
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALESSANDRO CARLOTTO

L'eredità di Gregorio Ricci-Curbastro nella matematica contemporanea

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 10 (2025), n.2, p. 107–120.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_2_107_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_2_107_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

L'eredità di Gregorio Ricci-Curbastro nella matematica contemporanea

ALESSANDRO CARLOTTO

Università di Trento

E-mail: alessandro.carlotto@unitn.it

Sommario: *Che cosa resta oggi dell'opera di Gregorio Ricci-Curbastro? In questo articolo proverò a tratteggiare l'impatto delle nozioni da lui introdotte e degli strumenti matematici su cui queste si fondano, con particolare riguardo a vari recenti sviluppi nell'analisi geometrica.*

Abstract: *What is the mathematical legacy of Gregorio Ricci-Curbastro? In this article I will try to outline the actual impact of the notions he introduced and of the tools they rely upon, with special emphasis on various recent developments in geometric analysis.*

Lo studioso che si accosti alle nozioni di base della geometria differenziale, oltre la descrizione di curve e superfici nello spazio euclideo, si imbatte quasi da subito in vari oggetti recanti i nomi di matematici di origine italiana: la connessione di Levi-Civita, il tensore di Ricci, le identità di Bianchi, l'operatore di Laplace-Beltrami e così via. Questa nomenclatura rende conto di un'epoca, tra la fine del secolo diciannovesimo e l'inizio del successivo, nella quale l'Italia (di allora) fu – per tutta una serie di ragioni – tra i centri principali della ricerca matematica in questo ambito.

Una delle figure più influenti di questa stagione fu appunto Gregorio Ricci-Curbastro, del quale cade quest'anno il centenario della morte. Assieme al suo allievo prediletto, Tullio Levi-Civita, egli contribuì a porre le basi di quello che (con terminologia oggi obsoleta) si soleva definire *calcolo differenziale assoluto*, ovvero un calcolo differenziale che, pur compiendosi nelle carte locali di una varietà, esibisca proprietà di covarianza tali da renderne i risultati, qualora opportunamente scritti ed intesi, indipenden-

ti dalla scelta delle coordinate. Vedremo in seguito un semplice esempio che ben illustra questo fenomeno.

Con questo articolo desidero rendere esiguo, quasi tacito omaggio alla memoria di Ricci-Curbastro tratteggiando l'impatto che le nozioni da lui introdotte hanno avuto nel contesto della matematica contemporanea, e in particolare in quell'ambito – particolarmente fiorente al giorno d'oggi – che chiamiamo analisi geometrica. Il lettore potrà trovare negli articoli di Cogliati, e di Cardin e Tazzioli una ricostruzione storica più dettagliata dei suoi contributi allo sviluppo del calcolo differenziale assoluto e, rispettivamente, del legame di questo con le origini della teoria della relatività generale.

1. – Dal calcolo differenziale assoluto al tensore di Riemann

Con molto senno di poi, ed in termini necessariamente informali, partiamo dalla seguente questione. Sia data una varietà differenziabile (qui intesa liscia, cioè di classe C^∞) M , di dimensione $n \geq 1$, e sia $\mathbb{U} = \cup_\alpha (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un suo atlante. Intendiamo così dire che M è un insieme che porta con sé un ricoprimento tramite domini ciascuno dei quali sia in corrispon-

Accettato: 10 giugno 2025.

denza biunivoca con un aperto di $\mathbb{R}^n$ (formalmente $M \supset U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$), in modo tale che le corrispondenti funzioni di transizione $\varphi_{\alpha'} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ siano tutte funzioni lisce nel senso usuale. Questo è un modo per codificare la nozione intuitiva di uno spazio che localmente, ovvero intorno ad ogni dato punto, sia “equivalente” allo spazio euclideo standard della corrispondente dimensione, lasciando tuttavia una grande libertà sulla forma globale dello stesso. Una coppia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ si chiamerà *carta* dell’atlante in questione, e la precedente richiesta circa le funzioni di transizione pertiene appunto il trasferimento “coerente” di nozioni tra carte diverse che ricoprono una stessa regione di M : è da queste sovrapposizioni che nasce, come vedremo tra poco, il problema fondazionale cui Ricci dedicò una parte significativa dei suoi studi.

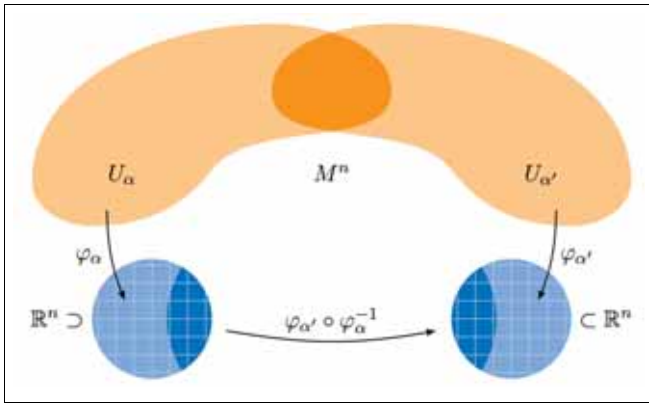


FIGURA 1 – Carte di un atlante, e funzione di transizione associata.

Ora, il dato di un atlante consente di definire quella che si chiama *struttura differenziale* su M , e quindi di chiarire univocamente cosa si intenda dicendo che una certa funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è liscia: richiederemo, semplicemente, che tutte le composizioni $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ lo siano. Volendo considerare una domanda semplice ma per certi versi paradigmatica, come possiamo concretamente definire il differenziale df di una tale f ? In modo molto pragmatico ed ingenuo, possiamo prendere una carta (U, φ) e, indicando – con conveniente abuso di notazione – $f(x)$ invece di $f(\varphi(x))$ per $x \in \Omega = \varphi(U)$, scrivere semplicemente (come si farebbe in un secondo corso di analisi matematica)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

(qui e nel seguito di questo articolo saranno sempre tacitamente intese le operazioni di somma sugli indici ripetuti). Tuttavia, ci si rende subito conto che questa espressione dipende totalmente dalla scelta della carta considerata e dunque non si capisce in che senso si possa intendere df come una nozione, appunto, “assoluta”. Il fatto è che, a ben vedere, non possiamo aspettarci (ad esempio) di attribuire un significato assoluto ai coefficienti di questa forma differenziale; invece l’unico modo di pensare ad una 1-forma è tramite la sua azione su campi vettoriali di M , ed è alla buona positura di questa nozione che si deve puntare. Dato un campo vettoriale V che si esprima, nella stessa carta di cui sopra, come $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ si ha (per linearità) che $df(V) = V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Se ora consideriamo una diversa

carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ ed indichiamo con $\{\tilde{x}\}$ le coordinate corrispondenti, si ha che le regole del calcolo differenziale negli spazi euclidei (nello specifico: la *chain rule*) ci indicano il modo in cui possiamo scrivere le espressioni di df e V

$$df = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i,$$

$$V = \tilde{V}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = V^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}$$

ove, coerentemente con l’abuso notazionale sopra dichiarato, abbiamo considerato le mappe $x = x(\tilde{x})$ e $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$ intendendo le composizioni $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ e $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ rispettivamente. A questo punto, vediamo che le regole di trasformazione per campi vettoriali ed 1-forme si “compensano” e consentono di mostrare che la quantità $df(V)$, valutata in un qualunque punto della nostra varietà, è indipendente dalla carta scelta (ovvero dalla scelta di coordinate). Infatti, dalle due equazioni precedenti si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} \tilde{V}^i = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} V^\ell \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\ell} = \frac{\partial f}{\partial x^j} V^j$$

avendo, all’ultimo passaggio, sfruttato il fatto che (quasi tautologicamente)

$$\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\ell} = \delta_\ell^j,$$

trattandosi appunto del prodotto della matrice jacobiana dell'applicazione $x \mapsto \tilde{x} = \tilde{x}(x)$, vale a dire di $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, per la sua inversa.

Partendo da qui e guidati – per così dire – dalle regole del calcolo differenziale, si possono definire *campi tensoriali* di tipo arbitrario; con un certo grado di astrazione si può poi sviluppare la teoria dei fibrati vettoriali su varietà (parafrasando le regole di trasformazione nella forma di regole di “incollamento” di banalizzazioni locali degli stessi) arrivando infine a definire i campi tensoriali di un certo tipo (mettiamo, ad esempio, i campi vettoriali) come sezioni di un corrispondente fibrato (nel caso dei campi il *fibrato tangente*).

Giunti a questo punto, il successivo passo concettuale sta nella definizione di un'opportuna nozione di *derivazione* su varietà, intendendo nello specifico il problema di come si possa misurare la variazione infinitesimale di un campo vettoriale (diciamo W) lungo le linee integrali generate da un altro campo assegnato (diciamo V). Qui emerge un problema fondazionale che per certi versi può risultare sorprendente: il solo requisito di produrre, come risultato di quest'operazione, un campo vettoriale non identifica univocamente l'operazione in questione. Vi sono infatti, a seconda degli ulteriori requisiti che si impongano, molte diverse definizioni possibili, corrispondenti ad altrettante nozioni di *connessione*. Quella in un certo senso più restrittiva (e rilevante rispetto a questa presentazione) è quella di connessione di Levi-Civita (o connessione riemanniana). Data sulla nostra varietà M una metrica riemanniana g (ovvero: una nozione di lunghezza dei vettori tangenti e quindi delle curve) questa si può definire in coordinate locali richiedendo che valga

$$D_V W = V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + V^i W^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

ove

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

sono i cosiddetti *simboli di Christoffel* della metrica g . Diremo che $D_V W$ è la *derivata covariante* di W lungo V . Nel caso, a tutti familiare, della metrica euclidea questi numeri Γ_{ij}^k sono tutti identicamente nulli e quindi la derivazione $D_V W$ avviene compo-

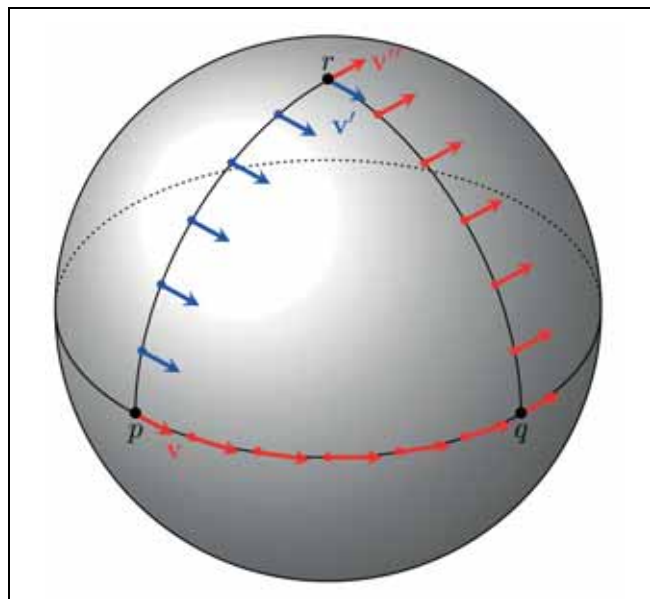


FIGURA 2 – Trasporto parallelo su varietà, e non-commutatività di questa operazione (qui nel caso della sfera). Considerando il triangolo geodetico in figura (corrispondente ad un ottante della sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$) possiamo eseguire il trasporto parallelo del vettore $\mathbf{v} \in T_p M$ o lungo l'arco $\widehat{pr}$, nel qual caso otteniamo $\mathbf{v}'$, o lungo gli archi $\widehat{pq}$ e poi $\widehat{qr}$, ottenendo infine il vettore $\mathbf{v}''$ (palesamente diverso da $\mathbf{v}'$, anzi in questo caso ad esso ortogonale).

nente per componente nel modo consueto, ma in generale questi termini correttivi hanno un ruolo fondamentale nel codificare i concetti di *geodetica* e *trasporto parallelo* su una varietà riemanniana (cf. Figura 2).

Formalmente, diremo che una curva $\sigma : I \rightarrow M$ è una geodetica se soddisfa $D_{\sigma'} \sigma' = 0$ (lavorando in coordinate locali si tratta di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine). Proprio come nel caso delle rette nel piano, le geodetiche sono quelle curve speciali su varietà che hanno la proprietà di minimizzare la lunghezza tra due qualunque loro punti (a patto che questi non siano troppo lontani). In maniera analoga, data una qualsivoglia curva σ ed un vettore $\mathbf{v} \in T_p M$ (ove sia $p = \sigma(0)$), il trasporto parallelo di $\mathbf{v}$ lungo σ è il campo vettoriale V che soddisfi, in ogni punto di tale curva, il sistema (del primo ordine nelle coordinate locali di V)

$$\begin{cases} D_{\sigma'} V = 0 \\ V(0) = \mathbf{v}. \end{cases}$$

La cosa interessante è che la nozione di trasporto parallelo consente essa stessa di ricostruire univo-

camente la connessione riemanniana D nel modo che segue. Indicata con $\tau_{\sigma(t)} : T_{\sigma(0)}M \rightarrow T_{\sigma(t)}M$ la mappa di trasporto parallelo lungo σ (per ogni $t \in I$) ed osservato che si tratta di un isomorfismo lineare, si ha, a posteriori, che vale per ogni campo vettoriale V

$$D_{\sigma'(0)}V = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_{\sigma(t)}^{-1}V(t) - V(0)}{t}.$$

Data quindi una nozione intuitiva, quand'anche imprecisa, di trasporto parallelo, ai fini di quest'articolo potremo pensare all'equazione precedente come ad una definizione di connessione riemanniana ovvero, equivalentemente, di derivazione covariante.

Quest'ultimo punto di vista si rivela particolarmente utile qualora si intenda fare un passo ulteriore, arrivando a definire il fondamentale concetto di curvatura. Vi sono almeno quattro prospettive (essenzialmente diverse, ma equivalenti) da cui si può presentare questa nozione, e vale la pena di richiamarle tutte, pur se brevemente.

In prima battuta la definizione di *tensore di curvatura* (o *tensore di Riemann*) R di una varietà riemanniana (M, g) ha a che vedere con la "non-commutatività delle derivate seconde" rispetto alla nozione di derivazione associata alla connessione di Levi-Civita, e si formula ponendo

$$R(X, Y, Z, W) = -g(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z, W) \quad (1)$$

che si può appunto anche riscrivere come

$$R(X, Y, Z, W) = -g((D_{X, Y}^2 - D_{Y, X}^2)Z, W)$$

a patto di ricordare che $D_{X, Y}^2 Z = D_X D_Y Z - D_{D_X Y} Z$ (questa è la definizione di *derivata covariante seconda*), e che la connessione riemanniana è legata all'operazione di bracket di Lie $[\cdot, \cdot]$ dall'identità $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ per due qualsiasi campi vettoriali X ed Y sulla nostra varietà.

In secondo luogo, possiamo pensare alla collezione di numeri R_{ijkl} (che si ottengono esprimendo il tensore suddetto in coordinate locali) come ad una sorta di ostruzioni alla trasformazione, tramite cambio di coordinate, di una data forma quadratica definita positiva (cioè della metrica riemanniana) nella metrica euclidea standard. Tale prospettiva, ovvero quella degli *invarianti differenziali* è in

effetti molto presente negli scritti di Ricci-Curbastro (come si evince dalla raccolta delle sue opere [38, 39] e dal posteriore trattato di Levi-Civita [25]), come del resto in quelli di molti dei suoi più eminenti contemporanei (Christoffel, Lipschitz, Schouten ...); si vedano a tal proposito il recente articolo [16] e i riferimenti bibliografici in esso specificati.

In termini di trasporto parallelo, dati due campi vettoriali X, Y (che per comodità assumeremo soddisfare la condizione $[X, Y] = 0$), e denotata qui con τ_{sX} la mappa di trasporto parallelo lungo le linee integrali di X per un tempo s (e similmente τ_{tY} la mappa di trasporto parallelo lungo le linee integrali di Y per un tempo t) si può dimostrare in effetti che

$$\left[\frac{d^2}{dsdt} \right]_{s=t=0} \tau_{sX}^{-1} \tau_{tY}^{-1} \tau_{sX} \tau_{tY} Z = -R(X, Y)Z$$

laddove $g(R(X, Y)Z, W) = R(X, Y, Z, W)$ per ogni data quaterna di campi vettoriali⁽¹⁾. Quest'ultima equazione codifica appunto l'idea intuitiva di curvatura come ad una misura dell'effetto (non banale) del trasporto parallelo lungo cammini chiusi. Un esperimento interessante è testare questa equazione, ad esempio, su un ipotetico circuito disegnato sulla superficie della Terra e bordato da due paralleli e due archi di meridiani, partendo da un punto sull'equatore ove si ponga $Z = (0, 0, 1)$.

Per quanto segue, ci interessa tuttavia soffermarci soprattutto sul significato geometrico di certe componenti del tensore di Riemann, e veniamo così alla quarta ed ultima prospettiva. Per dare adeguata motivazione alla definizione che stiamo per dare, facciamo prima un passo indietro. Il lettore ricorderà che la curvatura (intrinseca) di una superficie (ovvero di una varietà di dimensione 2) è descritta essenzialmente da un'unica funzione, che si chiama *curvatura di Gauss*: il famoso *theorem egregium* garantisce appunto che tale funzione, che nei primi corsi di geometria differenziale si definisce in termini delle curvature principali (cioè degli autovalori della seconda forma fondamentale della superficie in questione), non dipende in realtà dal modo in cui la superficie in questione è immersa nello spazio eu-

⁽¹⁾ In altri termini $R(X, Y)Z$ è il tensore di tipo $(1, 3)$ naturalmente associato al tensore di Riemann, come sopra definito dalla (1).

clideo (o in un qualunque spazio ambiente) ma solo dalla metrica riemanniana indotta sulla superficie, quindi dal modo in cui si misura la lunghezza delle curve su di essa. Dunque, data una varietà (M, g) – ora di dimensione qualunque – considerato un punto $p \in M$ ed un 2-piano $\pi \subset T_p M$ possiamo considerare quella porzione di superficie che si ottiene, in M , come immagine delle geodetiche radiali corrispondenti alle condizioni iniziali

$$\sigma(0) = p, \quad \sigma'(0) = \mathbf{v} \in \pi \subset T_p M.$$

(La mappa $T_p M \ni v \mapsto \sigma(1) \in M$ si chiama *mappa esponenziale* basata in $p \in M$, e si suole scrivere $\exp_p(\cdot) : T_p M \rightarrow M$ per riferirsi a tale applicazione, almeno per quel sottoinsieme del suo dominio ove essa è ben definita.) Si mostra che, al variare di $\mathbf{v} \in \pi$ con $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 1$ l'immagine di queste curve forma, in M , una superficie regolare (liscia) nell'intorno di p la cui curvatura di Gauss è uguale, in quello stesso punto, al numero $R(E_1, E_2, E_1, E_2)$ (a priori definito dalla (1), quindi in tutt'altra maniera) per una qualsivoglia coppia di vettori $E_1, E_2 \in \pi \subset T_p M$, assunti unitari e tra loro ortogonali. Tale numero si chiama *curvatura sezionale* del piano π . Il tensore di Riemann contiene dunque in sé le informazioni relative a tutte le possibili superfici che si possono generare in questa maniera, cioè variando la scelta del piano $\pi \subset T_p M$ (e possibilmente spostando poi anche il punto $p \in M$).

2. – Curvatura di Ricci: definizione e caratterizzazione locale

In uno dei suoi articoli più celebri [37], Ricci-Curbastro focalizza la sua attenzione sulla quantità

$$\text{Ric}(V, V) = R(V, E_i, V, E_i)$$

ove $V \in T_p M$ è un dato vettore unitario, e $\{E_1, E_2, E_3, \dots, E_n\}$ è una qualunque base ortonormale dello spazio tangente ad M nel punto p considerato. Questo numero, che egli chiama – per evidente analogia con la geometria estrinseca delle sottovarietà – *curvatura media* di M nella direzione V , si può descrivere come segue: qualora si consideri (senza perdita di generalità) una base per cui $V = E_1$ esso è – tenuto conto di quanto detto nell'ultimo paragrafo della sezione precedente – la somma delle curvature

sezionali dei piani bidimensionali generati da V e da un secondo vettore che vari in una base ortonormale del complemento ortogonale della linea $\langle V \rangle$.

Come suggerito dalla notazione già adoperata sopra, queste non sono altro che certe componenti del tensore che oggi porta – per universale attribuzione – il nome di Ricci e che si ottiene più in generale come traccia del tensore di Riemann:

$$\text{Ric}(V, W) = R(V, E_i, W, E_i),$$

ove $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ sia nuovamente una qualsiasi base ortonormale locale.

Tramite questa operazione algebrica di traccia si ottiene appunto un tensore dello stesso tipo della metrica (ovvero un tensore di tipo $(0, 2)$) a cui – come immediatamente osservato dallo stesso Ricci – è naturalmente associata una forma quadratica che, per fatti ben noti dell'algebra lineare, si può diagonalizzare simultaneamente alla metrica stessa: si ottengono così quelle che egli chiama le *direzioni principali* della varietà (M, g) nel punto considerato, assieme ai corrispondenti autovalori a cui si dà invece il nome di *curvature principali*. Questa terminologia va appunto intesa, come già osservato, in evidente analogia con la teoria delle superfici in $\mathbb{R}^3$.

Vediamo, seguendo ancora l'esposizione del Ricci, alcuni casi particolari. Nel caso in cui M sia una superficie si verifica facilmente che $\text{Ric} = Kg$, quindi tutte le direzioni sono principali e le curvature principali sono tutte eguali al valore della curvatura di Gauss nel punto considerato. Qualora invece la dimensione di M sia almeno 3, queste conclusioni cessano di essere vere; tuttavia nel caso particolare in cui la dimensione della varietà sia esattamente

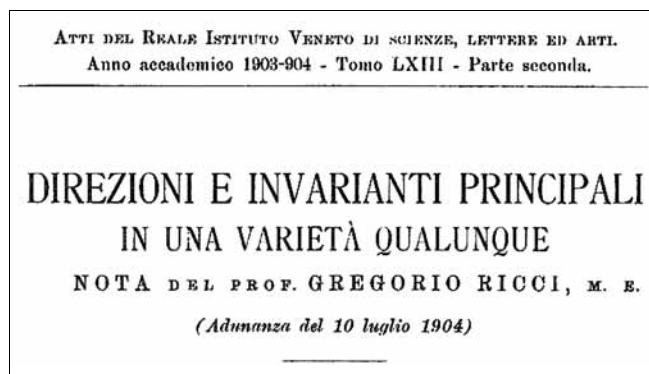


FIGURA 3 – Frontespizio dell'articolo, risalente al 1904, dedicato dal Ricci allo studio del tensore che oggi porta il suo nome.

uguale a 3, le informazioni contenute nel tensore di Riemann si possono (in ragione delle simmetrie dello stesso) tutte recuperare dalla conoscenza delle tre sole curvatures principali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Esplicitamente, considerando le curvatures sezionali $R_{1212} = R(E_1, E_2, E_1, E_2)$, $R_{1313} = R(E_1, E_3, E_1, E_3)$, $R_{2323} = R(E_2, E_3, E_2, E_3)$ associate ad una base principale $\{E_1, E_2, E_3\}$ (nel senso di cui sopra) si ha che:

$$\begin{cases} R_{1212} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \\ R_{1313} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2) \\ R_{2323} = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1) \end{cases}$$

ed inoltre $R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}$ si possono ricavare da queste (è un fatto generale che il tensore di Riemann sia univocamente determinato dalle curvatures sezionali tramite una formula di polarizzazione); tutte le altre componenti del tensore di Riemann sono identicamente nulle o eguali (a meno di segno) a una delle precedenti.

Vi è un altro modo di pensare il tensore di Ricci, meno algebrico si potrebbe dire, e che in qualche senso fornisce un'ulteriore giustificazione della sua rilevanza. È ben noto che, nell'intorno di ogni dato punto p della nostra varietà M possiamo scegliere un sistema di coordinate privilegiate dette *coordinate normali* che si ottengono essenzialmente trasferendo, tramite la mappa esponenziale $\exp_p(\cdot)$, le naturali coordinate $\{x\}$ sullo spazio tangente $T_p M$ rispetto ad una fissata base ortonormale dello stesso. In tali coordinate la metrica (quale che sia) assume la forma $g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^2)$ ovvero coincide con la metrica euclidea a meno di un errore di ordine quadratico; più precisamente si può verificare che in effetti $g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikj\ell}x^k x^\ell + O(|x|^3)$. Se ora esprimiamo la misura di volume ⁽²⁾ μ_g di (M, g) localmente rispetto a tali coordinate si dimostra che vale

$$(2) \quad d\mu_g = \left[1 - \frac{1}{6} \text{Ric}_{jk} x^j x^k \right] d\mu_\delta$$

⁽²⁾ In questo contesto, μ_g si può definire come la misura di Hausdorff n -dimensionale associata alla distanza dei cammini d_g determinata dalla metrica riemanniana g su M .

quindi il tensore Ric fornisce una misura della distorsione dei volumi: ad esempio, una varietà con tensore di Ricci positivo ha, per ogni raggio (piccolo) fissato, volume inferiore rispetto ad una palla euclidea avente il medesimo raggio.

Concludiamo questa sezione menzionando una proprietà del tensore di Ricci che si rivelò di fondamentale importanza nella formulazione delle equazioni di campo di Einstein della relatività generale. Qualora si calcoli la cosiddetta divergenza covariante ⁽³⁾ del suddetto tensore vale l'identità (impropriamente nota come *seconda identità di Bianchi*) ⁽⁴⁾

$$(3) \quad \text{div}(\text{Ric}) = \frac{1}{2} d(\text{Scal})$$

ove Scal è la curvatura scalare della varietà (M, g) ovvero la traccia del tensore di Ricci. Ne segue immediatamente che la divergenza del tensore

$G = \text{Ric} - \frac{1}{2} \text{Scal} g$ è identicamente nulla, il che fu

un fattore determinante nel suggerire a Einstein di collegare questo tensore (che ora porta il suo nome) al *tensore di energia-impulso* (traduzione imprecisa dell'inglese *stress-energy tensor*), la cui analoga proprietà codifica una ben nota legge di conservazione.

3. – Alcuni teoremi classici inerenti la curvatura di Ricci

Ma che tipo di contenuto geometrico ha la curvatura di Ricci? Un modo naturale per cercare di risponde-

⁽³⁾ Dato un tensore T di tipo $(0, 2)$, la sua divergenza covariante è un tensore di tipo $(0, 1)$, vale a dire quella 1-forma definita dall'equazione

$$\text{div}(T) = D_{E_i} T(\cdot, E_i)$$

ove $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ sia una qualunque base ortonormale locale nell'intorno di un punto considerato. Ovviamente è qui intesa la somma sull'indice ripetuto, e si mostra che la definizione è ben posta ovvero indipendente dalla base considerata.

⁽⁴⁾ Nel suo importante trattato [25], Levi-Civita sostiene che le identità di Bianchi fossero in verità state scoperte da Ricci stesso intorno al 1889; d'altro canto esse sono già presenti – almeno nella loro forma contratta (ovvero l'equazione (3)) – nell'articolo di Voss [50] risalente al 1880.)

re a questa domanda è indagare quali restrizioni (topologiche e, appunto, geometriche) imponga su una data varietà connessa e completa (M, g) l'assunzione che la sua curvatura di Ricci sia (uniformemente) positiva, ovvero che valga in tutti i punti

$$(4) \quad \text{Ric} \geq \frac{n-1}{\Lambda^2} g$$

nel senso del confronto tra forme quadratiche, per una qualche costante $\Lambda > 0$; qui la normalizzazione del membro di destra dipende dal fatto che lo spazio modello naturale, ovvero la sfera $S^n(\Lambda)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ di raggio Λ , soddisfa – essendo uno spazio a curvatura sezionale costante ed eguale a Λ^{-1} – l'uguaglianza nella formula (4).

Una prima risposta a questa domanda ci viene fornita dal teorema di Bonnet-Myers: in ragione della disuguaglianza (4) necessariamente (M, g) dev'essere una varietà compatta e il suo diametro dev'essere limitato dall'alto da $\pi\Lambda$; in particolare, segue immediatamente (dato che la medesima condizione di curvatura sarà soddisfatta anche da un qualunque rivestimento riemanniano della varietà data) che il gruppo fondamentale di M è finito. Per esempio, un immediato corollario di questo asserto è l'impossibilità di costruire metriche a curvatura di Ricci positiva su varietà della forma $N \times S^1$, laddove N denoti una qualsiasi varietà compatta (e senza bordo). In effetti, se M è una superficie il teorema di Gauss-Bonnet ci consente – dopo aver mostrato la compattezza di M – di concludere inoltre che M deve avere caratteristica di Eulero positiva e quindi potrà essere solo una sfera oppure un piano proiettivo reale (nel caso non orientabile). Cercare di ottenere un'analoga conclusione nel caso di varietà di dimensione 3 è una delle motivazioni centrali per l'introduzione da parte di Hamilton [23] del cosiddetto *flusso di Ricci*, di cui diremo nella prossima sezione.

Vi è poi una diversa maniera, perfezionata da Schoen e Yau nella loro dimostrazione del *teorema di massa positiva* [41] e nello studio delle varietà a curvatura *scalare* positiva [40, 42], per estrarre informazioni topologiche dall'ipotesi che una certa varietà M sia *topologically Ricci positive* (ovvero che supporti metriche a curvatura di Ricci positiva, nel senso definito dalla condizione (4)). Essenzialmente si tratta di guardare non alle geodetiche (oggetti di dimensione 1), come nella dimostrazione del teorema

di Bonnet-Myers, ma alle *ipersuperfici minime* (oggetti di co-dimensione 1). Si può infatti dimostrare che ogni tale varietà, diciamo di dimensione $n \geq 3$ ed assunta per semplicità orientabile, deve necessariamente soddisfare la condizione omologica $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) = 0$. Lo strumento chiave per giungere a questa conclusione è la *disuguaglianza di stabilità*: ogni ipersuperficie (assunta compatta, connessa, con fibrato normale banale⁽⁵⁾) che minimizzi l'area nella sua classe di omologia è necessariamente liscia⁽⁶⁾ per $n < 8$ ed inoltre è stabile, ovvero soddisfa, per ogni $u \in C^1(\Sigma; \mathbb{R})$, la disuguaglianza

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u|^2 d\mu_{\Sigma, g} \geq \int_{\Sigma} (|A|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) u^2 d\mu_{\Sigma, g}$$

ove $|A|^2$ denota il quadrato della norma della seconda forma fondamentale di Σ , ν è un vettore normale di lunghezza unitaria (definito globalmente su Σ) e $\mu_{\Sigma, g}$ è la misura di volume indotta su Σ dalla metrica g . Scegliendo la funzione $u \equiv 1$ nella formula precedente se ne ricava che necessariamente $\text{Ric}(\nu, \nu) \leq 0$ in almeno un punto di Σ .

Da ciò si evince che la condizione $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ non è compatibile con l'esistenza di metriche su M a curvatura di Ricci positiva, dato che – seguendo lo schema logico appena descritto – minimizzando il funzionale d'area in una classe di omologia $(n-1)$ -dimensionale non banale si raggiunge immediatamente una contraddizione.

In effetti, una conclusione di questo tipo (in verità leggermente più debole) si può ottenere anche con un metodo completamente diverso, che trae le sue origini nell'importante articolo [9] di Bochner (si vedano [52] e la ben più recente monografia [51] per esposizioni sistematiche di questa tecnica) e che tutt'oggi continua ad essere foriero di importanti risultati in geometria riemanniana [35]. In particolare, Bochner dimostra che ogni 1-forma ω armonica

⁽⁵⁾ In una varietà ambiente orientabile, questo avviene se e solo se l'ipersuperficie in questione è orientabile.

⁽⁶⁾ Nota tecnica: per $n \geq 8$ le ipersuperfici minimizzanti il funzionale area in una classe di omologia (così come, del resto, le soluzioni del problema di Plateau, che minimizzano l'area a bordo fissato) non sono necessariamente lisce ma possono esibire un insieme singolare; la discussione di questo problema, e del suo legame con i molti recentissimi risultati di *generica regolarità*, va ben oltre gli scopi di questo contributo.

definita su una qualsiasi varietà riemanniana (M, g) soddisfa l'identità

$$-\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + \text{Ric}(\omega^\#, \omega^\#)$$

dove $\omega^\#$ indica il campo vettoriale univocamente associato per dualità, rispetto alla metrica g , alla forma ω (vale a dire che $g(\omega^\#, W) = \omega(W)$ per ogni campo vettoriale W su M). Combinando infatti l'equazione precedente col teorema della divergenza, segue subito che ogni varietà riemanniana compatta e senza bordo, qualora abbia curvatura di Ricci non negativa (ovvero: per cui valga $\text{Ric} \geq 0$) e positiva almeno in un punto, non può supportare alcuna 1-forma armonica che non sia identicamente nulla. Quindi una varietà *topologically Ricci positive* deve avere il primo numero di Betti ⁽⁷⁾ nullo, cioè $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$. Notiamo anche, incidentalmente, che un piccolo raffinamento di questo argomento consente di concludere che ogni varietà (M, g) con $\text{Ric} \geq 0$ soddisfa la notevole disuguaglianza $b_1(M) \leq \dim M$ (si osservi che per i tori n -dimensionali si ha uguaglianza).

Concludiamo questa sezione citando un altro risultato, di ben altro sapore ma parimenti classico, che si lega alla seconda caratterizzazione del tensore di Ricci descritta in precedenza. Si tratta del teorema di Bishop-Gromov, il quale fornisce un confronto su scala macroscopica tra i volumi delle palle metriche di varietà a curvatura di Ricci non-negativa e dello “spazio modello naturale”, che nel contesto di questa nostra discussione è lo spazio euclideo. Più precisamente, data una varietà riemanniana (M, g) che soddisfi $\text{Ric} \geq 0$ e un qualunque punto $p \in M$, si ha che la funzione

$$r \mapsto f(r) = \frac{\text{Vol}(B_r(p))}{\omega_n r^n}$$

⁽⁷⁾ Nel contesto qui descritto, ricordiamo che il k -esimo numero di Betti si definisce come $b_k(M) = \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M)$, ove $H_{\text{dR}}^k(M)$ è il k -esimo gruppo di coomologia di de Rham, che a sua volta si ottiene quozientando lo spazio vettoriale delle k -forme chiuse per il sottospazio delle k -forme esatte di (M, g) . Due fatti fondamentali da tenere a mente sono: primo, per varietà lisce vi è un isomorfismo naturale $H_{\text{dR}}^k(M) \cong H^k(M; \mathbb{R})$ ove $H^*(M; \mathbb{R})$ denota l'anello di coomologia singolare a coefficienti reali di una varietà liscia M ; secondo, in ragione della dualità di Poincaré, se M è orientabile vale sempre $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}) \cong H^1(M; \mathbb{Z})$.

è monotona non-crescente (qui ω_n è la misura di Lebesgue della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$). In particolare, dato che palesemente – essendo M una varietà liscia – vale $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = 1$, segue che per ogni $r > 0$ si avrà $|B_r(p)| \leq \omega_n r^n$ (con disuguaglianza stretta se $\text{Ric} > 0$): in una varietà riemanniana a curvatura di Ricci positiva il volume cresce meno che nello spazio euclideo. Si noti che un aspetto interessante qui è che la misura dei volumi di domini sulla nostra varietà è una nozione di classe C^0 , ovvero dipende solo dalla metrica e non dalle sue derivate, e quindi si lega a nozioni deboli di curvatura di Ricci, importante tema su cui torneremo nella Sezione 6.

4. – Il flusso di Ricci e la congettura di Poincaré

Ma torniamo agli spazi di dimensione 3 e vediamo quali (ben più forti!) conclusioni si possano trarre dall'ipotesi che una varietà M supporti metriche a curvatura di Ricci positiva. L'idea, rivoluzionaria ed a posteriori efficacissima, di Hamilton [23] fu quella di considerare un'opportuna equazione di evoluzione, il cui dato iniziale fosse la metrica data, e che rendesse quest'ultima, al passare del tempo, “sempre più omogenea”, convergendo infine verso una forma limite particolarmente semplice. In termini più concreti, egli propose di deformare la metrica assegnata g_0 su M secondo una velocità data (a meno di segno) proprio dal tensore di Ricci:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}(g(t)) \\ g(0) = g_0. \end{cases}$$

Possiamo pensare a questa equazione in analogia all'equazione del calore, quindi come ad una sorta di problema di diffusione su varietà. Si può dimostrare che il problema si riformula come un'equazione parabolica ben posta, e si hanno dunque esistenza ed unicità della soluzione (almeno per un certo intervallo di tempi iniziali). In effetti, sotto le sole ipotesi che M sia chiusa e $\text{Scal}(g_0) > 0$, la corrispondente equazione di evoluzione per la curvatura scalare di $g(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Scal}(g(t)) = \Delta_{g(t)} \text{Scal}(g(t)) + 2|\text{Ric}(g(t))|_{g(t)}^2,$$

implica immediatamente, sfruttando il principio del massimo per problemi parabolici, che il flusso debba presentare una singolarità in tempo finito. Il contributo principale e tecnicamente molto impegnativo, in [23], sta nel mostrare che, se $\text{Ric}(g_0) > 0$, il flusso – opportunamente rinormalizzato (a guisa che il volume della varietà rimanga invariato) – converge verso una metrica a curvatura sezionale costante. Di lì segue facilmente il seguente teorema di classificazione: l'unica varietà differenziabile tridimensionale M , semplicemente connessa⁽⁸⁾, che supporti metriche a curvatura di Ricci positiva è la sfera S^3 . Il lettore può trovare un'esposizione accessibile di questi risultati, ad esempio, nella bella monografia introduttiva di Topping [47].

Tuttavia, qualora non si assuma per la metrica iniziale una sì forte condizione di positività della curvatura, lo studio della corrispondente evoluzione per flusso di Ricci e il comportamento dello stesso vicino al primo istante singolare divengono parecchio complesse. In termini molto informali, partendo da una forma “a bilanciere” si possono ad esempio creare regioni centrali ad alta curvatura che somiglino (a scala opportuna) a colli cilindrici, come illustrato nella Figura 4. In un impressionante *tour de force* tecnico, Perelman ottenne nei suoi celeberrimi *preprint* [32-34] risultati di classificazione delle singolarità abbastanza precisi da poter definire un flusso di Ricci *con chirurgia*, ovvero una opportuna continuazione del flusso stesso oltre i tempi singolari. Sfruttando questi strumenti, attraverso un processo di ricostruzione “a posteriori” della varietà di partenza (come somma connessa di sfere) egli giunse così a dimostrare la celebre congettura di Poincaré, confermando (ad oltre un secolo dalla formulazione della questione) che l'unica varietà topologica di dimensione 3, chiusa e semplicemente connessa, è la sfera S^3 . Un avvincente e dettagliato racconto di questa straordinaria impresa scientifica si trova nell'articolo di Benedetti e Mantegazza apparso qualche anno fa su questa stessa rivista [7].

⁽⁸⁾ Da questo caso segue anche l'asserto più generale secondo cui le uniche varietà differenziabili di dimensione 3 che supportano metriche a curvatura di Ricci positiva sono i quozienti della sfera S^3 ottenuti da sottogruppi discreti di $SO(4)$ secondo azioni propriamente discontinue (ad esempio gli spazi lenticolari).

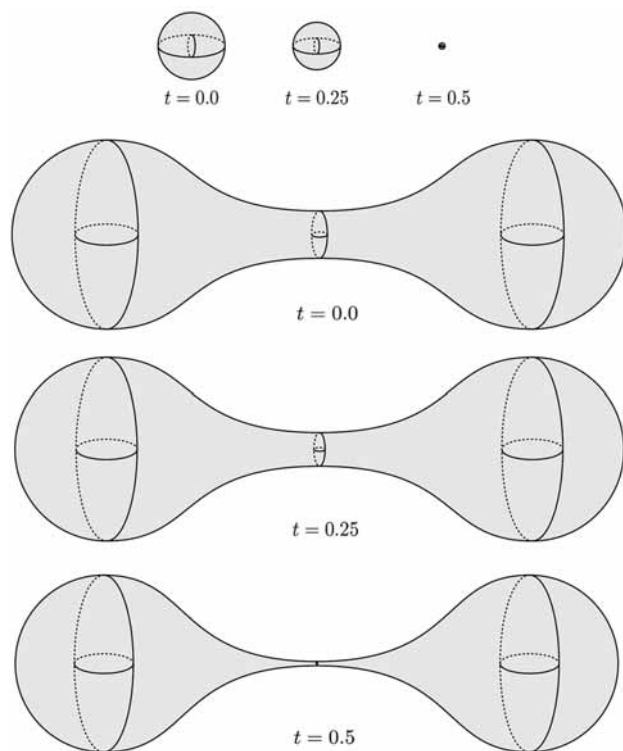


FIGURA 4 – In alto, l'evoluzione per flusso di Ricci di una sfera di raggio $\sqrt{2}$. Indicata con g_{rd} la metrica rotonda standard indotta sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^4$, in questo caso l'evoluzione è data dall'equazione esplicita $g(t) = 2(1 - 2t)g_{rd}$ e il flusso incontra una singolarità in tempo finito ($T = 1/2$). In base al lavoro di Hamilton, questo tipo di comportamento si riscontra per un qualunque dato iniziale corrispondente ad una metrica con tensore di Ricci positivo su S^3 . Tuttavia, per metriche che non soddisfano questa condizione, si possono incontrare altri tipi di singolarità, come il *neck-pinch* indicato nella parte inferiore della figura, ove le scale sono scelte in modo tale che il primo istante singolare sia nuovamente $T = 1/2$.

A questo punto verrà naturale al lettore chiedersi in che misura la condizione di supportare metriche a curvatura di Ricci positiva sia egualmente restrittiva per varietà di dimensione più alta, cominciando proprio dal caso della dimensione 4. Questo si lega, in maniera naturale, ad un altro aspetto della narrazione che abbiamo fin qui volutamente tralasciato: lo studio e la costruzione di varietà di Einstein [8]. Diremo una varietà riemanniana *di Einstein* se vale $\text{Ric} = fg$ per una qualche funzione $f \in C^\infty(M)$; si dimostra facilmente (sfruttando l'identità (3)) che, se questo è il caso e la dimensione di M è almeno 3, allora necessariamente f dev'essere costante ed eguale a Scal/n . Le superfici sono *sempre* varietà di Einstein, e (cosa meno ovvia) le varietà di dimen-

sione 3 sono di Einstein se e solo se hanno curvatura sezionale costante. Per contrasto, si verifica che già in dimensione 4 di varietà di Einstein (anche chiuse) ne esistono in abbondanza. Due semplici esempi che non abbiano curvatura sezionale costante sono il prodotto $S^2 \times S^2$ e lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^2$ con la metrica canonica di Fubini-Study. Il risultato più prossimo, almeno da un certo punto di vista, a un teorema di classificazione si ottiene qualora si considerino metriche di Kähler-Einstein su superfici complesse con prima classe di Chern c_1 positiva: si veda il notevole lavoro di Tian [46]. Di contro, le varietà Kähler compatte con $c_1 < 0$ oppure con $c_1 = 0$ possono *sempre* essere munite di metriche di Kähler-Einstein (vale a dire che non vi sono ostruzioni); in particolare, nel caso *Ricci flat* (cioè con $\text{Ric} = 0$) si può mostrare che tutte le varietà di Calabi-Yau si possono munire di metriche di Einstein.

5. – Alcuni sviluppi recenti

Senza alcuna pretesa di completezza, desidero presentare in questa sezione tre linee di ricerca ben diverse tra loro, che si legano in vari modi ai temi descritti nelle sezioni precedenti e quindi ai contributi di Ricci-Curbastro. La selezione riflette senza dubbio le preferenze di chi scrive, ma vuole altresì sottolineare il decisivo contributo di vari brillanti matematici italiani, segnando dunque – a un secolo di distanza – elementi di continuità con quella scuola di geometria differenziale di cui si è brevemente detto all’inizio di questa nota.

In primis, memori delle conseguenze del teorema di Bonnet-Myers viste nella prima parte della Sezione 3, ci si può chiedere quali implicazioni topologiche comporti, per una varietà differenziabile M , l’assunzione che questa supporti una metrica di curvatura di Ricci non-negativa (ovvero per cui valga $\text{Ric} \geq 0$, da non confondersi con la ben più restrittiva condizione (4)). Questa potrebbe apparire, ad un primo sguardo, una piccola differenza, ma il problema risulta in realtà molto delicato: a questo proposito Milnor congetturò nel 1968 che ogni tale varietà debba avere gruppo fondamentale finitamente generato (vedasi [31]). Non è troppo difficile mostrare che questa conclusione è certamente vera se la

dimensione di M è eguale a 2 (Cohn-Vossen [17] mostrò nel 1935 che, sotto tali ipotesi, se M non è compatta allora (M, g) dev’essere piatta, quindi $\mathbb{R}^2$ oppure $\mathbb{R} \times S^1$) oppure 3 (vedasi Liu⁽⁹⁾ [26]), ma cosa si può dire in dimensione arbitraria? Nonostante una messe di conferme in presenza di ipotesi aggiuntive, due anni fa Brué, Naber e Semola [11] hanno sorpreso la comunità matematica con un formidabile controesempio: esistono varietà di dimensione 7 che da un lato supportano metriche a curvatura di Ricci non-negativa, e dall’altro hanno gruppo fondamentale $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. In un successivo ed ancor più recente lavoro hanno poi ottenuto un ulteriore raffinamento costruendo controesempi di dimensione 6. Ad oggi, dunque, la congettura di Milnor ha il seguente status: certamente vera in dimensione 2 o 3, certamente falsa in dimensione almeno 6, uno (straordinario) problema aperto per varietà di dimensione 4 o 5.

Veniamo poi ad un’altra direzione di ricerca, particolarmente cara a chi scrive. Nel 1982, Yau formulò la seguente ardita congettura⁽¹⁰⁾: ogni varietà riemanniana (compatta e senza bordo) di dimensione 3 contiene infinite superfici minime chiuse, possibilmente immerse. Nel corso degli anni sono state proposte – anche nel contesto di seminari e conferenze varie – diverse ed ancor più ambiziose versioni di questa congettura, richiedendo (nella formulazione più ottimistica di tutte) che la medesima conclusione valga per ipersuperfici chiuse *embedded* in varietà di dimensione arbitraria. Un fondamentale strumento per approcciare questioni di questo tipo sta nel lavoro pionieristico di Almgren e Pitts [36], da cui prende il via lo sviluppo di una teoria di min-max per il funzionale area definito su oggetti anche molto poco regolari (il contesto qui è quello della teoria geometrica della misura e gli oggetti in questione sono opportune classi di *varifolds*). In particolare, con questo tipo di strumenti Pitts riuscì a dimostrare che ogni

⁽⁹⁾ Il lavoro di Liu fa un uso ingegnoso di tecniche di superfici minime introdotte da Schoen e Yau oltre quarant’anni fa [42].

⁽¹⁰⁾ Quello qui descritto è il problema numero 88 nella collezione contenuta in [53], la quale continua ad ispirare una frazione non trascurabile della ricerca in analisi geometrica.

3-varietà riemanniana compatta e senza bordo contiene almeno *una* superficie minima chiusa. Per quasi tre decenni questa teoria rimase sostanzialmente isolata nel panorama matematico, anche per la sua oggettiva, terrificante complessità tecnica, fino a quando Marques e Neves [28] ne hanno fatto decisivo uso per dimostrare la congettura di Willmore sulle forme dei tori di minima energia elastica nello spazio euclideo. Questo articolo ha dato il via, per così dire, a una sorta di nuova età dell'oro nella teoria delle superfici minime. Raffinando in varie direzioni gli studi di Almgren e Pitts, Marques e Neves sono poi riusciti ad ottenere risultati di esistenza sempre più generali, che hanno infine portato Song (all'epoca studente di dottorato sotto la guida di Marques) a dimostrare la validità della congettura di Yau, nella sua forma più forte, per varietà riemanniane di dimensione minore di 8 (e in dimensione arbitraria qualora si ammetta la presenza di un insieme singolare, di codimensione 7). Quel che ci preme sottolineare è questo: un passo importante in questo percorso è stato realizzare che tale congettura dev'essere vera in varietà riemanniane aventi *curvatura di Ricci positiva* [29]. Il fatto chiave qui è il seguente: come mostrato da Frankel [20] in ogni varietà che soddisfi la precedente ipotesi due qualsiasi ipersuperfici minime (chiuse) devono necessariamente intersecarsi, il che pone delle restrizioni molto forti al comportamento asintotico di una certa successione di invarianti (le *p-widths*) che emergono naturalmente quando si sviluppi una teoria di min-max con un numero arbitrario di parametri. Il successivo contributo di Song sta appunto nell'analizzare la situazione per varietà riemanniane per cui *non* valga la proprietà di Frankel, ovvero per cui possano esistere famiglie finite di ipersuperfici minime a due a due disgiunte.

Ci preme infine menzionare una serie di recenti sviluppi, particolarmente interessanti, iniziata col raffinamento ottenuto da Antonelli e Xu [6] dei teoremi di Bonnet-Myers e Bishop-Gromov (esposti nella Sezione 3). Essenzialmente, il loro lavoro dimostra che, al fine di giungere a tali conclusioni, non è effettivamente necessaria un'ipotesi di tipo puntuale sul tensore di Ricci, ma è sufficiente un'ipotesi di tipo *non locale*, specificamente sul primo autovalore (denotato con λ_1) di un opportuno

operatore di Schrödinger su una varietà riemanniana n -dimensionale:

$$\lambda_1 \left(-\frac{n-1}{n-2} \Delta + \text{Ric} \right) \geq n-1.$$

In particolare, la stima sulla crescita dei volumi di palle geodetiche che si può ottenere per varietà riemanniane che soddisfino tale ipotesi ha giocato un ruolo decisivo nella (di poco) seguente dimostrazione, da parte di Mazet [30], del fatto che le ipersuperfici minime stabili (con fibrato normale banale) in $\mathbb{R}^6$ devono necessariamente essere iperpiani affini. Questo significativo progresso nella soluzione del problema di Bernstein “stabile” (*stable Bernstein problem*) segue i precedenti contributi di Chodosh, Li, Minter e Stryker, lasciando quindi aperta solo la questione nel caso di $\mathbb{R}^7$ (dato che in $\mathbb{R}^8$, come congetturato da Simons [43] e poi mostrato da Bombieri, De Giorgi e Giusti [10], di ipersuperfici minime stabili che non siano piatte ne esistono in abbondanza). Va detto che nel caso di $\mathbb{R}^4$ la risoluzione del suddetto problema è stata ottenuta, indipendentemente dal lavoro di Chodosh e Li, anche da Catino, Mastrolia e Roncoroni [12] basandosi su tecniche della geometria conforme, reminescenti dei classici lavori di Fischer-Colbrie.

Tornando alla discussione precedente, vale altresì la pena di segnalare l'ancor più recente estensione, sempre sotto analoghe ipotesi spettrali, del fondamentale teorema di splitting di Cheeger-Gromoll [14] da parte di Antonelli, Pozzetta e Xu [5].

6. – Nozioni deboli di curvatura di Ricci

Un discorso a parte merita poi quell'ampio filone di ricerca legato alla possibilità di definire opportune nozioni deboli di curvatura di Ricci (ovvero alla possibilità di dare un significato a disuguaglianze come $\text{Ric} \geq k$ su oggetti geometrici che non siano varietà riemanniane lisce).

Ricordando che in coordinate locali su una varietà riemanniana (M, g) , il tensore di Ricci assume la forma

$$R_{jk} = \Gamma_{jk,i}^i - \Gamma_{ki,j}^i + \Gamma_{ip}^i \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^i \Gamma_{ik}^p$$

(ove la lettera Γ denota i simboli di Christoffel della metrica g , richiamati nella Sezione 1, e gli indici dopo

la virgola corrispondono a derivazioni nelle coordinate locali in questione) si vede subito che questa espressione ha a che vedere con la possibilità di derivare *due volte* la metrica e quindi pare improbabile aspettarsi di poter estendere questa definizione a classi di metriche meno regolari su una varietà liscia o, addirittura, a categorie di spazi potenzialmente singolari e con strutture più povere. Per meglio intendere il senso della domanda precedente, a priori quasi senza senso, vale la pena ricordare come, in tempi parecchio anteriori, Alexandrov avesse definito – basandosi sull’enunciato del teorema di Toponogov – una nozione di “spazio con curvatura sezionale maggiore o uguale a κ ” (per $\kappa \in \mathbb{R}$) guardando alla lunghezza del terzo lato di triangoli geodetici aventi uguali le lunghezze di due lati e l’ampiezza dell’angolo tra di essi, come illustrato in Figura 5; una tale caratterizzazione risulta equivalente a quella classica per varietà munite di una metrica di classe C^2 , ma si può dare per una sottoclasse assai ampia di spazi metrici (i cosiddetti spazi geodetici).

Ciò premesso, torniamo alla questione posta. Un fondamentale risultato, ad essa soggiacente, è il teorema di pre-compattatezza di Gromov (che qui citeremo, per semplicità espositiva, solo in un caso particolare): una qualsivoglia famiglia di varietà riemanniane chiuse aventi tutte diametro minore o eguale di D , curvatura di Ricci maggiore o eguale di K (ovvero $\text{Ric} \geq Kg$) e dimensione al più n è pre-

compatta rispetto alla topologia di Gromov-Hausdorff. Questo identifica, in particolare, un sottoinsieme privilegiato di spazi metrici (compatti), ovvero quelli che si possono ottenere come limiti di varietà riemanniane – sotto le ipotesi appena elencate – e che quindi, in quanto tali, dovrebbero ragionevolmente godere di proprietà ulteriori. L’indagine della regolarità dei cosiddetti *Ricci limit spaces* è stata oggetto di importanti lavori da parte di Cheeger e Colding (si vedano [13] ed i successivi raffinamenti), e poi – tra gli altri – da parte di Colding e Naber [18], e di Cheeger e Naber [15]: in termini molto vaghi è stato dimostrato in particolare che ogni tale spazio limite ha una naturale struttura stratificata legata alla forma dei coni tangenti (la parola *forma* qui allude al numero di fattori banali dei coni in questione, che sono sempre unicamente esprimibili in forma ridotta come $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{C}^{n-\ell}$, lo strato top corrispondendo alla parte “regolare” dello spazio), e ciascuno strato “singolare” soddisfa stime ragionevoli determinate dall’ordine ℓ dello strato stesso.

In verità, tuttavia, la questione posta sopra si può approcciare da una prospettiva completamente diversa: come proposto indipendentemente da Sturm [44, 45] e da Lott e Villani [27], traendo spunto da disuguaglianze funzionali legate alla teoria del trasporto ottimo di massa (si vedano in particolare [19] e i corrispondenti riferimenti bibliografici, oltre alla successiva esposizione contenuta nelle splendide

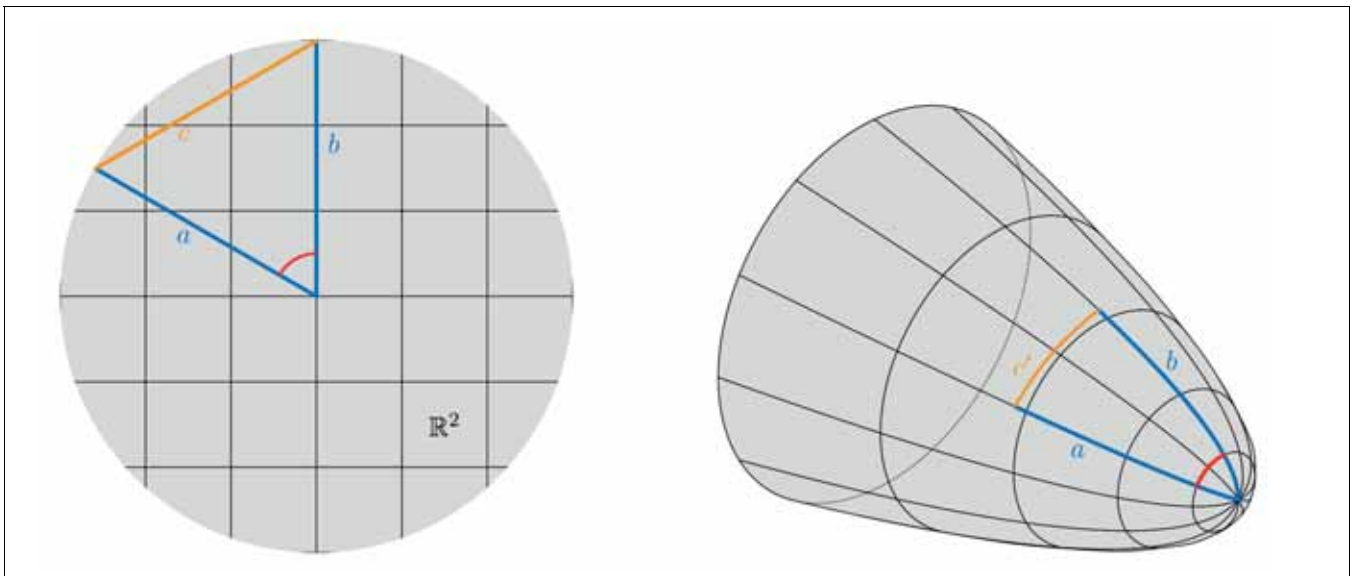


FIGURA 5 – *Triangle comparison* tra un dominio del piano euclideo ed una porzione di un paraboloide in $\mathbb{R}^3$: il teorema di Toponogov assicura che il terzo lato (in giallo nelle figure) sarà certamente più corto nel secondo caso che nel primo.

monografie di Villani [48, 49] e di Ambrosio, Gigli e Savaré [1]) la proprietà $\text{Ric} \geq \kappa$ può essere caratterizzata richiedendo una opportuna condizione di convessità (nota come *displacement convexity*) di certi funzionali definiti sullo spazio delle misure di probabilità, munito della distanza di Wasserstein associata ad un costo di trasporto quadratico. Seguendo questa strada è possibile definire, in maniera concettualmente molto elegante e generale, una nozione di limitatezza dal basso della curvatura di Ricci per spazi metrici (di misura), andando così a costruire una teoria (quella degli spazi RCD, si vedano – tra i tanti – i pionieristici contributi in [2-4, 21, 22] e la corrispondente bibliografia) che include quella dei *Ricci limit spaces* come caso particolare. Tale teoria si è arricchita, nel corso degli ultimi vent'anni, di svariate centinaia di contributi, dando vita ad un *corpus* di straordinario valore ed importanza, che testimonia in maniera evidente la rilevanza delle nozioni introdotte da Ricci-Curbastro e degli strumenti matematici che furono posti a loro fondamento.

Ma oltre ai suoi meriti scientifici, che ci paiono fuor di dubbio, vale oggi più che mai la pena di ricordare anche la statura umana di Gregorio Ricci-Curbastro tramite le parole che di lui scrisse Levi-Civita esattamente un secolo fa [24]:

”Profondamente stimato da alcuni pochi, Egli era rimasto in precedenza ignoto ai più, anche per suo carattere riservato e alieno, nonché dal farsi largo, altresì dalle forme intensive di comunicazione scientifica che si accompagnano alla vita moderna, quali frequenti viaggi e contatti personali; intervento a congressi; conferenze; distribuzioni relativamente larghe di lavori; pubblicazione di Note preventive e di riassunti. [...]”

Esempio edificante di modestia in un uomo che pur ebbe giusta coscienza di aver legato perennemente il suo nome al calcolo differenziale assoluto e alle sue applicazioni grandiose.”

Ringraziamenti. Desidero ringraziare Alberto Cogliati per avermi fornito copia di alcune delle opere di Ricci-Curbastro, purtroppo di difficile reperibilità, Mario Bernhard Schulz per aver curato le figure presentate in questo articolo e l'anonimo *referee* per i molti validissimi suggerimenti espositivi. Infine, un sentito grazie a Marco Andreatta e Carlo Toffalori per il gentile invito alla stesura di questo contributo.

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No. 947923).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] L. AMBROSIO, N. GIGLI, and G. SAVARÉ, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Second, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [2] ———, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Invent. Math. **195** (2014), no. 2, 289-391.
- [3] ———, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 7, 1405-1490.
- [4] ———, *Bakry-Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds*, Ann. Probab. **43**(2015), no. 1, 339-404.
- [5] G. ANTONELLI, M. POZZETTA, and K. XU, *A sharp spectral splitting theorem*, preprint, available at arXiv:2412.12707.
- [6] G. ANTONELLI and K. XU, *New spectral Bishop-Gromov and Bonnet-Myers theorems and applications to isoperimetry*, preprint, available at arXiv:2405.08918.
- [7] R. BENEDETTI and C. MANTEGAZZA, *The Poincaré conjecture and the Ricci flow*, Mat. Cult. Soc. Riv. Unione Mat. Ital. (I) **2** (2017), no. 3, 245-290.
- [8] A. L. BESSE, *Einstein manifolds*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.
- [9] S. BOCHNER, *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 776-797.
- [10] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI, and E. GIUSTI, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243-268.
- [11] E. BRUÈ, A. NABER, and D. SEMOLA, *Fundamental groups and the Milnor conjecture*, Ann. of Math. (2) **201** (2025), no. 1, 225-289.
- [12] G. CATINO, P. MASTROLIA, and A. RONCORONI, *Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces*, Geom. Funct. Anal. **34** (2024), no. 1, 1-18.
- [13] J. CHEEGER and T. H. COLDING, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 3, 406-480.
- [14] J. CHEEGER and D. GROMOLL, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geom. **6** (1971/72), 119-128.
- [15] J. CHEEGER and A. NABER, *Lower bounds on Ricci curvature and quantitative behavior of singular sets*, Invent. Math. **191** (2013), no. 2, 321-339.
- [16] A. COGLIATI, *Some remarks on the history of Ricci's absolute differential calculus*, Arch. Hist. Exact Sci. **78** (2024), 717-761.
- [17] S. COHN-VOSSEN, *Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen*, Compos. Math. **1** (1935), 69-133.
- [18] T. H. COLDING and A. NABER, *Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 2, 1173-1229.
- [19] D. CORDERO-ERAUSQUIN, R. J. MCCANN, and M. SCHMUCKENSLÄGER, *A Riemannian interpolation inequality à*

- la Borell, Brascamp and Lieb, *Invent. Math.* **146** (2001), no. 2, 219-257.
- [20] T. FRANKEL, *On the fundamental group of a compact minimal submanifold*, *Ann. of Math. (2)* **83** (1966), 68-73.
- [21] N. GIGLI, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **236** (2015), no. 1113, vi+91.
- [22] ———, *Nonsmooth differential geometry-an approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **251** (2018), no. 1196, v+161.
- [23] R. S. HAMILTON, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 2, 255-306.
- [24] T. LEVI-CIVITA, *Commemorazione del socio nazionale Prof. G. R.-C.*, *Memorie dell'Accademia dei Lincei* **1** (1925), 555-564.
- [25] T. LEVI-CIVITA, *The absolute differential calculus*, Dover Phoenix Editions, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2005. Calculus of tensors, Translated from the Italian by Marjorie Long, Edited by Enrico Persico, Reprint of the 1926 translation.
- [26] G. LIU, *3-manifolds with nonnegative Ricci curvature*, *Invent. Math.* **193** (2013), no. 2, 367-375.
- [27] J. LOTT and C. VILLANI, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, *Ann. of Math. (2)* **169** (2009), no. 3, 903-991.
- [28] F. C. MARQUES and A. NEVES, *Min-max theory and the Willmore conjecture*, *Ann. of Math. (2)* **179** (2014), no. 2, 683-782.
- [29] ———, *Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature*, *Invent. Math.* **209** (2017), no. 2, 577-616.
- [30] L. MAZET, *Stable minimal surfaces in $\mathbb{R}^6$* , preprint, available at arXiv:2405.14676.
- [31] J. MILNOR, *A note on curvature and fundamental group*, *J. Differential Geom.* **2** (1968), 1-7.
- [32] G. PERELMAN, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint, available at arXiv:0211159.
- [33] ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint, available at arXiv:0307245.
- [34] ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint, available at arXiv:0303109.
- [35] P. PETERSEN and M. WINK, *New curvature conditions for the Bochner technique*, *Invent. Math.* **224** (2021), no. 1, 33-54.
- [36] J. T. PITTS, *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, *Mathematical Notes*, vol. 27, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981.
- [37] G. RICCI-CURBASTRO, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, *Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti* **63** (1904), 1233-1239.
- [38] G. RICCI-CURBASTRO, *Opere. Vol. I. Note e memorie*, Edizioni Cremonese, Rome, 1956. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.
- [39] ———, *Opere. Vol. II. Note e memorie: teoria dell'elasticità*, Edizioni Cremonese, Rome, 1957. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.
- [40] R. SCHOEN and S. T. YAU, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature*, *Ann. of Math. (2)* **110** (1979), no. 1, 127-142.
- [41] R. SCHOEN and S. T. YAU, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, *Comm. Math. Phys.* **65** (1979), no. 1, 45-76.
- [42] ———, *Complete three-dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature*, *Seminar on Differential Geometry*, 1982, pp. 209-228.
- [43] J. SIMONS, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, *Ann. of Math. (2)* **88** (1968), 62-105.
- [44] K.-T. STURM, *On the geometry of metric measure spaces. I*, *Acta Math.* **196** (2006), no. 1, 65-131.
- [45] ———, *On the geometry of metric measure spaces. II*, *Acta Math.* **196** (2006), no. 1, 133-177.
- [46] G. TIAN, *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class*, *Invent. Math.* **101** (1990), no. 1, 101-172.
- [47] P. TOPPING, *Lectures on the Ricci flow*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 325, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [48] C. VILLANI, *Topics in optimal transportation*, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [49] ———, *Optimal transport*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, vol. 338, Springer-Verlag, Berlin, 2009. Old and new.
- [50] A. VOSS, *Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten*, *Mathematische Annalen* **16** (1880), 129-178.
- [51] H. H. WU, *The Bochner technique in differential geometry*, *Math. Rep.* **3** (1988), no. 2, i-xii and 289-538.
- [52] K. YANO and S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, *Annals of Mathematics Studies*, No. 32, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.
- [53] S. T. YAU, *Problem section*, *Seminar on Differential Geometry*, 1982, pp. 669-706.



Alessandro Carlotto

Alessandro Carlotto è professore ordinario di Analisi matematica presso l'Università di Trento e Principal Investigator del progetto ERC CHANGE. Allievo della Scuola Normale Superiore, ha ottenuto il dottorato di ricerca in Matematica nel 2014 presso la Stanford University discutendo una tesi dal titolo *Rigidity and flexibility phenomena in general relativity* sotto la direzione del Prof. Richard Schoen. Ha lavorato come ricercatore all'Imperial College di Londra e successivamente, dal 2016 al 2022, come docente presso il Politecnico Federale di Zurigo (ETH Zurich) prima di rientrare in Italia nel settembre 2022. Nel corso della sua carriera si è occupato di vari temi al confine tra l'Analisi e la Geometria, quali ad esempio lo studio delle superfici minime, delle varietà a curvatura scalare positiva, e delle equazioni vincolari di Einstein. Per il suo lavoro di ricerca, è stato insignito di diversi premi e riconoscimenti tra i quali – limitandoci agli anni più recenti – citiamo il Latsis Prize (2022) con la citazione “for groundbreaking contributions to Geometric Analysis”, la medaglia Ambrosetti (2023) ed il Frontiers of Science Award (2024).