogni 1-forma) che soddisfa alla (18) corrisponde un fascio F . Per questo motivo ϕ_s o alternativamente la sua controparte controvariante ϕ^s è detta da Ricci sistema coordinato covariante (o controvariante) del fascio F .

Espressamente dedicata ad una trattazione della teoria delle superfici immerse nello spazio euclideo con i metodi offerti dal nuovo calcolo era [Ricci 1895]. Il primo capitolo trattava delle equazioni fondamentali della teoria delle superfici nelle quali il teorema di esistenza e unicità per le superfici regolari, già dimostrato in [Bonnet 1865], veniva riottenuto nel contesto del calcolo differenziale assoluto. Cruciale a tal fine, era la possibilità di scrivere in forma tensoriale le equazioni di Mainardi-Codazzi.

Consideriamo, seguendo la trattazione offerta da [Ricci 1895], una superficie S immersa nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$: siano y^1, y^2, y^3 le coordinate cartesiane ortogonali di un generico punto di $\mathbb{R}^3$ e denotiamo con x^1, x^2 le coordinate gaussiane di S la quale viene così ad essere descritta dalla parametrizzazione $y^k = y^k(x^1, x^2)$, $k = 1, 2, 3$.

Alla luce di queste posizioni, i coefficienti della prima forma fondamentale possono scriversi così: $a_{rs} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial y^k}{\partial x^r} \frac{\partial y^k}{\partial x^s}$. Per ottenere invece i coefficienti della seconda forma fondamentale, Ricci ricavò dapprima i coseni direttori della normale alla superficie:

$$(19) \quad \begin{cases} \zeta^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^1} \frac{\partial y^3}{\partial x^2} - \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \right), \\ \zeta^2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial y^3}{\partial x^1} \frac{\partial y^1}{\partial x^2} - \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \right), \\ \zeta^3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial y^2}{\partial x^2} - \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \right); \end{cases}$$

quindi definì le funzioni

$$(20) \quad b_{rs} \equiv \sum_{h=1}^3 \zeta^h D_s \frac{\partial y^h}{\partial x^r}, \quad r, s = 1, 2,$$

dove D_s denota la derivata covariante del tensore covariante $\frac{\partial y^h}{\partial x^s}$, essendo h un indice fissato – si noti che le y^h si comportano come scalari rispetto a trasformazioni delle coordinate gaussiane. Veniva introdotta in questo modo la seconda forma fondamentale, la quale, così come la prima, costituisce un sistema covariante simmetrico del secondo ordine.

Un vantaggio notevole che l'impiego del nuovo calcolo offriva era la possibilità di esprimere le equazioni di Mainardi-Codazzi in termini delle derivate covarianti di $\Psi = \sum_{r,s=1}^2 b_{rs} dx^r dx^s$. A questo proposito, è interessante osservare come l'introduzione della seconda forma fondamentale e la deduzione stessa delle equazioni di Mainardi-Codazzi fossero ottenute in maniera affatto indipendente dalla loro interpretazione geometrica, sulla scorta della teoria delle forme differenziali quadratiche di prima classe che Ricci aveva sviluppato in [Ricci 1884].

In effetti, è chiaro che le forme quadratiche atte a rappresentare la prima forma fondamentale di una superficie nello spazio euclideo sono esattamente le forme quadratiche che Ricci aveva denominato "forme di prima classe". D'altra parte non è difficile riconoscere che il tensore covariante definito in (7)

coincide, nel caso bidimensionale, con il tensore b_{rs} quale risulta definito in (20). In conseguenza di tale teoria, si ha che ogni forma differenziale $\phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ di classe 1 soddisfa alle condizioni seguenti: i) Indicati con R_{ijkl} i simboli di Riemann associati alla forma $\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j$ esiste un tensore simmetrico covariante tale che $R_{ijkl} = b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{kj}$; ii) il tensore $D_t(b_{rs}) =: b_{rst}$ è simmetrico nei suoi tre indici, in particolare: $b_{rts} = b_{rst}$. Nel caso di superfici bidimensionali, la condizione i) restituisce immediatamente la cosiddetta equazione di Gauss, se si nota che in questo caso la curvatura gaussiana G è esprimibile mediante un solo simbolo di Riemann (indipendente), ad esempio R_{1212} , cioè: $G = \frac{R_{1212}}{a}$. Infine la simmetria di

b_{rts} si traduce in due equazioni indipendenti nelle derivate dei coefficienti della seconda forma fondamentale che coincidono con le equazioni di Mainardi-Codazzi.

Sulla scorta di tale impostazione caratterizzata da un evidente orientamento analitico, Ricci affrontò la risoluzione di alcuni problemi della teoria della superficie e in particolare della applicabilità dimostrando, tra gli altri, un risultato del tutto nuovo che oggi va sotto il nome di teorema di immersione minimale:

Teorema 7.1 (Ricci 1895) *Si consideri una superficie astratta la cui metrica è data dalla forma quadratica $\Phi = \sum_{r,s=1}^2 a_{rs} dx^r dx^s$. La condizione necessaria e sufficiente affinché esista una superficie nello spazio euclideo che ha come prima forma fondamentale la forma Φ e curvatura media costante $c \in \mathbb{R}$ è che la curvatura gaussiana G di Φ soddisfi all'equazione:*

$$(21) \quad \Delta_2 \log(c^2 - G) = 4G;$$

dove con Δ_2 si è denotato l'operatore di Laplace-Beltrami la cui espressione è data in (10).

Negli anni successivi le ricerche in materia di varietà bidimensionali sarebbero confluite nella pubblicazione del ponderoso tomo [Ricci 1898] di lezioni sulla teoria delle superfici che rappresenta probabilmente il frutto più maturo e più ponderato dell'intera opera matematica di Ricci. Il particolare approccio alla teoria che Ricci aveva esplorato sino a quel punto fu in seguito ampliato nel contesto delle

ricerche che egli dedicò allo studio degli spazi riemanniani in più dimensioni. È interessante riflettere a questo proposito sul ruolo euristico che i suoi studi in materia di teoria delle superfici rivestirono nei successivi tentativi di generalizzazione al caso pluridimensionale: la nozione di fascio di congruenze e di sistema coordinato di un fascio così ampiamente utilizzata nel caso di varietà a due dimensioni, costituì il punto a partire dal quale Ricci prese le mosse per introdurre nozioni chiave della propria teoria degli iperspazi quali quella di n -pla ortogonale di riferimento e di coefficienti di rotazioni. ⁽³³⁾

8. – Premi Reali per la matematica, 1887, 1901

Per comprendere il processo di ricezione del calcolo assoluto da parte della comunità dei matematici italiani negli anni compresi fra la fine dell'Ottocento e gli inizi del Novecento, le vicende legate al Premio Reale per la Matematica degli anni 1887 e 1901 rivestono un'importanza particolare. ⁽³⁴⁾ Fu per iniziativa del Re Umberto I (figlio di Vittorio Emanuele II, primo Re d'Italia) che i Premi Reali (da conferirsi annualmente nell'ambito della fisica, della matematica, delle scienze naturali e delle scienze morali, storiche e filosofiche) furono istituiti nel 1878. Ricci partecipò due volte, nel 1887 e nel 1901, al bando del premio sottoponendo alla commissioni designate per il giudizio dei candidati un numero cospicuo di lavori della sua produzione scientifica. In entrambi i casi, i lavori delle commissioni si conclusero con la decisione di non conferire ad alcuno (né a Ricci né agli altri candidati) l'ambito riconoscimento. La lettura delle relazioni delle commissioni giudicatrici redatte da Beltrami (1887) e da Bianchi (1901) offre spunti preziosi di riflessione.

In occasione del premio Reale del 1887 Ricci aveva presentato le tre memorie: i) *Principii d'una teoria delle forme quadratiche differenziali* 1884, ii) *Sui parametri e gli invarianti delle forme diffe-*

⁽³³⁾ A questi temi, è dedicato il contributo di F. Cardin e R. Tazzioli, su questo numero della Rivista.

⁽³⁴⁾ Intorno al tema della ricezione del calcolo differenziale assoluto, rimandiamo alla trattazione ben più esaustiva contenuta in [Dellaglio 2004]; più specificatamente sui Premi Reali del 1887 e del 1901, si veda anche [Bottazzini 1999].

renziali quadratiche, iii) *Sui sistemi di integrali indipendenti d'una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali del primo ordine.*

Dopo una breve e tuttavia approfondita disamina del contenuto delle memorie, Beltrami esprimeva il proprio giudizio con le seguenti parole:

Dato così un rapido sguardo al contenuto delle Memorie presentate dal prof. Ricci, le quali costituiscono indubbiamente tre lavori di grande polso ed attestano forti e svariate cognizioni analitiche nel loro autore, è naturale il domandare se l'importanza e la fecondità dei risultati ottenuti sieno adeguate agli sforzi non lievi che si son dovuti fare da lui per giungere allo scopo, attraverso una lunga e non interrotta serie di laboriose trasformazioni, le quali rendono non poco penoso l'ufficio del lettore ed esigono da questo non solo un'attenzione molto sostenuta ma altresì una famigliare conoscenza di parecchi sussidi dell'alta analisi. Volendo rispondere a questa domanda sarebbe ingiusto il passare sotto silenzio un più recente scritto dell'autore (*Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nell'analisi applicata*, Padova 1888) nel quale egli mostra come i suoi procedimenti servano assai bene a stabilire, in coordinate generalissime, le formole fondamentali della teoria delle superficie, di quella dell'elasticità e di quella della propagazione del calore. [...]

E neppure è da passare sotto silenzio che le applicazioni in discorso non si spingono peranche fino a quel punto che avrebbe forse messo in più chiara luce l'utilità dei nuovi algoritmi. [...]

Dalle considerazioni che siamo venuti fin qui esponendo ci sembra poter concludere che i lavori del prof. Ricci, piuttosto che una somma di ultimi risultati definitivamente acquisiti ed immediatamente utilizzabili, rappresentino un poderoso sforzo che in parte apparisce già conducente ad una meta onorevole, in parte aspetta la sua giustificazione finale da ulteriori cimenti, nei quali forse il primitivo ed assai complesso apparato analitico potrà essere definitivamente surrogato da più semplici argomenti esecutivi. [Beltrami 1889, p. 306 sqq.]

Dunque, pur apprezzando l'ampio spettro di applicazioni che il nuovo calcolo sembrava prospettare, alcune delle quali si erano già concretizzate in [Ricci 1888], Beltrami lamentava una mancanza di completezza delle nuove tecniche in particolare sul fronte delle applicazioni. I vantaggi derivanti dall'impiego del calcolo in svariati ambiti della geometria e della fisica matematica non parevano ai suoi occhi giustificare l'introduzione del gravoso apparato analitico.

Negli anni successivi alla competizione del 1887, Ricci perseguì con tenacia gli obiettivi dell'ambizioso programma di ricerca sviluppando in maniera sistematica il proposito di riformulare la classica teoria delle superficie con gli strumenti del calcolo differenziale assoluto. Il progetto culminò nella pubblicazione del corposo volume di lezioni, [Ricci 1898], che costituì il contributo principale con il quale nuovamente Ricci partecipò alla competizione per l'assegnazione del Premio Reale del 1901.

In questa occasione fu Luigi Bianchi incaricato di stilare la relazione finale della commissione giudicatrice. Nuovamente si riaffacciava la critica già formulata da Beltrami che evidenziava la sproporzione degli strumenti analitici impiegati da Ricci rispetto alle efficacia nella produzione di nuovi risultati; si affiancava inoltre l'impressione che un tale apparato analitico avesse come effetto quello di offuscare l'intuitivo significato geometrico delle teorie.

In riferimento alle lezioni di Ricci, Bianchi scriveva:

In complesso questo libro del Ricci ci sembra degno di lode per l'unità di metodo che conferisce all'esposizione della teoria. Per altro ci sembra che la troppa preponderanza data alla parte algoritmica lasci bene spesso nell'ombra il contenuto essenziale geometrico e talora conduca ad enunciare come risultati speciali del calcolo proprietà geometricamente evidenti. [...]

Pur non volendo attribuire gran peso a varie mende che, dal punto di vista geometrico, abbiamo riscontrato nel libro, ci siamo domandati se queste fossero davvero compensate dalla maggior potenza e fecondità dimostrata dai nuovi metodi in confronto degli antichi. [...]

Ma per verità ci sembra che, nel campo della geometria infinitesimale delle superficie, i vantaggi inerenti ai nuovi algoritmi siano più che altro formali, o limitati a questioni secondarie; ed in questo giudizio ci conferma l'osservare che ai più recenti ed importanti progressi compiuti nel detto campo non hanno contribuito in modo significativo i nuovi metodi. [Bianchi 1904, p. 148]

I giudizi di Bianchi, che pure riconoscevano a Ricci il merito di aver ottenuto alcuni risultati originali, tra i quali spiccava il teorema di immersione minimale, se da un lato possono apparire in qualche modo severi e ingenerosi – alla luce soprattutto delle applicazioni che del calcolo assoluto fece Einstein a partire dal 1912-1913 – dall'altro riflettono la convinzione pro-

fonda più volte espressa da Bianchi secondo la quale l'efficacia dei metodi classici della geometria infinitesimale risalenti a Gauss non doveva in alcun modo essere messa in discussione.

La circostanza nella quale Bianchi si trovò a scrivere questi giudizi dovette in qualche modo inibire una maggiore schiettezza. Qualche anno più tardi l'occasione offerta dalla redazione del necrologio di Julius Weingarten, verso il quale Bianchi nutrì costante ammirazione, gli consentì di essere più esplicito e meno circospetto. Scrisse:

È bensì vero che più volte, e da molte parti, si è mossa a questi metodi di Gauss l'accusa di prolissità e di insufficienza, giungendo recentemente persino a meravigliarsi che con mezzi così inadeguati si sia giunti a scoprire tante importanti verità geometriche! Ma tali accuse non sembrano davvero giustificate, e non sarà inopportuno citare al proposito il giudizio del Nostro, che in una lettera del 1892 mi scriveva: "Ich bin ganz Ihrer Meinung dass die Gauss'schen Methoden die leichter vorwärts führenden sind, im Gegensatz zur Benutzung von Drehungen. Aber es ist auch nicht zu leugnen dass man mit diesen letzten Methoden schöne Erfolge erzielt hat, und dass man zufrieden sein kann, dass zwei geeignete Methoden über einander herlaufen. Eine unterstützt die andere".⁽³⁵⁾

E quanto dice il Weingarten del metodo del triedro mobile, parmi si possa ben ripetere, al più con eguale favore, di tutti gli altri fin qui escogitati, nessuno dei quali ha rivelato coll'effettivo successo una potenza superiore a quella dei metodi di Gauss. Vedano piuttosto i censori se non dimentichino troppo facilmente che l'importanza di una ricerca di geometria infinitesimale dipende ben più dalla profondità del pensiero geometrico che la informa, che non dalla veste analitica di cui l'autore, a seconda delle sue preferenze, si compiace di rivestirlo. [Bianchi 1910, p. 221]

La citazione dalla lettera di Weingarten si riferiva al metodo dei riferimenti mobili di Darboux al quale, se non altro, lo stesso Bianchi e Weingarten riconoscevano una qualche utilità di applicazione entro il campo degli sviluppi della geometria negli ultimi

⁽³⁵⁾ Sono completamente d'accordo con Lei sul fatto che i metodi gaussiani sono quelli che più facilmente conducono a passi in avanti, contrariamente all'uso delle rotazioni. Ma è anche innegabile che questi recenti metodi abbiano avuto successo, e che si possa essere soddisfatti che si disponga di due metodi efficienti. Uno è di supporto all'altro.

decenni. D'altro canto, non è difficile riconoscere nella frase successiva e nel caustico inciso "al più con eguale favore" un riferimento più o meno velato al calcolo differenziale assoluto.

Pur riconoscendo l'originalità di alcuni dei risultati che Ricci aveva conseguito entro l'ambito della teoria delle superfici, tra i quali venivano esplicitamente menzionati come "pregevoli aggiunte" "i criteri distintivi [...] per decidere della possibilità di deformare una superficie flessibile ed inestensibile in guisa che diventi di area minima, o a curvatura costante" (si tratta del teorema di immersione minimale), Bianchi riteneva che in generale i vantaggi offerti dal nuovo algoritmo fossero più che altro "formali o limitati a questioni secondarie" [Bianchi 1904, p. 148]. Inoltre, proseguiva, la preponderanza accordata da Ricci alla parte algoritmica appariva di gran lunga sproporzionata rispetto alla effettiva rilevanza dei risultati ottenuti, il contenuto geometrico dei quali veniva spesso lasciato nell'ombra.⁽³⁶⁾

Ben più benevolo fu l'atteggiamento di Bianchi nei confronti dell'impiego che Ricci aveva fatto del nuovo calcolo nel campo della geometria pluridimensionale. Tuttavia i risultati raggiunti non parevano sufficienti a meritare il conferimento del premio (che di fatto non venne attribuito a nessuno dei concorrenti).

Al di là dei giudizi nel merito circa la rilevanza dei nuovi apporti ottenuti da Ricci, lo scetticismo di Bianchi (certo non isolato nella comunità dei matematici⁽³⁷⁾) rifletteva la convinzione epistemologica profonda secondo la quale il progresso del sapere matematico consiste prevalentemente di acquisizioni di nuovi risultati e non tanto nella risistemazione e riorganizzazione di un corpo di dottrine già note. Ciò emerge chiaramente ad esempio nel passo seguente della relazione di Bianchi che appare come un invito

⁽³⁶⁾ In [Bianchi 1903, §349], è fatta una rapida menzione al teorema di immersione minimale di Ricci. Significativamente Bianchi evitava l'impiego dei metodi del calcolo assoluto preferendovi la possibilità, già sfruttata da Padova, di scrivere l'elemento lineare di una superficie (a curvatura media costante) in coordinate di curvatura che sono al contempo isoterme.

⁽³⁷⁾ Cinicamente, Bianchi non mancò di sottolineare che le idee di Ricci avevano avuto presa solo tra una ristretta cerchia di matematici; li definì "pochi seguaci" [Bianchi 1904, p. 150].

a badare alla sostanza dei risultati più che alla ricercatezza dei metodi impiegati:

Piuttosto che nella specialità degli algoritmi usati riconosciamo la vera sorgente delle scoperte, nel campo dell'ordinaria geometria infinitesimale, nella forza della intuizione geometrica, sussidiata da quel potente stromento [sic!] analitico, che ciascun ricercatore potrà foggare nell'una o nell'altra guisa a seconda delle preferenze od abitudini individuali, ma la cui forza è pur sempre unicamente quella che vi infusero i creatori del calcolo infinitesimale. [Bianchi 1904, p. 148]

Le posizioni epistemologiche che animarono le ricerche dello stesso Ricci furono di segno opposto: l'elaborazione di metodi e di tecniche uniformi insieme alla volontà di organizzare in maniera unitaria un'ampia mole di risultati in parte già noti era visto dal creatore del nuovo calcolo come un obiettivo prioritario delle proprie ricerche, fermo restando l'intento di esplorare nuovi interessanti risultati, che in effetti non mancarono.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [Beez 1874] R. BEEZ, Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höher Ordnung, *Mathematische Annalen*, 7, 387-395, 1874.
- [Beez 1875] R. BEEZ, Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 20, 1875.
- [Beez 1876] R. BEEZ, Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 21, 373-401, 1876.
- [Beltrami 1864-1865] E. BELTRAMI, Ricerche di analisi applicata alla geometria, *Giornale di Matematiche*, 2, 267-282, 297-306, 331-339, 355-375, 1864; 3, 15-22, 33-41, 82-91, 228-240, 311-314, 1865. Anche in *Opere Matematiche di Eugenio Beltrami*, Tomo Primo, 107-198, Hoepli, Milano 1902.
- [Beltrami 1868] E. BELTRAMI, Sulla teorica generale dei parametri differenziali, *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, Serie 2, 8, 551-590. Anche in *Opere Matematiche di Eugenio Beltrami*, Tomo Secondo, 74-118, Hoepli, Milano 1904.
- [Beltrami 1889] E. BELTRAMI, Relazione sul concorso al Premio Reale per la Matematica, *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, 5, 304-307, 1889.
- [Bianchi 1903] L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. 2, Spoerri, Pisa, 1903.
- [Bianchi 1904] L. BIANCHI, Relazione sul concorso al Premio Reale, del 1901, per la Matematica, in *Rendiconti delle adunanze solenni dell'Accademia dei Lincei*, 2, 142-151, 1904.
- [Bianchi 1910] L. BIANCHI, Vita ed opera scientifica di Julius Weingarten, in *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, vol. XIX, 470-477, 1910. Anche in L. Bianchi, *Opere*, Vol. I, parte seconda, 217-225. I riferimenti contenuti nell'articolo seguono la paginazione delle *Opere*.
- [Bottazzini 1999] U. BOTTAZZINI, Ricci and Levi-Civita: from differential invariants to general relativity, in *The Symbolic Universe*, ed. J. Gray, Oxford University Press, 241-259, 1999.
- [Bonnet 1865-1867] O. BONNET, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (première partie), *Journal de l'école Imperiale Polytechnique* 24, 209-230, 1865, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (deuxième partie), *Journal de l'école Imperiale Polytechnique*, 25, 1-151.
- [Casorati 1860-61] F. CASORATI, Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 3(1), 363-379, 1860, 4(1), 177-185, 1861.
- [Christoffel 1869] E. B. CHRISTOFFEL, Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70, 46-70, 1869.
- [Cogliati 2014] A. COGLIATI, Riemann's *Commentatio Mathematica*, a reassessment, *Revue d'histoire des mathématiques*, 20, 73-94, 2014.
- [Cogliati 2024] A. COGLIATI, Some remarks on the history of Ricci's absolute differential calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 78, 717-761, 2024.
- [Darboux 1878] G. DARBOUX, Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux, *Annales de l'école Normale*, 7(2), 101-150, 227-260, 275-348, 1878.
- [Darrigol 2015] O. DARRIGOL, The mystery of Riemann's curvature, *Historia Mathematica*, 42, 47-83, 2015.
- [Dell'Aglio 1996] L. DELL'AGLIO, On the genesis of the concept of covariant differentiation, *Revue d'histoire des mathématiques*, 2, 215-264, 1996.
- [Dell'Aglio 1997] L. DELL'AGLIO, Sul concetto di tensore in Ricci-Curbastro, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 17, 13-49, 1997.
- [Dell'Aglio 2004] L. DELL'AGLIO, Un case study nell'accettazione di teorie matematiche. Sviluppo e diffusione del calcolo differenziale assoluto in epoca pre-relativistica, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Anno XXIV, 2, 9-65, 2004.
- [Goodstein 2018] J. R. GOODSTEIN, Einstein's Italian Mathematicians; Ricci, Levi-Civita, and the Birth of General Relativity, AMS, 2018.
- [Killing 1885] W. KILLING, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in Analytischer Behandlung*, Teubner, Leipzig, 1885.
- [Levi-Civita 1917] T. LEVI-CIVITA, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 42, 173-215, 1917. Anche in [Levi-Civita Opere, IV, 1-39].
- [Levi-Civita 1925] T. LEVI-CIVITA, Commemorazione del socio nazionale prof. G. Ricci-Curbastro, *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, (6), 1, 555-564, 1925. [Levi-Civita Opere, IV, 391-402].
- [Levi-Civita Opere] *Opere matematiche. Memorie e note*, 6 voll., Bologna, Zanichelli, 1954-1973.
- [Liouville 1851] J. LIOUVILLE, Sur la théorie générale des surfaces, in *Journal des mathématiques pures et appliquées*, vol. 16, 130-132, 1851.
- [Lipschitz 1869] R. LIPSCHITZ, Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70, 71-102, 1869.
- [Lipschitz 1870] R. LIPSCHITZ, Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72, 1-56, 1870.
- [Mossotti 1845] O. F. MOSSOTTI, *Lezioni Elementari di Fisica Matematica*, Tomo I, Firenze, Piatti, 1845.

- [Reich 1994] K. REICH, *Die Entwicklung des Tensorkalküls. Vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie*, Springer, 1994.
- [Ricci 1877a] G. RICCI CURBASTRO, Sopra la deduzione d'una nuova legge fondamentale di elettrodinamica – *Giornale di Crelle*, vol. 82 – Sopra il modo d'agire delle forze pondero ed elettromotrici fra due conduttori filiformi – *Atti della Soc. di Storia Nat. delle Province Prussiane del Basso Reno*: per R. Clausius, *Il Nuovo Cimento*, Serie 3, I, 58-72, 89-106, 1877.
- [Ricci 1877b] G. RICCI CURBASTRO, Sulla teoria elettrodinamica di Maxwell, *Il Nuovo Cimento*, Serie 3, II, 5-27, 93-106, 1877.
- [Ricci 1884] G. RICCI CURBASTRO, Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche, *Annali di Matematiche* Serie 2, Tomo 12, 135-167, 1884. Anche in [Ricci 1956-57, I, 138-171].
- [Ricci 1886] G. RICCI CURBASTRO, Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali, *Annali di Matematica pura ed applicata*, Serie 2, 14, 1-11, 1886. Anche in [Ricci 1956-57].
- [Ricci 1887a] G. RICCI CURBASTRO, Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale, *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, Serie 4, 3, 15-18. Anche in [Ricci 1956-57, I, 199-122].
- [Ricci 1887b] G. RICCI CURBASTRO, Sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine, *Annali di Matematica pura ed applicata*, Serie 2, 15, 127-159, 1887. Anche in [Ricci 1956-57, I, 204-238].
- [Ricci 1888] G. RICCI CURBASTRO, *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso in Analisi applicata*, Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo centenario dell'Università di Bologna, 3, Padova, Tipografia del Seminario, 3-23, 1888. Anche in [Ricci 1956-57, I, 245-267].
- [Ricci 1892] G. RICCI CURBASTRO, Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique, *Bulletin des Sciences mathématiques*, Série 2, 16, 167-189, 1892. Anche in [Ricci 1956-57, I, 288-310].
- [Ricci 1893] G. RICCI CURBASTRO, Di alcune applicazioni del calcolo differenziale assoluto alla teoria delle forme differenziali quadratiche binarie, *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti* Serie VII, 4, 1336-1364. Anche in [Ricci 1956-57, I, 311-335].
- [Ricci 1895] G. RICCI CURBASTRO, Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di 2° grado, *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti*, (6) 7, 445-488, 1895.
- [Ricci 1898] G. RICCI CURBASTRO, *Lezioni sulla teoria delle superfici*, Fratelli Drucker, Verona-Padova, 1898. Un'edizione più recente è: *Lezioni sulla teoria delle superfici nell'opera di Ricci-Curbastro*, G. Esposito, L. Dell'Aglia editors, UMI, 2019.
- [Ricci, Levi-Civita] G. RICCI CURBASTRO, T. LEVI-CIVITA, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, *Mathematische Annalen*, 54, 125-201, 1901.
- [Ricci 1956-57] G. RICCI CURBASTRO, *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese, Roma, 1956-57.
- [Riemann 1857] B. RIEMANN, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen, in *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. VII, 3-22. Anche in Weber (Heinrich), ed., *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, Teubner, 1876, 62-78.
- [Riemann 1868] B. RIEMANN, Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, in *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. XIII, 133-150, 1868.
- [Riemann 1876] B. RIEMANN, Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill.ma Academia Parisiensi propositae (1861), in Weber (Heinrich), ed., *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, Teubner, 1876, 370-383.
- [Schur 1887] F. SCHUR, Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume, *Mathematische Annalen*, 28, 343-353, 1887.
- [Schläfli 1871-73] L. SCHLÄFLI, Nota alla Memoria del Sig. Beltrami, Sugli spazi di curvatura costante, *Annali di Matematica pura e applicata*, Serie 2, 5, 178-193, 1871-1873.
- [Smith 1877] S. SMITH, Sur l'équations modulaires, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (3) 1, 68-69, 1877.
- [Spivak 1999] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume 1, Third Edition, Publish or Perish, Houston, 1999.
- [Thomé 1872a] L. W. THOMÉ, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 193-218, 74, 1872.
- [Thomé 1872b] L. W. THOMÉ, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 265-291, 75, 1872.
- [Thomé 1873] L. W. THOMÉ, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 273-291, 76, 1873.
- [Tonolo 1954] A. TONOLO, Commemorazione di Gregorio Ricci-Curbastro nel primo centenario dalla nascita, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 23, 1-24, 1954.
- [Tonolo 1961] A. TONOLO, Sulle origini del Calcolo di Ricci, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 53, 189-207, 1961.



Alberto Cogliati

Alberto Cogliati è professore ordinario di Storia della Matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Padova. I suoi interessi di ricerca vertono principalmente sulla storia della geometria differenziale fra Settecento e Novecento. Tra le sue pubblicazioni più recenti, la monografia: *La geometria non euclidea: una breve storia dall'Antichità a Poincaré*, Carocci 2024.

