Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Gabriele Lolli

Fondamenti e crisi nella matematica moderna

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (2025), n.1, p. 7–36.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_1_7_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2025.

Fondamenti e crisi nella matematica moderna

GABRIELE LOLLI

Quale valore attribuiscono i matematici alle considerazioni dei filosofi della matematica? Quanta e quale matematica conoscono e discutono i filosofi della matematica? I rapporti tra matematica e filosofia della matematica sono sempre difficili, per un timore di invadenza espresso dalla prima, e il suo rifiuto di accettare indirizzi e norme dettate dalla seconda. Questa a sua volta pretende di sapere se non di imporre una concezione della matematica più approfondita o autentica di quella degli scienziati; e talvolta di aver il compito di trovarle i fondamenti. ([1])

I contrasti sono più evidenti da quando la seconda si è caratterizzata con il suo nome, invece di essere solo filosofia che tra l'altro, per inciso, parla di matematica. David Hume (1711-1776), per non andare lontano, inseriva la matematica nei suoi trattati, magari parlando dell'intelletto. Nello stesso tempo la matematica è venuta ad assumere un compito che la filosofia riserverebbe a se stessa, quello di spiegare o fondare l'essenza della disciplina, o i suoi fondamenti.

Sul primo avvenimento è difficile come al solito cercare le prime manifestazioni, consapevoli che non c'è mai una prima volta; al massimo si può individuare il consolidarsi di una tendenza. Un indizio è nel positivismo, che ha introdotto la filosofia delle scienze; potrebbe essere Auguste Comte (1798-1857) con il suo *Essais sur la Philosophie des Mathématiques*. ([2]) Nell'antichità non c'erano distinzioni professionali, al massimo distinzioni tra ontologia, metafisica, etica e simili. La matematica rientrava nelle arti. Adesso in ogni filosofia di X, dove X indica un campo di interessi, si trovano differenti filosofie. ([3])

Il diverso atteggiamento si vede in particolare con i termini valutativi.

I termini "crisi" e "fondamenti" del titolo richiamano l'espressione "crisi fondazionale" che a partire dagli anni Trenta del secolo scorso è stata usata per indicare approssimativamente il periodo successivo alla scoperta delle antinomie logiche al passaggio del 1900. Nell'opinione corrente, soprattutto divulgativa, la crisi termina con il fallimento di tutte le proposte avanzate per eliminare tali difficoltà conservando però tutta la nuova matematica nella quale si erano manifestate (il logicismo), oppure rileggendola come costruzione puramente formale di una combinatoria di simboli (il formalismo), oppure ras-

Accettato: 3 agosto 2024.

([1]) Naturalmente nessuna dichiarazione del tipo "la matematica, i matematici, pensano ..." o "la filosofia pretende, ..." è valida per tutti i rappresentanti delle categorie a cui ci si riferisce. Il soggetto di questi discorsi non è costituito da due entità astratte chiamate rispettivamente "matematica" e "filosofia della matematica", ma è il modo usuale di parlare di tendenze principali, variabili col tempo e con le congiunture, esprimendo posizioni ritenute maggioritarie, o autoproclamatesi tali. Nel contesto dei discorsi potrà essere chiaro, anche se non detto, a quale sottocategoria ci si riferisce.

([2]) Si veda [Comte 1819].

([3]) Chi scrive ha deciso di assumere un atteggiamento preciso per parlare di filosofia della matematica, fin da uno dei suoi primi lavori, come potrebbe essere [Lolli 1985], quello di non esprimere sue tesi personali, ammesso che gliene venissero in mente, sulle questioni ritenute caratterizzanti dalla filosofia, o dalle varie filosofie, ma piuttosto di studiare, di analizzare e commentare posizioni espresse dai matematici quando questi sono intervenuti in momenti o situazioni cruciali, assumendo magari anche il gergo filosofico, ma più spesso proponendo essi giudizi e soluzioni sui problemi discussi, o quando hanno commentato le ricerche in corso, proprie o altrui, o hanno suggerito linee di sviluppo. Presentare storie per quanto possibile formate da composizioni fattuali, nel linguaggio della matematica e non deformato per darne una interpretazione più ampia. O episodi magari poco noti ma significativi. Insomma la filosofia della matematica come storia di avventure nella matematica raccontate dai partecipanti, i migliori dei quali sanno anche di filosofia.

segnandosi a rifiutarne parti consistenti (il predicativismo e varie forme di costruttivismo), o addirittura proponendo un modo diverso di fare matematica (l'intuizionismo). (4)

Ci sono stati nella storia altri momenti di difficoltà, se non di crisi, per esempio nel passaggio dal Settecento all'Ottocento quando Lagrange temeva che dopo il calcolo infinitesimale non ci fosse più altro da fare in matematica.

Nella storia la gravità delle difficoltà che si incontrano per sistemare o includere nuovi argomenti è proporzionale all'ampiezza e novità degli stessi in un determinato periodo; vista l'evoluzione della disciplina e la sua esplosione a partire dall'Ottocento, è comprensibile che la crisi del primo Novecento sia stata considerata un momento drammatico e per certi caratteri forse unico.

Sul momento, quando si cerca di risolvere un problema, la mancata soluzione è vissuta come un fallimento ma, e questo sarà il *Leitmotiv* della presente esposizione, i risultati importanti di solito sono come Giano bifronte, hanno la caratteristica che da una parte guardano indietro a chiudere una storia, ma dall'altra guardano avanti aprendone una nuova, prima imprevedibile; sul momento la soluzione di un problema aperto sul tappeto attira l'attenzione, ma in una prospettiva più lunga quella soluzione passa in secondo piano rispetto ai contributi originali che si inventano nel cercarla.

È un fatto comunque che la presenza insistita nella letteratura di termini come crisi e disintegrazione delle certezze, a proposito del primo Novecento, abbia conferito all'argomento della fondazione un'aura apocalittica, estranea alla mentalità del *working mathematician*, che non si riconosce in questo atteggiamento (vedremo che non è sempre così); e la descrizione drammatica dei pensieri e degli eventi connessi alle varie proposte, quasi si dovesse salvare la matematica, abbia sminuito il valore conoscitivo e pratico dei risultati e delle ricerche compiute per padroneggiare le difficoltà della nuova e rivoluzionaria matematica. Un caso emblematico è quello dei teoremi di Gödel commentati da Jean Ladrière (1921-2007) nel 1957, con il motivo conduttore interpretativo, che si è largamente diffuso, che nessun linguaggio o sistema può giustificarsi con le proprie risorse, ma solo facendo appello a linguaggi di un altro livello o di un altro genere. (5) Tale limite è interpretato da Ladrière, pensatore cristiano, come l'esigenza di aprirsi a una più larga dimensione di senso, ed è stato generalizzato alle capacità cognitive in genere.

Più che sgretolarsi tuttavia, le certezze si modificano, si spostano.

1. – Certezze fondazionali

Prima di analizzare lo "sgretolamento" delle certezze fondazionali, dobbiamo riconoscere quelle di cui vogliamo parlare.

La prima potrebbe essere la verità. Cioè che la matematica abbia a che fare con la questione della verità, vale a dire se e in che senso sia una descrizione veridica di qualche realtà o comunque le sue affermazioni siano vere (in un senso da precisare).

Potrebbe essere verificabile statisticamente che il riferimento al vero, alla scoperta di verità, nella storia occidentale, sia la caratterizzazione più ripetuta per la matematica, sia dai suoi praticanti sia nella cultura in genere, perfino nella fantascienza. (6) La verità sarebbe la certezza più forte perché avrebbe il carattere di una definizione dell'essenza della matematica, una definizione fin dall'inizio implicitamente o esplicitamente usata, in varie forme.

Per Platone (427-347) per esempio la matematica, che contrapponeva alla logistica, era lo studio dell'essere, in quanto distinto da ciò che nasce e muore. La definizione naturalmente sposta semplicemente il problema a cosa sia l'essere.

Per semplificare, possiamo tenere presenti due possibilità, quella di una realtà metafisica, rappre-

(4) Le principali proposte sono raccolte nelle relazioni al simposio sui fondamenti della matematica pubblicato su *Erkenntis* 2 (1931). Le prime tre: Rudolf Carnap, *Die Logizistische Grundlegung der Mathematik*, Arendt Heyting, *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*, Johann von Neumann, *The formalistische Grundlegung der Mathematik*, sono state tradotte in inglese in [Benacerraf e Putnam 1964].

(5) [Ladrière 1957].

(6) Si veda per esempio [Zamjatin 1922].

sentata da Platone, e quella della realtà naturale oggetto della scienza per Aristotele (384-322), anch'egli peraltro interessato all'essere; potremmo opporre essere vs. universo, metafisica vs. scienza naturale.

La matematica tuttavia si è arricchita progressivamente nei suoi contenuti, con nozioni di astronomia, questioni meccaniche, ottiche ecc., in modo un po' frammentario, sotto impulsi esterni; la matematica è cresciuta poco a poco, rendendo problematica di volta in volta una sua definizione esauriente, non provvisoria, e quindi anche la sua caratteristica di verità. (7)

Esiste tuttavia, semplificando, almeno da un certo momento in poi, una disciplina, o un campo di studi, che coinvolge il pensiero e ha un'ambizione generale e nel cosiddetto razionalismo si identifica col discorso vero di carattere universale e necessario, indicato anche come la *logica*. Abbiamo dunque due tipi di certezze che s'incrociano riguardo alla verità, quella della matematica e quella della logica.

2. – Certezza della logica

In greco logos (λόγος) ha due significati: *parola* (con tutti i connessi e derivati: discorso, racconto, letteratura, ...) e *ragione*. Questa a sua volta ha un ventaglio di accezioni, anche divergenti, che vanno da argomento, opinione, legge ad analogia, proporzione, rapporto (ma solo tra grandezze commensurabili), e anche calcolo, conto, valutazione.

Non sorprende allora che nel volgere della storia la logica si presenti con una molteplicità di contenuti e di scopi diversi e addirittura opposti (la responsabilità è talvolta piuttosto degli storici che non dei protagonisti. Per esempio il temine "logica" è usato per la prima volta da Alessandro di Afrodisia nel iii sec. d.C. per indicare quella che Aristotele chiamava *analitica*).

Sofisti, Cinici e Megarici hanno tutti insegnato l'abilità nel parlare e ragionare, con prevalenza nel parlare.

Aristotele li combatteva sostenendo che le proposizioni esprimono frammenti di realtà, che l'implicazione non è un atto linguistico, e che le premesse di un'inferenza sono l'attribuzione di determinazioni a una sostanza. La logica per lo Stagirita era la teoria della scienza e la scienza lo studio delle determinazioni necessarie dell'essere.

Aristotele poi alla logica affiancava la dialettica, parola che viene da dialogo, riunione; era una logica minore che aveva a che fare col mondo dell'opinione.

I cristiani latini ricevettero da Boezio la logica, non altro che la traduzione di Cicerone della logica stoica, praticamente un manuale per addestrare gli oratori romani.

Nel Medio Evo la logica non può interferire con la teologia e resta scienza del linguaggio: una delle arti, precisamente le *artes sermocinales*, quelle del discorso (*sermo*): dialettica (ma solo sillogismi corretti), grammatica, retorica, nella classificazione di Marziano Capella (iv-v sec. d. C), mentre la matematica (nella forma di aritmetica e di geometria, con astronomia e musica) rientra nelle arti del Quadrivio.

Escluso il Medio Evo, la logica è stata sempre, prima e dopo, qualcosa di più della codifica dell'inferenza corretta; dal Seicento in avanti nella logica s'incontrano questioni ontologiche, epistemologiche, psicologiche.

A partire da Descartes, Leibniz, Spinoza, si delinea in filosofia il razionalismo, come idea che la realtà è governata da una serie di leggi e principi che sono perfettamente comprensibili con la ragione umana e che coincidono con il pensiero stesso, più o meno la ragione forte di Vattimo.

Invece in Gran Bretagna, a partire da Francis Bacon (1561-1626), si afferma l'empirismo, secondo il quale tutte le idee sorgono in noi attraverso l'esperienza e gli esperimenti.

Per René Descartes (1596-1650) è raro che si arrivi a una conclusione certa solo sulla base della forma (come nei sillogismi) senza una conoscenza diretta dell'oggetto; comunque la deduzione è superflua, perché secondo lui neanche l'intelletto più limitato può fallire in essa. Chiede invece un'*ars inveniendi*, di scoperta, che secondo lui è fornita solo dalla geometria.

Gottfried W. Leibniz (1646-1716) riconosce invece alla logica un'arte di infallibilità, che si manifesta nei

(7) Una raccolta di dichiarazioni sulla matematica come quella di [Schmalz 1993] nel suo primo capitolo elenca, senza pretesa di completezza, anzi limitandosi a matematici o filosofi dell'età moderna, 56 di tali definizioni, con diverse varianti.

chiari conti, nel calcolo algebrico, persino infine nell'analisi infinitesimale; argomenti formali, nel senso che "in ciascuno di essi la forma del ragionamento è stata dimostrata in anticipo sicché uno è sicuro di non sbagliarsi a usarla".

Nell'Illuminismo, con Christian Wolff (1679-1754), compare la distinzione tra logica naturale e una logica artificiale che mira esclusivamente al chiarimento o sviluppo della prima; la si studia solo per far diventare un abito la disposizione naturale.

Per John Locke (1632-1704) matematica e logica sono due modi di raggiungere una valida capacità di ragionare; la prima con la pratica, la seconda con regole, ed è certo meglio la prima; l'idea si mantiene fino a William Whewell (1794-1866), a metà Ottocento.

La matematica del primo Ottocento è tuttavia ancora ristretta a pochi argomenti, rispetto alla situazione attuale; sta però incominciando a fiorire, attraverso una varietà di differenti tipi di ragionamento, non più solo il calcolo aritmetico o algebrico, non più la scienza della quantità e dell'estensione.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) per esempio considera normale che la matematica sia studio di relazioni, qualcosa di essenzialmente diverso dagli oggetti come enti singoli, oggetti nel senso comune. ([8])

Ma è il movimento degli algebristi inglesi (Peacock, De Morgan, Boole, William Hamilton, ...) che è stato una delle pietre miliari del metodo assiomatico moderno. All'inizio dell'Ottocento la condizione dello sviluppo di matematica e logica in Gran Bretagna è deplorevole e lamentato dai loro più vivaci cultori. Il panorama delle ricerche in Europa è invece aperto e vario, permettendo di trovare ispirazioni e suggerimenti. Nel 1812 John Herschel (1792-1871), Charles Babbage (1791-1871) e George Peacock (1791-1858) fondano l'*Analytical Society* a Cambridge; guardano a tendenze continentali che sottolineano il concetto di operazione come tema unificante in matematica, eseguendo la "separazione dei simboli di operazione", cioè separando in algebra i simboli designanti operazioni da quelli designanti quantità, e basando un "calcolo delle operazioni" sull'analogia tra operazioni ripetute e la legge degli esponenti (segnalata da Sylvestre Lacroix (1765-1843)). L'analogia era basata su proprietà comuni (associativa, distributiva).

Si rafforza l'idea che non fosse la natura degli oggetti in considerazione che era significativa, ma piuttosto le leggi di combinazione dei loro simboli.

Con i contributi anche di Augustus De Morgan (1806-1871), William (Sterling) Hamilton (1788-1856) e William Rowan Hamilton (1805-1865) nasce l'algebra simbolica come generalizzazione dell'algebra aritmetica: si adottano le stesse regole per le operazioni dell'algebra aritmetica ma togliendo ogni restrizione sui valori dei simboli, senza preoccuparsi che i risultati non siano consistenti con le definizioni su cui tutte le regole dell'algebra aritmetica sono fondate.

Un'influenza importante è stata quella di Étienne B. de Condillac (1714 -1780), con la critica delle idee innate dei cartesiani, del monadismo di Leibniz, dell'armonia prestabilita e con l'attenzione a come le sensazioni plasmano la conoscenza e costruiscono le funzioni umane. Tra queste vi è il linguaggio, o meglio i linguaggi. La concezione di linguaggi speciali si trova per esempio nel citato lavoro di Comte dove nota che addirittura il ragionamento "preparatorio", diremmo l'esplorazione informale, entra a pieno diritto dell'algebra. " Questo calcolo [di Leibniz e di Lagrange] fa rientrare la prima parte, la più difficile [del ragionamento preparatorio] nella seconda, cioè nel dominio della lingua matematica". ([9])

"Io non dirò come certi matematici che l'algebra è una specie di linguaggio; io dirò proprio che essa è un linguaggio", ([10]) a proposito del quale Condillac offre l'osservazione che: "data una equazione, come $x + a - b = c$, noi la trasformiamo senza bisogno di sapere cosa significano le lettere da cui è formata. Se lo sappiamo, non ci penseremo; e solo dopo che l'operazione è fatta noi sostituiremo alle lettere il loro valore. Ecco perché dico che tutte le operazioni sono puramente meccaniche". ([11])

Ne sentiremo l'eco quando scopriremo Charles Babbage (1791-1871) che afferma: "La natura quasi meccanica di molte operazioni dell'algebra, che certo contribuisce grandemente alla sua potenza, è stata

([8]) [Gauss 2011].

([9]) [Comte 1819, p. 17].

([10]) [Condillac 1827, p. 445].

([11]) *La langue des calculs*, [Condillac 1798, XVI, p. 170] .

stranamente misconosciuta da quelli che l'hanno considerata un difetto". ([12])

Dall'esperienza dell'algebra simbolica (un'algebra formalmente analoga a quella numerica ma riferita ad altri enti) e dalla moltiplicazione dei campi di applicazione emergeva l'autonomia degli apparati simbolici, autonomia nel senso che "il significato delle operazioni eseguite, così come dei risultati ottenuti [...] deve essere derivata non dalle loro definizioni o dai significati assunti" (Peacock) ma dalle regole postulate. Era la ripresa del metodo assiomatico (non usato nei secoli precedenti, nonostante il costante *lip service* riservato a Euclide), ma lasciando cadere le definizioni. ([13])

La rivoluzione non sarebbe riuscita senza l'accettazione delle geometrie non euclidee: diventa inevitabile che, se la geometria è stata una descrizione parziale dell'universo fisico (Galileo e il libro della natura), ora si sa che non si può parlarne in questo modo, casomai di possibili universi: la problematica del "vero" è sostituita dalla scelta da compiere tra vari strumenti concettuali per poter descrivere l'universo come viene concepito sulla base dei risultati scientifici teorici e sperimentali.

Le interpretazioni che garantiscono la non contraddittorietà relativa delle nuove geometrie, bastevole per la dichiarazione di esistenza, bastevole moralmente, prima di essere proclamata come meta-assioma, sono ancora interne alla matematica, sfera e pseudosfera per esempio, ma la fantasia matematica liberata avrebbe avuto bisogno, per parlare di interpretazioni qualunque, di esprimersi in un linguaggio completamente diverso, che non c'era.

Ma ci sarà, sarà premiato lo sforzo di trovare parole per esprimere un non-contenuto con il linguaggio degli insiemi: varietà, sistemi, molteplicità, classi, insiemi, mucchi, ...

([12]) [Babbage 1827, p. 333]. Babbage come gli altri algebristi era influenzato da Locke, da cui Condillac aveva preso le mosse, sia pure correggendolo.

([13]) Ci sono oscillazioni tra gli algebristi, ma non sulla sostanza; per esempio Douglas Stewart (1753-1828) dava importanza alle definizioni, in un senso diverso tuttavia da quello di isolare un concetto; erano per lui principi paragonabili ai "fatti generali" della filosofia naturale, senza prestare attenzione alla cosa significata, [Stewart 1877, p. 2, 180].

Intanto i matematici continuavano naturalmente a fare il loro lavoro come avevano sempre fatto, a dimostrare teoremi, nell'aumentare delle teorie presentate assiomaticamente (per esempio spazi vettoriali in Peano). Dimostrare una proposizione significava far vedere che essa è conseguenza degli assiomi: se gli assiomi sono veri allora lo sono anche i teoremi. La giustificazione del legame tra assiomi e teoremi era tradizionalmente delegata alla logica, il legame tra teoremi e assiomi era infatti chiamato "conseguenza logica".

Ma con ogni nuovo argomento si doveva trovare una giustificazione ad hoc, bisognava rifondare la logica e fondare il metodo assiomatico.

La prima spinta era stata quella di Boole, che si proponeva di usare il formalismo matematico delle equazioni per rappresentare argomentazioni logiche, limitatamente tuttavia ai sillogismi. Le posizioni veramente innovative furono quelle di Gottlob Frege (1848-1925) e di Giuseppe Peano (1858-1932), che peraltro avevano motivazioni diverse.

Entrambi proposero i loro contributi, indipendentemente, con la stessa idea, quella di un linguaggio interamente simbolico: Frege nel 1879, con la *Begriffsschrift*, scrittura per concetti o ideografia, Peano nel 1888 con un'analoga *pasigrafia*, linguaggio per tutti, da lui chiamata "logica matematica".

L'interesse primario di Peano era quello di ottenere una presentazione della matematica non solo rigorosamente corretta, ma opportunamente concisa o compressa, in modo da rientrare tutta nel *Formulario*.

Si deve a Frege il rilancio della logica come fondazione della matematica, con l'obiettivo di mostrare contro Kant la natura logica analitica, non sintetica, dell'aritmetica. Lo scopo generale della costruzione e dell'uso dell'ideografia era quello di "spezzare il dominio della parola sullo spirito umano svelando gli inganni che, nell'ambito delle relazioni concettuali, traggono origine, spesso quasi inevitabilmente, dall'uso della lingua". L'adozione dell'ideografia "[d]a un lato [...] deve procurare alle nostre espressioni maggior brevità e comprensibilità, dall'altro deve muoversi, a mo' di calcolo, nello schema di poche forme precise, in modo da non permettere alcun passaggio che non avvenga secondo regole ben precise, stabilite una volta per sempre".

L'ideografia di Frege è bidimensionale, a differenza dei linguaggi logici posteriori; fu considerata non facile da usare e rifiutata dai pochi che ne vennero a conoscenza o cercarono di padroneggiarla.

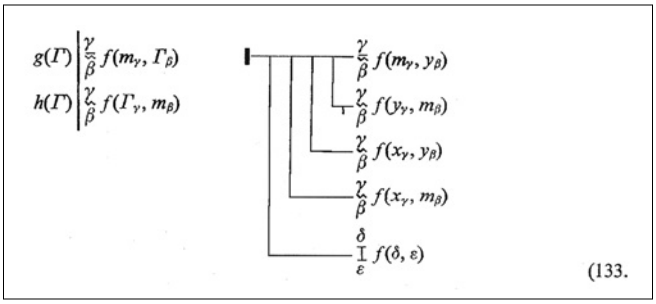

FIGURA 1 – La formula 133 della *Begriffschrift*.

Nel capitolo 3 della *Begriffsschrift*, "Elementi di una teoria generale delle successioni", viene svolta, come esempio, la trattazione ideografica completa di un argomento che è il primo passo verso una definizione del numero, ma che soprattutto permette di illustrare come si possa decidere in modo conclusivo se le inferenze siano logiche o intuitive. Frege propone il caso di una proposizione perfettamente analitica, perché dimostrabile con le sole regole della *Begriffschrift*, non ottenibile secondo lui con alcuna forma di intuizione o pensiero sintetico ma ricca di contenuto e di insegnamento. La proposizione è la seguente:

> Se la relazione di ogni termine di una successione col suo successivo è univoca, e se in questa serie tanto m quanto y seguono a x, allora, nella successione considerata, o y precede m, o coincide con esso, o lo segue. ([14])

La dimostrazione della formula è quella riportata in Fig. 1, con il segno di asserzione

$$\vdash$$

oggi trasformato in $\vdash$ e usato come segno di dimostrabilità, che significa che la formula è la conclusione di un numero finito di applicazioni delle regole deduttive del sistema; nella parte sinistra compaiono abbreviazioni per le ipotesi e la conclusione della proposizione.

Con

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top q \\ \quad\llcorner p \end{array}$$

si indica l'asserzione del condizionale $p \to q$, cioè "se p allora q", con

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\top r \\ \quad\;\;\llcorner q \\ \quad\llcorner p \end{array}$$

l'asserzione di $p \to (q \to r)$ ("se p, allora se q allora r") e con

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top q \\ \quad\llcorner\!\top p \end{array}$$

l'asserzione $\neg p \to q$ ("se non vale p, allora q"). ([15])

Il trattino verticale prima di una formula, come nell'ultima riga della traduzione di "se non vale p, allora q", rappresenta la negazione della formula che segue a destra (in questo caso p). Oltre al condizionale e alla negazione Frege provvede anche una rappresentazione della quantificazione universale, che non descriviamo, e quindi, con questa e la negazione, di quella esistenziale.

Coloro che denunciano la sterilità della logica hanno in mente secondo Frege la metafora del contenitore, secondo cui le premesse sarebbero contenute nella conclusione. Lo stesso Kant prende in esame solo il giudizio affermativo universale, dove ci si chiede se il concetto del predicato sia contenuto nel concetto del soggetto. La domanda non si può porre in altri casi, come per giudizi particolari o di esistenza. Frege sostituisce dunque quella del contenitore con una diversa, felice metafora:

> Le definizioni veramente feconde della matematica, per esempio la definizione della continuità di una funzione [...] si ottengono da un collegamento più profondo, vorrei dire più organico, di determinazioni. [...] Ciò che può venir ricavato da esse non è, dunque, qualcosa di intuibile a priori. Non si tratta semplicemente, in tali definizioni, di togliere di nuovo dagli armadi quel che vi era riposto. Le conseguenze da esse ricavate ampliano in modo effettivo le nostre cono-

([14]) [Frege 1879, formula 133, trad. it. p. 204].

([15]) In un formalismo corrente la struttura sintattica della formula 133 sarebbe dunque

$$A \to (B \to (C \to (D \vee E))),$$

dove A sta per "la relazione di successore è univoca", B per "m segue x", C per "y segue x", D per "y precede o coincide con m", E per "y segue m", $D \vee E$ per "D oppure E", ovvero $\neg D \to E$.

scenze e si dovrebbe perciò, secondo Kant, considerarle come sintetiche. In realtà tali conseguenze sono davvero contenute nelle definizioni: ma come la pianta nel seme, non come una trave nella casa. ([16])

A Bertrand Russell (1872-1970) spetta il merito di aver fatto conoscere Frege, il quale deve la sua rinomanza al proprio fallimento. Russell rese famoso Frege perché è al sistema logico di questi, come presentato nei *Grundgesetze* del 1893, che egli fece riferimento per formulare e rendere nota la scoperta dell'antinomia che porta il suo nome, e che chiamava "la contraddizione".

Il carteggio con Russell è il più corposo e interessante di quelli inclusi nell'epistolario [Frege 1976]. La prima lettera di Russell del 16 giugno 1902 è quella in cui si presenta e comunica la contraddizione; la prima di Frege del 22 giugno 1902 contiene la risposta, dolorosa e nobile: "La Sua scoperta della contraddizione mi ha sorpreso al massimo e, quasi vorrei dire, mi ha costernato, perché con essa vacilla la base sulla quale pensavo si fondasse l'aritmetica. [...] Per quanto indesiderata possa apparire di primo acchito la Sua scoperta, essa è in ogni caso degna di nota e ne deriverà forse un grande passo avanti nella logica". Lo scambio era conosciuto anche perché Frege si ripeté in una Nota finale (*Nachwort*) aggiunta, nell'ottobre 1902, al secondo volume dei *Grundgesetze*: "A uno scrittore di scienza ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione". ([17]) "Si tratta – continua – del mio principio (V)". Si noti, un altro fatidico quinto postulato. Tale assioma era da lungo tempo presente nella tradizione logica come "principio di comprensione", in diverse formulazioni.

Una è che data una formula A "esiste un insieme x i cui elementi sono tutti e soli gli insiemi y che soddisfano la condizione espressa dalla formula A", da cui segue che ne esiste esattamente uno.

L'usuale presentazione, ora comprensibile da tutti, è: per ogni formula A

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow A(y)).$$

Allora, se $A(y)$ è

$$y \notin y,$$

non può esserci molteplicità x tale che

$$\forall y (y \in x \leftrightarrow y \notin y),$$

altrimenti

$$x \in x \leftrightarrow x \notin x.$$

Nella terminologia di Russell il principio di comprensione è: le entità matematiche che soddisfano determinati concetti formano una classe (o *range*, decorso dei valori) di cui esse sono elementi e che è caratterizzata in modo unico dal detto concetto.

Le classi sono oggetti per Russell, ma nessuna può corrispondere al concetto di "non appartenere a se stesso".

La terminologia di Frege è diversa ma imparentata; Russell parla di classi o di predicati, Frege di funzioni (i concetti sono funzioni a valori nei valori di verità) e associa a ogni funzione il suo *Wertverlauf* (letteralmente decorso dei valori) esprimendo nel principio V il fatto che il decorso dei valori di due funzioni è uguale se e solo se esse assumono lo stesso valore per ogni argomento, qualunque esso sia, ovvero hanno la stessa estensione; è la direzione del "solo se" che è messa in crisi dalla contraddizione, non quella del "se".

Frege nel *Nachwort* lamenta quasi incredulo che "non è possibile che i numeri possano essere afferrati e inseriti nella trattazione quali oggetti logici se non è permesso [...] passare da un concetto alla sua estensione". Si consola con il "mal comune": "tutti coloro che [...] hanno fatto uso di estensioni concettuali, classi, insiemi sono nella mia stessa situazione", anche Dedekind nella sua definizione dei numeri naturali aveva compiuto la stessa fallacia.

Nell'ambiente matematico varie antinomie della teoria degli insiemi, come quelle del massimo cardinale e del massimo ordinale, erano peraltro note a Cantor stesso, a David Hilbert (1862-1943) e indipendentemente a Ernst Zermelo (1871-1953) intorno al 1900, ma non erano state oggetto di pubbliche discussioni. Cantor era stato il primo a segnalarne una a Hilbert, quella del massimo cardinale.

Le informazioni intorno a questo episodio e alle reazioni degli interessati si trovavano tuttavia solo nello scambio privato di lettere tra Cantor, Dedekind e Hilbert tra il 1897 e il 1900.

([16]) [Frege 1884, trad. it. p. 329] .
([17]) [Frege 1965, p. 574].

Cantor in una lettera a Hilbert del 26 settembre 1897 aveva presentato l'argomento che la totalità di tutti gli aleph non poteva avere una cardinalità, e un aleph associato, che non sarebbe appartenuto all'insieme degli aleph, quindi non poteva essere un insieme determinato.

Cantor si muoveva al limite dell'ambiguità, perché era costretto a modificare la definizione di insieme, che lui stesso aveva dato. Aveva definito il concetto di insieme determinato nel terzo articolo del 1882 della serie di sei articoli dal titolo *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*:

> Chiamo *ben definito* un aggregato (collezione, insieme) di elementi che appartengono a un qualsiasi dominio di concetti, se esso può essere considerato *internamente determinato* sulla base della sua definizione e in conseguenza del principio logico del terzo escluso.

Ora Cantor parlava di molteplicità non solo *determinate*, ma anche *compiute* (*fertig*), sostenendo che la precisazione era implicita nelle precedenti definizioni. Ad ogni modo Cantor era ora sicuro di poter affermare: "Esistono dunque molteplicità determinate che *non sono al tempo stesso delle unità*, cioè tali che l'esistenza simultanea di tutti i loro elementi è *impossibile*". Lo comunicava poi a Dedekind il 3 agosto 1899.

Hilbert rispondendo il 27 alla lettera di Cantor del 26 settembre 1897, lo aveva ancora rassicurato che "[l]a totalità degli aleph può essere concepita come un insieme determinato e ben definito". Invece il 12 ottobre 1899 scriveva nell'introduzione all'articolo sull'assiomatizzazione dei numeri reali che Cantor aveva dimostrato che la totalità di tutte le cardinalità non esiste, nel senso che è una totalità inconsistente; ma anche, nello stesso testo, lamenta che Cantor "non fornisce un criterio preciso per questa distinzione" tra totalità consistenti, che sono un tutto, e totalità inconsistenti.

Nella lettera di Hilbert a Frege del 7 novembre 1903, oltre all'informazione che la contraddizione a cui si riferiva Frege nel *Nachwort* dei *Grundgesetze*, che questi gli aveva inviato, era nota a lui e a Zermelo da tre-quattro anni, insieme ad altre, era contenuta la dichiarazione che queste

> mi hanno portato al convincimento che la logica tradizionale è insufficiente [...] e considero come lacuna essenziale nel tradizionale edificio della logica l'assunzione – condivisa finora da tutti i logici e matematici – che un concetto è già dato quando si è in grado di stabilire, per ogni oggetto, se questo cada sotto di esso oppure no.

Da quel momento si può datare la fine della logica tradizionale, sia pure in privato. Nel 1904 rimproverava lo stesso errore anche a Dedekind. ([18])

Gli scritti brillanti e provocatori di Russell richiamarono l'attenzione e la partecipazione di nuovi protagonisti, da Louis Couturat a Henri Poincaré (1854-1912). ([19]) Il dibattito dei primi anni del Novecento fu molto acceso, anche aspro, nella ricerca delle soluzioni da adottare, matematiche o logiche; il clima era molto diverso da quello di fine Ottocento, ora era focalizzato sulla logica degli insiemi e le ideografie non erano più una curiosità per amatori ma uno strumento di utilità assodata (a parte i detrattori preconcetti alla Poincaré) che doveva soltanto essere definitivamente plasmato in modo da incorporare le scelte corrette adeguate. Russell diede il maggiore contributo, con diverse proposte culminate nella teoria dei tipi messa in opera nei tre volumi dei *Principia mathematica* (1910-13), scritti con la collaborazione di N. Whitehead (1861-1947). ([20])

Non abbiamo tempo per seguire tutte le posizioni. Ricordiamo solo che il principio di comprensione è un ostacolo che non si riesce a eliminare; sotto l'influsso di Hilbert la logica per la matematica negli anni '20 diventa quella del primo ordine, dove negli infinito compare solo nella metalogica e praticamente solo quello numerabile con

---

([18]) [Hilbert 1904, trad. it. p. 164].

([19]) Couturat a differenza di Poincaré è presente nel carteggio di Frege dal 1899 al 1906; Couturat condivideva con Russell l'interesse e lo studio dei manoscritti logici di Leibniz da poco ritrovati.

([20]) Con teoria dei tipi s'intende che ogni insieme appartiene a un tipo, e può appartenere solo a insiemi di tipo superiore (per evitare $x \notin x$), e ogni variabile ha un tipo che precisa gli insiemi su cui può variare. Ma i dettagli tecnici non lasciano un'impronta operativa reale; si faranno riferimenti a quest'opera come inquadramento della matematica, per esempio nella prima edizione di *Moderne Algebra* del 1930-31 di Bartel van der Wearden (1903-1996), indeciso tra i *Principia* e le nuove teorie degli insiemi, ma senza chiamarle in causa per vederne in funzione le dififerenze.

l'induzione. La logica torna a essere parola, e non ragione. ([21])

Da segnalare è tuttavia l'ironia della storia che il fallimento di Frege è stato troppo precipitosamente dichiarato, da lui *in primis*. Frege stesso quando si riprese dallo choc si accorse che l'assioma V era utilizzato nel suo ragionamento solo per dimostrare il cosiddetto "principio di Hume", vale a dire che due concetti numerici sono uguali se e solo se le loro estensioni sono equinumerose. ([22])

Si continuano a produrre proposte di soluzioni per la versione più ristretta dell'assioma V (Boolos, Resnik, Rusinoff, ...), ([23]) perché non c'è unanimità sulla riuscita perfetta della correzione. Non basta infatti una chiara dimostrazione: Frege doveva dimostrare che tutti gli appelli di Kant all'intuizione erano sostituibili da dimostrazioni nelle quali non fosse usata l'intuizione in nessuna delle mosse necessarie, e questa è una fatica da Ercole, perché l'intuizione si manifesta anche nella costruzione delle dimostrazioni formali (lo vedremo in seguito parlando della logica di Hilbert).

Comunque la storia della fondazione logicista è finita con l'assioma di riducibilità di Russell, adottato nei *Principia Mathematicae* del 1910, un'assioma che riduce tutti i tipi faticosamente definiti a quello di base; l'opportunismo è più forte degli ideali, nel senso che un rattoppo è preferibile al logorio di tentativi senza fine.

La concezione della fondazione dei logicisti, come di altri protagonisti della crisi dei fondamenti, era diversa da quella che coltivavano i matematici, se si può prendere Hilbert come rappresentante del *working mathematician*. La fondazione per Hilbert non è il perfezionamento della logica, come la concepiva per esempio Boole quando affermava che "la logica non soltanto costruisce una scienza, ma indaga anche sull'origine e sulla natura dei suoi propri principi". ([24]) Con Hilbert quello che più si può immaginare come fondazione diventa il metodo assiomatico; non tuttavia come garanzia di certezze, inizialmente, ma in vista dello sviluppo interno della matematica. Il metodo assiomatico permette "un *approfondimento dei fondamenti* dei singoli campi conoscitivi". ([25])

"L'occuparsi dei fondamenti di una scienza ha un fascino particolare e il controllo di questi fondamenti farà sempre parte dei compiti più raffinati dei ricercatori. Una volta Weierstrass ha detto: 'La meta che dobbiamo avere sempre davanti agli occhi consiste nel cercare di ottenere un più sicuro giudizio sui fondamenti della scienza'." ([26])

Trattare assiomaticamente una teoria non significa impostarne la presentazione una volta per tutte: "un più sicuro giudizio sui fondamenti della scienza" significa studiare i rapporti tra i suoi risultati più importanti, la mutua derivabilità o l'implicazione unidirezionale, o il numero di conseguenze significative, la possibilità di trasformare un risultato profondo in un nuovo assioma, ai fini di presentare una organizzazione sempre più connessa, rivelatrice del significato di diversi risultati, aperta all'incontro con altre teorie o discipline. Hilbert porta l'esempio dei poliedri regolari che Felix Klein ritrovava nella geometria elementare, nella teoria dei gruppi e delle equazioni, e nella teoria delle equazioni differenziali lineari. ([27])

E tuttavia anche Hilbert subisce il fascino della conquista e del possesso della verità, e finisce per ammettere che sarebbe rassicurante dare una dimostrazione di non contraddittorietà come in geome-

([21]) Gli assiomi di esistenza nelle teorie degli insiemi, come quella di Zermelo-Fraenkel, hanno forti restrizioni proprio ai fini di evitare le possibili contraddizioni tradizionali; nelle teorie con distinzione tra insiemi e classi, la logica ha due specie di variabili, ma resta del primo ordine; si possono anche trattare questioni con ragionamenti del secondo ordine, ma solo per risultati matematici con i quantificatori ristretti a spazi limitati superiormente.

([22]) "When two numbers are so combin'd as that the one has always an unite answering to every unite of the other, we pronounce them equal", [Hume 1739-40, I, III, I]. Frege scrisse un'appendice al secondo volume delle *Grundgesetze* suggerendo una correzione che però subito dopo la pubblicazione del libro e dei *Principles of Mathematics* di Russell, dove era espressa un'interessata attenzione, entrambi furono concordi nel considerare inadeguata.

([23]) Segnaliamo in particolare per chiarezza espositiva [Boolos 1997] e gli altri saggi della seconda parte di [Boolos 1998], intitolata *Frege Studies*.

([24]) [Boole 1847, p. 70].

([25]) [Hilbert 1917, trad. it. p. 179].

([26]) [Hilbert 1900b, trad. it. p. 160].

([27]) Ivi, p. 147. Si veda anche *infra* nota 31.

tria, se non per tutta la matematica per teorie onnicomprensive come quella degli insiemi, o almeno dell'Analisi, con un atto unico e definitivo; il problema è in quale linguaggio; il linguaggio come vedremo è quello della formalizzazione.

> Se otteniamo questa dimostrazione [della non contraddittorietà degli assiomi dell'analisi] allora con essa avremo stabilito che gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive: una conoscenza, questa, della massima importanza per noi, anche per il suo carattere filosofico generale. [Hilbert 1922a, trad. it. p. 195]

Vale a dire: se non c'è una logica della ragione ci sarebbe comunque la certezza della verità.

Interessa segnalare che alla stessa citazione di sopra di Weierstrass (nota 26) Hilbert riporta il seguito, che afferma: " Per penetrare davvero dentro la scienza, è certamente indispensabile occuparsi di singoli problemi." Con questo abbiamo l'apertura a un altro genere di certezze.

3. – Certezza della risolubilità dei problemi

Una certezza da analizzare e verificare è che ogni problema sia risolvibile. O che esistano criteri per capire se un problema lo è.

Essa è tipica di un periodo in cui la comparsa di problemi e la loro diffusione come sfida diventa assai più frequente di quando la comunità matematica era costituita da uno sparuto numero di personaggi sparsi nelle nazioni europee, o di quando le sfide erano pubblici incontri a pagamento, come quelle tra Cardano e Tartaglia nel Cinquecento.

Accettata la presentazione assiomatica, che non si appoggia sulla verità, per riconoscere che un problema è risolubile bisogna regolamentare i metodi disponibili per pervenire a una formula, o a un'affermazione sì/no, che siano dimostrabili e non lascino alcun dubbio, visto che le teorie sono garantite solo dal procedimento deduttivo o con altri metodi a quello riconducibili a seconda dei linguaggi coinvolti (numerico o discorsivo).

Al solito, si trova qualche rozza anticipazione.

Il principio di Leopold Kronecker (1823-1891) per esempio era che una definizione matematica è una genuina definizione se e solo se comporta per la sua applicazione o riconoscimento un numero finito di tentativi. [28] Kronecker era stato il grande avversario di Cantor, nemico delle astrazioni che stavano invadendo la matematica e sostenitore dell'uso esclusivo di metodi costruttivi sulla base dei numeri naturali ma non ha mai elaborato una caratterizzazione di tali metodi. Ora però dalla definizione rigorosa di infinito discende quella altrettanto sottile e intricata della finitezza, fino ad allora ammessa come evidente e naturale.

Tra le reazioni alla creazione della teoria di Cantor spiccano quelle, piene di riserve, degli analisti francesi semi-intuizionisti, in particolare quelle di Émile Borel (1871-1956).

Per Borel la questione discriminante era quando si potesse considerare dato un insieme: se, come sembrava a Cantor, quando l'appartenenza ad esso era determinata in linea di principio dalla logica, una non ben precisata logica naturale della ragione umana, oppure quando esisteva un metodo per generare gli elementi. Borel era scettico sul concetto di infinito più che numerabile, benché con motivazioni e soprattutto con una pratica di lavoro contraddittoria. Da una parte infatti sosteneva che solo l'infinito numerabile fosse accettabile, con la generazione progressiva, uno dopo l'altro, degli elementi delle successioni, dall'altra lavorava con insiemi più che numerabili nelle sue ricerche di analisi; concedeva per esempio che l'insieme dei punti di una circonferenza potesse essere accettato, perché c'era un metodo per produrlo, quello di disegnare un cerchio con il compasso, ma non mi risulta che desse altri esempi non così materiali. A proposito dell'insieme di tutte le funzioni definite su un insieme infinito E a valori 0 o 1, Borel sosteneva che certamente "questo insieme è logicamente definito; ma io mi domando se ne abbiamo una qualche concezione".

Nel precisare, per quanto allora possibile, quali metodi fossero accettabili, Borel insisteva, forse il primo con tale forza, sul fatto che una regola deve portare al risultato in un numero finito di passi; gli mancava la caratterizzazione della natura effettiva dei singoli passi. Ma a parte Kronecker è una delle prime volte che il requisito di un numero finito di passi viene esplicitato per il concetto di metodo effettivo.

([28]) [Kronecker 1887].

Sarà lunga la strada per arrivare dal finito a una definizione di metodo di decisione, o di regola, o di come si dirà poi, di algoritmi.

Borel, benché non avesse una definizione degli algoritmi, aveva tuttavia una corretta sensibilità per il loro uso. In [Borel 1898, Note i, pp. 123-6] mette in guardia "sulla difficoltà che c'è a definire l'insieme delle funzioni del tutto discontinue", cioè il concetto più generale di funzione di variabile reale. Egli, anche a questo proposito incoerente, riteneva che ci si dovesse limitare alle funzioni continue. "Date, in effetti, due funzioni discontinue [...] il problema di riconoscere se sono identiche o differenti presenta una difficoltà tutta particolare. Non è possibile neppure, in effetti, fissare un metodo grazie al quale, se esse sono differenti, di questo si sia assicurati dopo un numero finito di operazioni".

Nello spiegare perché le cose starebbero diversamente, se le funzioni fossero continue, Borel dava una descrizione molto corretta *ante litteram* di quelli che saranno detti metodi di decisione parziale, quando sarà sviluppata la teoria della calcolabilità effettiva. Due funzioni continue coincidono se coincidono su tutti i valori razionali. Se non sono identiche, esiste un numero razionale tale che per esso le due funzioni sono diverse, e i loro valori per un tale numero incominciano a differire dopo il calcolo di un numero m di cifre decimali dell'argomento. Più esplicitamente:

> Dès lors, si l'on range tous les nombres commensurables en une suite
>
> $$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$
>
> ce que l'on sait faire, et si l'on calcule les valeurs
>
> $$\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n), \varphi_1(u_1), \ldots, \varphi_1(u_n),$$
>
> avec n chiffres décimaux exacts, il arrivera nécessairement, si l'on fait successivement cette opération pour
>
> $$n = 1, 2, 3, \ldots$$
>
> que, pour une valeur *finie* de n, c'est-a-dire au bout d'un nombre *fini* d'opérations, on sera assuré que les deux fonctions ne sont pas identiques.
>
> D'ailleurs, il est évident que ce nombre ne sera pas connu d'avance et que, par suite, l'on ne pourra pas, de calculs aussi longs qu'ils soient, conclure l'identité des deux fonctions. Mais, si elles sont différent, on est sûr de s'en apercevoir avec assez de perseverance.

La disuguaglianza tra funzioni continue è dunque un problema *semidecidibile*, come si dirà in seguito. Non c'è nulla di simile a disposizione per le funzioni discontinue, e Borel adduce a spiegazione l'infinità non numerabile di condizioni che possono determinare una tale funzione; egli identifica il calcolabile con il numerabile, come d'altra parte è coerente in un costruttivista. Borel inoltre anticipa anche l'idea di calcolabilità sui reali, che sono oggetti infiniti.

L'attenzione ai problemi e ai requisiti di una loro soluzione diventa generale nel 1900, quando David Hilbert presenta al secondo congresso internazionale dei matematici tenuto a Parigi una relazione intitolata "Problemi matematici" (*Mathematische Probleme*) che ha fatto storia per la proposta di 23 problemi aperti che avrebbero dovuto guidare la ricerca nel secolo entrante, e che in effetti hanno svolto un ruolo importante. ([29]) A noi nella presente situazione interessano le osservazioni generali di Hilbert, nell'introduzione che precede i singoli problemi, della quale presentiamo qui ampi stralci: ([30])

Da leggere e meditare è tutta la parte introduttiva, ma dobbiamo limitarci a riassumerla; Hilbert discute:

> p. 145 Sappiamo come ogni epoca abbia propri problemi che l'epoca successiva risolve oppure accantona perché sterili e li sostituisce con nuovi

([29]) Imitato poi nel 2000 con i 7 problemi dell'Istituto Clay per il millennio entrante, con annesso premio monetario. Al Congresso Hilbert presentò solo dieci problemi, gli altri comparvero nella stampa della relazione. Un 24-esimo problema fu preso in considerazione ma poi scartato, quello di precisare i criteri generali di semplicità. Un peccato, perché come vedremo Hilbert riteneva che quanto più rigorosi erano i metodi, tanto più erano semplici, o comportavano semplificazioni. Il primo problema della lista a essere risolto, negativamente, fu il terzo, sulla possibilità di dividere due poliedri qualunque dello stesso volume in uno stesso insieme di poliedri più piccoli, da Max Dehn nel 1902; sull'argomento si veda [Bartocci 2012].

([30]) Tra parentesi quadre esponiamo alcune parti riassunte. La citazione di diversi problemi da parte di Hilbert mostra come siano vari e istruttivi i legami tra argomenti che di solito sono considerati risultati specialistici ristretti. I numeri di pagina si riferiscono alla traduzione italiana di [Hilbert 1900b].

problemi. [. . .] Un campo della conoscenza è vitale, finché offre un'abbondanza di problemi; una scarsità di problemi significa la sua morte o la fine del suo sviluppo autonomo.

p. 146 Un antico matematico francese ha detto: una teoria matematica [e lo stesso per un problema matematico] non può essere considerata perfetta, finché non è stata resa così chiara da poterla spiegare al primo uomo che si incontri per strada.

p. 147 [Due problemi menzionati, l'ultimo teorema di Fermat e quello dei tre corpi] ci appaiono quasi come due poli contrapposti: il primo una libera invenzione dell'intelletto puro ed appartenente al campo della teoria astratta dei numeri, l'altro impostoci dall'astronomia e necessario per la conoscenza dei più semplici e fondamentali fenomeni naturali. Ma spesso succede anche che uno stesso problema particolare si presenti nelle discipline più diverse della matematica. Così, il *problema della linea più breve* svolge un ruolo importante, storico e teoretico, nei fondamenti della geometria, nella teoria delle linee e delle superfici curve, nella meccanica e nel calcolo delle variazioni. [. . .] [I]l *problema dei poliedri regolari* nella geometria elementare, nella teoria dei gruppi e delle equazioni, e nella teoria delle equazioni differenziali lineari.

p. 148 Sicuramente, i primi e più antichi problemi in ogni branca della matematica traggono origine dall'esperienza e sono stati suscitati dal mondo dei fenomeni esterni. Persino le regole del *calcolo con i numeri interi* sono state scoperte proprio in questo modo, in un più basso stadio culturale dell'umanità; ed anche oggi il bambino impara l'uso di queste leggi con il metodo empirico [. . .]. Con lo sviluppo di una disciplina matematica, però, lo spirito umano, incoraggiato dalla riuscita delle soluzioni, diviene consapevole della propria autonomia; esso trae da se stesso, e spesso senza riconoscibili stimoli esterni, nuovi e fecondi problemi, eseguendo soltanto nel modo più felice combinazioni logiche, generalizzazioni e particolarizzazioni, separazione e unione dei concetti, ed emerge in primo piano [lo spirito umano] come il vero e proprio soggetto interrogante [. . .].

[E] non di rado, mentre cerchiamo di acquisire questi nuovi campi al regno del pensiero puro, troviamo la risposta ad antichi problemi irrisolti e facciamo avanzare nel modo migliore le vecchie teorie. Su questo gioco, alterno e sempre rinnovantesi, tra pensiero ed esperienza, si basano – mi pare – quelle numerose e sorprendenti analogie, e quella apparente armonia prestabilita, che il matematico percepisce così spesso nelle problematiche, nei metodi e nei concetti dei diversi settori di conoscenza.

p. 149 Ci soffermiamo ancora, brevemente, sui requisiti generali che legittimamente vanno posti alla soluzione di un problema matematico. Penso innanzitutto a questo: si deve riuscire a fare vedere la correttezza della risposta mediante un numero finito di inferenze e precisamente in base a un numero finito di ipotesi che si trovano nella presentazione di un problema e che ogni volta vanno formulate con esattezza. Questo requisito della deduzione logica mediante un numero finito di inferenze è nient'altro che il requisito del rigore nella conduzione della dimostrazione.

[. . .] Un nuovo problema, specialmente se proviene dal mondo dei fenomeni esterni, è come un giovane tralcio che cresce e dà frutti solo se, con cura e secondo le rigorose regole del giardiniere, viene innestato sul vecchio tronco [. . .].

Inoltre, è un errore credere che il rigore nella conduzione della dimostrazione sia nemico della semplicità. Al contrario, numerosi esempi ci confermano che i metodi rigorosi sono anche i più semplici e i più facili da cogliere. Lo sforzo verso il rigore ci costringe appunto a trovare metodi più semplici di argomentazione: spesso ci apre anche la via a metodi che sono più passibili di sviluppo rispetto a quelli vecchi e meno rigorosi.

p. 150 Esempi: la semplificazione [. . .] della teoria delle curve algebriche mediante [. . .] l'introduzione di strumenti trascendenti; la dimostrazione che le serie di potenze ammettono differenziazione e integrazione membro a membro [. . .]; il calcolo delle variazioni [. . .] a opera di Weierstrass, nella dimostrazione dei criteri necessari e sufficienti per la presenza di un massimo e di un minimo [. . .]

[Non sono soltanto i concetti dell'analisi a essere capaci di una trattazione pienamente rigorosa, lo sono anche i concetti della geometria, della meccanica e della fisica, e l'afflusso di nuovo materiale dal mondo esterno.] Ma che importante nervo vitale verrebbe reciso alla matematica, con l'estirpazione della geometria e fisica matematica! Ritengo, al contrario, che dovunque emergano concetti matematici, da parte della gnoseologia oppure in geometria o nelle teorie della scienza naturale, sorge per la matematica il compito di indagare i principi che stanno alla base di questi concetti e di fissarli mediante un sistema di assiomi semplice e completo, in modo tale che la precisione dei nuovi concetti e la loro utilizzabilità nella deduzione non siano in nessun aspetto inferiori rispetto a quelle dei vecchi concetti aritmetici. ([31])

p. 151 Ai nuovi concetti spettano necessariamente anche nuovi segni: noi li scegliamo in modo che ci ricordino i fenomeni che avevano motivato la formazione dei nuovi concetti. [...] I segni aritmetici sono figure scritte e le figure geometriche sono formule disegnate. [...] L'uso dei segni geometrici quale rigoroso strumento dimostrativo presuppone la precisa conoscenza e la totale padronanza degli assiomi che stanno alla base di quelle figure; quindi, perché queste figure siano incorporate nel tesoro generale dei segni matematici, è necessaria una rigorosa indagine assiomatica del loro contenuto intuitivo.

p. 151 [...] [N]elle ricerche aritmetiche, così come nelle ricerche geometriche, noi non seguiamo in ogni momento la catena delle operazioni mentali fino agli assiomi; invece, in aritmetica, né più né meno che in geometria, specialmente al primo impatto con un problema, ricorriamo a certe combinazioni rapide, inconsapevoli, non definitivamente sicure, fidandoci di una certa sensibilità aritmetica verso il modo d'agire dei segni aritmetici, senza la quale progrediremmo nell'aritmetica altrettanto poco quanto senza l'immaginazione geometrica faremmo nella geometria.

p. 152 [Sulle difficoltà possibilmente presentate dai problemi matematici e eventuale loro superamento.] Se non si riesce a dare una risposta ad un problema matematico, spesso la ragione sta nel non aver ancora compreso il punto di vista più generale dal quale il problema dato appare solamente con un singolo membro di una catena di problemi affini. Con la scoperta di questo punto di vista, spesso non solo diventa più accessibile alla nostra indagine il problema dato, ma arriviamo anche al tempo stesso a possedere un metodo applicabile ai problemi affini [esempio: introduzione da parte di Cauchy dei cammini di integrazione complessi nella teoria dell'integrale definito].

Nel lavoro intorno ai problemi matematici un ruolo ancora più importante della generalizzazione credo venga svolto dalla specializzazione. Forse nella maggior parte dei casi nei quali cerchiamo invano la risposta ad una questione, la causa dell'insuccesso sta nel non avere ancora risolto, o nel non aver ancora risolto completamente, problemi più semplici e più facili di quello che ci sta innanzi.

A volte capita che cerchiamo la risposta sotto ipotesi insufficienti ovvero in un senso sbagliato, e che quindi non raggiungiamo la meta. Sorge allora il compito di dimostrare l'impossibilità della soluzione del problema sotto le ipotesi date e nel senso voluto. Tali dimostrazioni di impossibilità furono compiute già dagli antichi quando, ad esempio, dimostrarono che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele sta in un rapporto irrazionale con i cateti.

p. 153 Nella matematica moderna la questione dell'impossibilità svolge un ruolo eminente, e ci rendiamo così conto che antichi e difficili problemi (quali la dimostrazione dell'assioma delle parallele, la quadratura del cerchio o la risoluzione delle equazioni di 5° grado mediante radicali) hanno trovato una soluzione pienamente soddisfacente e rigorosa anche se in un senso diverso da quello originariamente inteso.

È proprio questo fatto rimarchevole, accanto ad altre ragioni filosofiche, a far sorgere in noi una convinzione, che è certamente condivisa da ogni matematico, ma che finora non è stata consolidata da alcuno mediante una dimostrazione: intendo la convinzione che ogni problema matematico determinato debba essere necessariamente passibile di una rigorosa sistemazione, o riuscendo a dare la risposta alla questione posta oppure mostrando l'impossibilità di una sua soluzione e quindi la necessità dell'insuccesso di ogni tentativo. [Problemi aperti: irrazionalità della costante C di Eulero-Mascheroni; esistenza di infiniti numeri primi della forma $2^n + 1$.]

[...] Questo assioma della risolubilità di ogni problema è una peculiarità propria del pensiero matematico, o non è forse una legge generale che inerisce all'intima natura del nostro intelletto, quella per cui il nostro intelletto è capace di dare una risposta a tutte le questioni da lui poste? Anche in altre scienze compaiono antichi problemi che mediante la dimostrazione di impossibilità sono stati risolti nel modo più soddisfacente e con supremo vantaggio della scienza. Ricordo il problema del perpetuum mobile. [Dopo vari tentativi di costruirlo, si cercarono le relazioni che devono sussistere tra le forze naturali per far risultare impossibile un perpetuum mobile] e

([31]) In [Hilbert 1917, trad. it. p. 179] dirà che il lavoro di assiomatizzazione comporta una continua dinamica: "Nei singoli campi conoscitivi, si è fatta sentire l'esigenza di fondare gli stessi teoremi fondamentali ritenuti come assiomi [...] la riconduzione a certi teoremi più profondi che, a loro volta, possono quindi essere riguardati come nuovi assiomi al posto dei teoremi da dimostrare" e permettono collegamenti con altre teorie. [NdA] questa impostazione ribaltata del problema condusse alla scoperta della legge della conservazione dell'energia [. . .].

Questa convinzione della risolubilità di ogni problema matematico è per noi un potente stimolo durante il lavoro. Dentro di noi sentiamo continuamente l'appello: *Ecco il problema, cerca la soluzione. La puoi trovare mediante il puro pensiero; perché in matematica non c'è l'"Ignorabimus'*. ([32])

Non tutti sanno che in questa affermazione Hilbert, nella disputa sull'*Ignorabimus* innescata da Emil Du Bois-Reymond (1818-1896) non è isolato, era stato anticipato da Edgar A. Poe in *Lo scarabeo d'oro* del 1843, che scriveva: "Dubito che l'ingegno umano possa costruire un enigma che l'ingegno umano, applicandosi a fondo, non sappia risolvere".

Segue la presentazione del primo problema, quello di Cantor di determinare la potenza del continuo ("ipotesi del continuo"), in cui è compreso un altro problema sollevato da Cantor, la possibilità di bene ordinare il continuo: a Hilbert "sembra altrettanto desiderabile *ottenere una dimostrazione diretta di questa notevole affermazione di Cantor*; ad esempio, attraverso l'esibizione effettiva di tale ordinamento". ([33])

La conclusione della prolusione discute la possibilità che anche la scienza matematica, così ricca e varia come testimoniano i problemi discussi, non si avvii a subire lo stesso destino di altre scienze, dividendosi in sottoscienze. Al contrario, afferma che "più una teoria matematica viene sviluppata, tanto più armoniosamente e unitariamente si configura la sua costruzione e tanto più vengono scoperte relazioni insospettate tra branche fino allora separate". E siccome nello stesso tempo si individuano "strumenti più penetranti e metodi più semplici che facilitano la comprensione delle teorie precedenti e mettono in pensione vecchi e complicati modi di procedere", al singolo ricercatore diventa più agevole orientarsi nelle diverse branche.

Si sarà notata nell'esposizione di Hilbert l'insistenza sul fatto che la soluzione di un problema richiede una dimostrazione, e la dimostrazione deve essere finita; per ora Hilbert non esplicita altre condizioni. I requisiti generali della soluzione di un problema sono il numero finito delle ipotesi e un numero finito delle inferenze, ed essi implicano la semplicità dei metodi rigorosi.

Tuttavia Hilbert rifletteva sui requisiti, e lo si vede nella discussione del decimo problema, *Decisione sulla risolubilità di una equazione diofantea*, dove esordisce dicendo: "sia data una equazione diofantea con certe incognite e a coefficienti razionali interi. *Si deve dare un procedimento, con il quale si possa decidere, mediante un numero finito di operazioni, se l'equazione è risolubile in numeri razionali interi*". ([34])

A parte il numero finito di operazioni, compaiono termini che sono abbastanza nuovi, e la presentazione è del tutto moderna anche se mancano le necessarie precisazioni. I "procedimenti" risalgono almeno a Euclide, benché negli *Elementi* non sia usato un simile termine, ma siano semplicemente sviluppati quando servono procedimenti per ottenere certi risultati; in particolare sono ben noti *Elementi* VII, 2: "Dati due numeri non primi tra loro trovare (εὑρεῖν) la loro massima misura comune", risolto iterando la sottrazione, oppure *Elementi* X, 3: "Date due grandezze commensurabili trovare la loro massima misura comune".

I concetti di "procedimento" e "decisione" sono esempi di astrazione. I procedimenti di per sé non sono una grandezza matematica, si usano anche in lavori profani, ma ora diventano tali perché la loro funzione è caratteristica della matematica e delicata, quando devono concludersi con una biforcazione: o trovare il risultato matematico che si cerca (le soluzioni di un'equazione per esempio) o trovare non un altro risultato ma la spiegazione del fatto che il risultato cercato non esiste, o almeno è diverso da quello ipotizzato. La *decisione* non è una scelta soggettiva ma il responso del procedimento stesso.

Per essere accettati i procedimenti devono soddisfare requisiti rigorosamente precisi: con finitezza per esempio s'intende la condizione che a ogni passo esista solo un numero finito di possibili

([32]) [Hilbert 1900b].

([33]) [Hilbert 1900b, trad. it. p. 155-6], sottolineatura nostra, ché la parola tornerà in seguito e assumerà un significato speciale.

([34]) C.vo di Hilbert.

proseguimenti; ciascuno dei quali deve consistere in un'operazione dimostrabilmente fattibile. Raccogliendo questo numero finito di condizioni si dovrebbe arrivare a una definizione matematica di "procedimento", e dei suoi sinonimi, dipendente dal linguaggio e dalla rappresentazione che s'intende usare ma valida per tutti i casi in cui si vuole risolvere un problema con la stessa fiducia che si ha nel calcolo numerico elementare. ([35]) Ne vedremo alcune.

4. – Alla ricerca delle procedure effettive

Negli sforzi di definire gli algoritmi è assente (fino a Post e a Turing) la metafora meccanica, che invece apparirebbe naturale, pensando anche solo ai precedenti della macchina di Blaise Pascal (1623-1662) del 1642, la pascalina, o a quella di Gottfried W. Leibniz del 1671. Leibniz sarebbe un altro antenato a cui risalire, non solo per la macchina che eseguiva le quattro operazioni e l'estrazione di radici, ma per l'aritmetica binaria, con convertitore decimale-binario e viceversa, e in particolare il progetto di un *calculus ratiocinator*. Esiste tuttavia uno iato tra gli scritti di Leibniz sull'argomento, peraltro non tutti conosciuti, e la loro ripresa alla fine dell'Ottocento, in particolare da Peano. ([36])

I passi elementari da applicare un numero finito di volte sono in sostanza applicazioni di regole che non comportano un'attività di pensiero, e sarebbe spontaneo chiamare "meccaniche". Qualche suggerimento in questa direzione, non sviluppato, si trova, per esempio in [Behmann 1922], che almeno userà la parola "meccanico". Heinrich Behmann (1891-1970) lavorava nel contesto dell'algebra della logica, dove i problemi di decisione, per la soddisfacibilità di formule o più in generale di sistemi di equazioni, erano nell'agenda corrente:

> Di fondamentale importanza per la soluzione di questo problema [della decisione (*Entscheidungsproblem*)] è la condizione che si ammettano come strumenti della dimostrazione solo *calcoli meccanici* che seguano date istruzioni, senza alcuna attività di pensiero in senso proprio. Si potrebbe, volendo, parlare di un pensiero *meccanico* o *di tipo meccanico* (forse si potrebbe in seguito far sì che la procedura fosse eseguita da una macchina).

Ma in generale i matematici diffidano, o diffidavano, della parola e dell'idea di macchina, di sapore ingegneristico, fin dal tempo di Platone. Quando dopo la seconda guerra mondiale von Neumann costruirà a Princeton il suo calcolatore, ci saranno forti proteste e resistenze da parte dei matematici dell'Institute for Advanced Study, insieme agli umanisti, per la presenza di una macchina all'istituto. ([37]) Non ha avuto molta influenza neanche il lavoro pionieristico di Stanley Jevons (1835-1882) con il suo pianoforte logico del 1870, per non parlare della macchina di Babbage. Neanche, nel 1906, le macchine di Annibale Pastore (1868-1956).

La vicenda delle procedure seguirà perciò un'altra strada, indicata da Hilbert. Questi nel 1917, dopo un periodo dedicato ad altri studi, riprende la riflessione sul metodo assiomatico, insistendo sulla necessità di dimostrare per ogni campo conoscitivo la non contraddittorietà degli assiomi. Per teorie come quelle dei numeri naturali e degli insiemi, non ci si può ricondurre ad altri campi cognitivi, perché non ci sarebbe altra disciplina a cui fare ricorso oltre alla logica. ([38]) Tuttavia la questione della non-contraddittorietà non è isolata, ma solo una di un grande ambito gnoseologico di questioni "di tonalità specificamente matematiche", per classificare il quale cita: "la questione della *risolubilità* in linea di principio *di ogni problema matematico*, la questione della *controllabilità* a posteriori del risultato di una ricerca matematica, [...] un *criterio di semplicità* per le dimostrazioni matematiche, la questione del rapporto tra *contenutisticità e formalismo* in matematica e in logica, e infine la questione della

([35]) E quindi forse potremmo dire la certezza della verità.

([36]) Nuovi manoscritti furono scoperti nel 1899 nella biblioteca di Hannover da Giovanni Vacca (1872-1953), e studiati da [Couturat 1905].

([37]) Si veda la ricostruzione di [Dyson 2012].

([38]) Motivo per cui riferendosi alla "grandiosa impresa" Russelliana, che probabilmente non aveva mai letto, o considerato criticamente, dichiara di vedere "nell'assiomatizzazione della logica" il coronamento della fondazione.

decidibilità di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni". ([39])

L'ultima di quelle citate è la più nota e discussa, perché "tocca profondamente l'essenza del pensiero matematico". Hilbert si sofferma su due esempi che mostrano come non bastino dimostrazioni, per quanto con tutti i crismi della finitezza, per risolvere problemi, ma se ne debbano costruire *ad hoc* trovando la strada con le indicazioni giuste. ([40])

In due conferenze del 1922 Hilbert, allo scopo di impostare una dimostrazione della non contraddittorietà delle teorie che trattavano l'infinito, introduce una distinzione tra matematica e metamatematica (in particolare in [Hilbert 1922b]). La matematica è quella corrente, ma formalizzata: a questo scopo usa metodi che chiama finitari [*finit*] per la trattazione dei segni, sia matematici sia logici della logica del primo ordine. La metamatematica è la teoria dei segni, che si sviluppa con considerazioni contenutistiche (opposto di formali). Con il termine nuovo *finit* non vuole indicare solo la finitezza, ma suggerire di aver individuato forse il significato di *effettivo*.

"Esistono delle precondizioni indispensabili per l'uso del ragionamento logico contenutistico. Nel riconoscere che esistono tali precondizioni e che di esse si deve tenere conto, noi ci troviamo d'accordo con i filosofi, in particolare con Kant. Già Kant ha insegnato – e ciò costituisce una parte integrante della sua filosofia – che la matematica dispone di un contenuto assicurato indipendentemente da ogni logica e quindi non può mai essere fondata mediante la sola logica, per cui anche i tentativi di Frege e di Dedekind dovevano fallire. Anzi, come precondizione per l'uso delle inferenze logiche e per l'effettuazione di operazioni logiche, deve già essere dato qualcosa nella rappresentazione: certi oggetti concreti extra-logici, che esistono intuitivamente come qualcosa di immediato, prima di ogni pensiero. Se il ragionamento logico deve essere sicuro, questi oggetti devono lasciarsi pienamente dominare, in tutte le loro parti; e, insieme agli oggetti, la loro esibizione, la loro distinzione, il loro susseguirsi, il loro essere l'uno accanto all'altro deve essere dato intuitivamente come qualcosa che non si lascia ridurre ancora a qualcos'altro e che non richiede una riduzione". ([41])

Queste manipolazioni appartengono alla metamatematica: "per mezzo di una logica 'finitaria' con considerazioni puramente intuitive, fra le quali si collocano anche la ricorsione e l'induzione intuitiva per una data totalità finita, [si può ottenere] anche la teoria elementare dei numeri", ([42]) senza ricorrere ad altri procedimenti.

E con questa logica si può procedere all'assiomatizzazione. Assiomatizzare è fondare, sia pure in modo dinamico, non definitivo. Ma ha due aspetti, rendere sicuri i fondamenti, e anche trattare questioni matematiche di tipo fondazionale.

La "*decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni" ora può rientrare in un problema generale, l'*Entscheidungsproblem*. Questo era noto, nella forma in cui sarà esposto in [Hilbert 1928], come il problema di "determinare se una data formula qualsiasi del calcolo dei predicati è universalmente valida o no". ([43])

Gli autori Hilbert e Ackermann precisavano che il problema si può ritenere risolto solo se "è conosciuto un procedimento (*Verfahren*) per mezzo del quale

([39]) [Hilbert 1917, trad. it. p. 185].

([40]) A p. 186, cita la propria dimostrazione generale del fatto che nella teoria degli invarianti algebrici ce ne sono sempre un numero finito di razionali interi mediante cui si possono esprimere in modo razionale intero tutti gli altri. Ma è impossibile modificare tale dimostrazione in modo da ottenere l'indicazione "di un confine per il numero finito di invarianti del sistema completo o addirittura giungere a una loro effettiva determinazione"; altre argomentazioni e principi sono stati necessari per riconoscere che la determinazione del sistema completo di invarianti richiede solo operazioni il cui numero è finito, e al di sotto di un confine prefissabile prima del calcolo. Un secondo esempio è fornito dalla teoria delle superfici del quarto ordine, a proposito del numero massimo (finito) di falde reali separate che possono costituire una tale superficie; non basta dimostrare per assurdo che non possono essere infinite, ma bisogna contare i punti d'intersezione.

([41]) [Hilbert 1925, trad. it. p. 243].

([42]) Per quanto nella versione definitiva (ivi, p. 218, nota 3) si potrà anche presentarla con assiomi.

([43]) La logica a cui si faceva riferimento era il calcolo dei predicati di ordine superiore, ma il problema era già significativo per il calcolo dei predicati del primo ordine, che Hilbert chiamava calcolo funzionale ristretto.

per una data espressione logica si possa decidere la validità (o rispettivamente la soddisfacibilità) con un numero finito di operazioni". E concludevano:

> Il problema della decisione deve essere considerato il problema fondamentale della logica matematica. ([44])

Quindi Hilbert intende con *Entscheidungproblem* un problema unico, la risolubilità di ogni problema. Non è difficile capire come si arrivi a concepire questa visione. Se la soluzione A di un qualsiasi problema dipende, ed è dimostrata tale in base a un numero finito T di assiomi della teoria a cui appartiene, allora $\wedge T \to A$ è universalmente valida, o A è logicamente deducibile da $\wedge T$, ([45]) e viceversa. Hilbert riteneva forse che una risposta positiva al problema della decisione per la logica avrebbe dimostrato che ogni problema matematico era risolubile, una tesi a cui era ambiguamente affezionato.

Tanto è vero che qui Hilbert cita se stesso, ripetendo alla lettera alcune affermazioni del 1900, relative alla "tesi secondo cui ogni problema matematico è suscettibile di soluzione", sfumandola solo a una ipotesi di consistenza, cioè di non essere refutabile: "Tutti noi ne siamo convinti. Infatti uno degli stimoli principali ad occuparci di un problema matematico è che sentiamo continuamente dentro di noi l'appello: ecco il problema, trova la soluzione; la puoi trovare mediante il pensiero; perché in matematica non c'è l'*ignorabimus*. Ora la mia teoria della dimostrazione non può certo indicare in generale una via lungo la quale ogni problema matematico si lasci risolvere: una tale via neanche esiste. Tuttavia rientra interamente nell'ambito della nostra teoria la dimostrazione che è non contraddittoria l'ipotesi della risolubilità di ogni problema matematico". ([46])

Le aspettative erano contrastanti; i matematici più famosi paventavano tale eventualità. Per John von Neumann (1891-1970) la pratica corrente della matematica, basata su metodi euristici, ha senso proprio a motivo della non decidibilità dell'*Entscheidungsproblem*. Afferma di credere che non esista una soluzione per il problema della decisione, ma di non sapere come potrebbe svolgersi una dimostrazione di indecidibilità. Sarebbe necessaria una definizione più precisa, come risulta anche dalla richiesta di Behmann che "precisi limiti siano dati all'interno dei quali una prescrizione effettiva del genere può essere trovata [per decidere in un numero finito di passi la verità o falsità di una asserzione logica]".

Secondo Godfrey H. Hardy (1840-1928):

> Non esiste naturalmente un teorema del genere, per fortuna, perché se ci fosse noi avremmo un insieme meccanico di regole per la soluzione di tutti i problemi matematici, e il nostro lavoro come matematici verrebbe a finire. ([47])

Lo stesso timore (non per le macchine ma per la banalizzazione) era stato espresso, in relazione a un problema collegato, da Hermann Weyl (1885-1955):

> Se si riuscisse un giorno [a dimostrare la completezza della geometria elementare] ([48]) questa intuizione ci aprirebbe la strada per decidere la verità o falsità di ogni giudizio geometrico [...] applicando metodicamente una certa tecnica deduttiva ('con un numero finito di passi'): la matematica si troverebbe *banalizzata*, almeno in linea di principio. ([49])

In effetti la banalizzazione sembrava potesse essere plausibile sulla base del successo della formalizzazione delle teorie matematiche fondamentali, iniziata con i *Principia mathematica* di Russell e Whitehead e proseguita negli anni venti da Hilbert.

Tuttavia dal punto di vista scientifico i progressi erano incoraggianti: la logica proposizionale era stata dimostrata decidibile nel 1918 da Paul Bernays (1888-1977) (risultato non pubblicato ma noto), e nel

([44]) Ora nei testi di logica la soluzione del problema della decisione è presentata in generale come corollario di altri risultati. Per esempio si veda in [Lolli 2011, Teor. 13, p. 204] la dimostrazione che se il sistema finito di assiomi per l'aritmetica Q è non contraddittorio, per qualsiasi T tale che $T \cup \mathsf{Q}$ è non contraddittorio, la teoria di T non è decidibile.

([45]) $\wedge T$ è la congiunzione di tutti gli elementi di T. Le due versioni, semantica e deduttiva, diventeranno equivalenti con il teorema di completezza logica di Kurt Gödel (1906-1978) del 1929, in [Gödel 1929], pubblicato nel 1930.

([46]) [Hilbert 1925, trad. it. p. 254].

([47]) [Hardy 1929]. Hardy con "insieme meccanico di regole" allude alle regole della logica.

([48]) Una teoria assiomatizzata completa, cioè tale che, per ogni formula A, o A è dimostrabile nella teoria, o la sua negazione $\neg A$ lo è, è decidibile.

([49]) [Weyl 1918].

1920 da Emil Post (1897-1954), e così il calcolo dei predicati monadici da Leopold Löwenheim (1878-1957) nel 1915. L'argomento della decidibilità era al centro dell'attenzione dell'algebra della logica. Löwenheim trasformava ogni proposizione del suo "calcolo dei relativi" in una equazione binaria, sicché se si fosse risolto il problema della decisione per la validità di tali equazioni ogni problema matematico sarebbe diventato decidibile.

L'accumulo di risultati portava a ridurre dall'alto il problema della decisione, per formule qualunque, a formule della forma $\exists\exists\exists\forall\ldots\forall$, cioè con un prefisso costituito da tre quantificatori esistenziali seguiti da un blocco di un numero finito arbitrario di quantificatori universali, e una matrice priva di quantificatori. Dal basso invece si arrivava a trovare un metodo di decisione per formule $\exists\exists\forall\ldots\forall$. (50) L'ottimismo pareva tecnicamente se non moralmente giustificato: un solo quantificatore si frapponeva alla soluzione positiva del problema.

Invece nel 1936 si ha la risposta negativa, contemporaneamente e indipendentemente da parte di Alonzo Church (1903-1995), di Alan Turing, e di Post: un caso di scoperta multipla che, come al solito, non ha nulla di miracoloso ma dipende dal fatto che è giunto a maturazione un processo di crescita; in questo caso si tratta della comprensione delle proprietà delle funzioni ricorsive primitive, al tempo chiamate solo ricorsive.

La storia che si completava nel 1936 infatti non era tanto quella della soluzione del problema della decisione in sé, quanto piuttosto quella della ricerca della definizione del concetto di funzione effettivamente calcolabile.

Due linee di ricerca si erano rafforzate a vicenda, a partire almeno dal 1900: da una parte quella logica, che abbiamo accennato, dall'altra quella della restrizione del concetto di funzione, come aveva auspicato Borel, a funzioni calcolabili in modo sicuro e affidabile, non soggetti alle insidie dell'infinito attuale, come vedremo.

(50) Entrambi questi ultimi perfezionamenti sono dovuti a Gödel, in [Gödel 1932] e [Gödel 1933], anche se Gödel considerava il problema della soddisfacibilità, e quindi i suoi quantificatori universali ed esistenziali sono scambiati.

Le funzioni calcolabili davano corpo alla definizione di metodo effettivo, o processo, algoritmo, "procedura finita" (dirà Gödel), per la soluzione di un problema.

Prima di esaminare questo filone ricordiamo che negli anni successivi alcuni problemi che diventano noti proprio con il termine "problema di ... o del", e anche se non considerati da Hilbert, sono oggetto di intensa ricerca, per esempio il problema della parola per gruppi e semigruppi, proposto da parte di Max Dehn (1878-1952) e Axel Thue (1863-1922) chiedendo che la soluzione consista in un "metodo". (51) Thue chiedeva che il numero finito di passi fosse calcolabile in anticipo, richiesta eccessiva.

4.1 – *L'informatica. Charles Babbage*

Il fatidico 1936 culmina nella contemporanea definizione della calcolabilità effettiva da parte di Church, Post e Turing proposta come quadro corretto per lo studio dei problemi di decidibilità. Con tutte le cautele, si può individuare un concetto fondamentale, che sostiene e giustifica l'intera disciplina, ed è il concetto di "effettivo".

Prima di arrivare a questo esito, è giusto ricordare qualche anticipazione, non tutte, ma c'è chi risale addirittura, non senza qualche ragione, a François Viète (1540-1603); con il suo lavoro in algebra, grazie a un arricchimento sia pure non totale ma che fa

(51) I problemi della parola hanno a che fare con il riconoscimento della equivalenza o mutua riducibilità di parole, intese come successioni finite di simboli nel contesto opportuno, per esempio le rappresentazioni di un gruppo. Notazioni: su un insieme di elementi I chiamiamo parole le successioni finite di elementi di I; definito per ogni elemento x l'elemento x^{-1} suo contiguo, chiamiamo ridotta una parola se non contiene due elementi x e x^{-1} contigui; è sempre possibile trasformare una parola in una ridotta, e diciamo che due parole sono equivalenti se generano la stessa parola ridotta; infine definiamo un prodotto di due parole ridotte concatenando le due parole e riducendo se possibile il risultato; si ottiene così il gruppo libero sull'insieme I indicato da $\langle I\rangle$. Il problema della parola diventa quello di decidere se due parole descrivono lo stesso elemento del gruppo. Se ora $R \subseteq \langle I\rangle$ è un insieme di parole, il gruppo di presentazione $\langle I \mid R\rangle$ è il più grande gruppo quoziente di $\langle I\rangle$ in cui ogni elemento di R è uguagliato all'identità – ed è una presentazione di I. Esistono presentazioni $\langle I \mid R\rangle$ per le quali nessun algoritmo può risolvere il problema della parola per la presentazione.

compiere un passo avanti decisivo del linguaggio e dell'alfabeto (per esempio la distinzione tra incognite e parametri) egli è all'origine dell'idea di "simbolo", nell'accezione matematica.

A fianco dei progressi dell'algebra è da tener presente la nascita dell'informatica. Si riconosce usualmente nella descrizione di Charles Babbage (1791-1871) quella di una moderna macchina a registri. Le soluzioni innovative sono soprattutto concettuali, e sono dovute oltre che a Babbage ai commenti di Luigi Federico Menabrea (1809-1896) e di Ada Augusta, Lady Lovelace (1815-1852). La prima invenzione da sottolineare, quella che nell'opinione di Babbage ha reso possibile la concezione della macchina, è quella di una notazione meccanica: la complessità delle parti e dei movimenti richiede per essere capita e dominata l'uso di una notazione speciale; quella inventata da Babbage è formata da frecce di vario tipo, continue, tratteggiate, tagliate, di cerchi vuoti o pieni e così via, a indicare le varie parti o tipi di parte e la loro connessione con altre e il loro stato di movimento o quiete e l'influenza su altre e da parte di altre. Non si tratta però di un contributo nuovo al disegno meccanico, al disegno necessario per il progetto, è ben di più. "Per mezzo della Notazione Meccanica, la Macchina Analitica è diventata una realtà, perché è diventata suscettibile di dimostrazione". ([52]) Si noti che Babbage parla di dimostrazione, non di costruzione, per quanto anch'essa conseguentemente fattibile.

Un motivo del fascino è che l'informatica ha messo in evidenza nelle familiari attività del pensare e del calcolare una complessità senza riscontro in altre teorie e mestieri: dal bit a qualche centinaia di megabyte, dall'unità di misura del microsecondo a un'ora di lavoro di un calcolatore c'è un salto di ordini di grandezza di 10^9, tutto dominato e controllato da un'unica tecnologia. ([53])

Nello stesso tempo "effettivo" diventa implicitamente definito dal fatto che le operazioni sono eseguite da una macchina, rivalutando tutti i precedenti suggerimenti in questa direzione.

([52]) [Babbage 1864, p. 53].
([53]) [Dijkstra 1989].

4.2 – *Le funzioni ricorsive*

Nell'andare a ritroso alla ricerca dei precedenti si potrebbe risalire a Hermann Grassmann (1809-1877) che in [Grassmann 1861] aveva fatto uso sistematico delle definizioni ricorsive primitive per la presentazione dell'aritmetica elementare, influenzando Dedekind e Peano.

Per esempio Grassmann presentava la definizione di somma in questo modo: "Se a e b sono termini qualunque della serie numerica fondamentale, intenderemo per somma $a + b$ quel termine di essa per cui è vera la formula $a + (b + e) = (a + b) + e$, dove e denota l'unità positiva"; non era una definizione scontata, né universalmente riconosciuta: Frege ne denunciava la circolarità e la mancanza di una dimostrazione di esistenza. ([54]) Grassmann tra l'altro fu forse il primo a sfruttare la rappresentazione dei numeri naturali come somme di 1.

Richard Dedekind (1831-1916) dopo aver dato la definizione insiemistica della struttura dei numeri naturali, in [Dedekind 1888], come il più piccolo insieme che contiene 1 ed è chiuso rispetto alla iniezione "successore", la faceva immediatamente seguire dal teorema di dimostrazione per induzione, dal teorema del minimo e dal teorema delle definizioni per induzione (in seguito chiamate "per ricorsione (primitiva)"):

> 80. *Teorema d'induzione completa* (inferenza da n a n'). Per dimostrare che un teorema vale per tutti i numeri n di una catena m_0, ([55]) basta mostrare:
>
> ρ. che vale per $n = m_0$ e
>
> σ. che dalla validità del teorema per un numero n della catena m_0 segue sempre la sua validità per il numero successivo n'. ([56])
>
> 96. *Teorema*. In ogni parte T di N esiste uno e soltanto un numero *minimo*, cioè un numero k che è minore di

([54]) [Frege 1884, trad. it. pag. 229].
([55]) [La catena m_0 è l'intersezione di tutti gli insiemi di numeri a cui appartiene m_0 e che sono chiusi rispetto al successore. La dizione "inferenza da n a n'" rimanda alla tradizionale descrizione dell'induzione nel Settecento e Ottocento. NdA]
([56]) [Dedekind 1888, p. 102 ed. it. Bibliopolis].

ogni altro numero contenuto in T. ([57])

126. *Teorema della definizione per induzione*. Sia θ una rappresentazione qualsiasi (simile o no) di un sistema Ω in se stesso, e inoltre sia ω un determinato elemento di Ω, allora esiste una e una sola rappresentazione ψ della serie numerica N, che soddisfa le condizioni:

I. $\psi(N) \subseteq \Omega$
II. $\psi(1) = \omega$
III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$, dove n è un numero qualsiasi. ([58])

I due ultimi teoremi prefigurano rispettivamente l'operatore di minimo e la ricorsione primitiva come metodi per la definizione di funzioni.

Si può attribuire a Thoralf Skolem (1887-1963) la mossa di isolare una classe di funzioni numeriche (tra numeri naturali) ottenibili grazie ai teoremi di Dedekind con la definizione delle funzioni ricorsive primitive, in [Skolem 1923], e di introdurre il "paradigma ricorsivo" (*rekurrierende Denkweise*).

Le funzioni ricorsive primitive sono una classe di funzioni numeriche che hanno un particolare attrazione sia dal punto di vista computazionale che da quello fondazionale. Sono le funzioni che si ottengono iterando un numero finito di volte lo schema di composizione di funzioni e quello di ricorsione primitiva:

$$\begin{cases} f(\vec{x},0) & = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x},y') & = h(\vec{x},y,f(\vec{x},y)) \end{cases}$$

a partire da funzioni iniziali (che di solito oltre alla funzione successore comprendono funzioni costanti e funzioni proiezione). Esse sono evidentemente praticamente calcolabili visto che le equazioni che le definiscono rimandano per ogni valore da un argomento all'argomento precedente; e sono una classe molto ampia, perché alla ricorsione primitiva sono riconducibili altre forme di definizione, come la ricorsione simultanea su più variabili, o la ricorsione sul decorso dei valori, oltre ad altre forme di definizione, quali la distinzione per casi, la ricerca limitata del minimo. Ma a parte l'ampiezza della classe, la ricorsione primitiva appare proprio una forma di definizione intrinseca alla natura dei numeri, e giustificata da questa.

Una questione dibattuta e controversa è se anche i metodi combinatori che Hilbert in mancanza di una caratterizzazione precisa aveva chiamato finitisti (includendo anche il principio di induzione) possano o debbano essere identificati con le funzioni ricorsive primitive.

In campo strettamente logico, è Gödel che sistematizza ([Gödel 1931, § 2]), in una lista di 46 proposizioni, le proprietà della classe delle funzioni ricorsive primitive, dal punto di vista dell'ampiezza, delle proprietà di chiusura e della definibilità. A Gödel le funzioni e le relazioni ricorsive primitive interessano per uno specifico motivo, in quanto sono esse quelle che intervengono nella codifica dei linguaggi (in corrispondenza alle operazioni e relazioni sintattiche).

Tuttavia nonostante tali funzioni siano addirittura sovrabbondanti per le necessità della codifica – bastano le cosiddette elementari – ([59]), Gödel dopo il 1930 continua a studiare il problema di trovare una definizione più generale di ricorsione; la ragione è che egli cerca una definizione di "sistema formale" che permetta di dare la massima generalità possibile ai teoremi di incompletezza: in [Gödel 1934] un sistema formale è definito come " un sistema di simboli con regole per il loro uso [...] le regole date da *procedure finite*."

Le funzioni *ricorsive primitive* su cui Skolem aveva attirato l'attenzione sono così chiamate da quando si capì che esse non esauriscono le funzioni effettivamente calcolabili e che si possono definire con qualche forma di ricorsione, " a motivo della varietà di modi nei quali possiamo passare da n a $n+1$". ([60])

([57]) [ivi, p. 105. Con "parte" qui Dedekind intende sottoinsieme non vuoto. Dedekind usa N per l'insieme dei numeri naturali, ora indicato con $\mathbb{N}$. NdA].

([58]) [ivi, p. 111; "simile" significa "iniettiva". Si preferisce ora parlare di definizioni per ricorsione. NdA]

([59]) Le funzioni elementari sono la classe di funzioni che, a partire da quelle iniziali e da somma e sottrazione (intesa come $|x-y|$), è chiusa rispetto alla sommatoria e produttoria limitate.

([60]) [Hilbert 1925].

La funzione di Ackermann (1928) si ottiene diagonalizzando le funzioni ricorsive primitive (cresce più in fretta di tutte le ricorsive primitive), e quindi non è ricorsiva primitiva, pur essendo calcolabile in un numero finito di passi per ogni argomento. Hilbert pensava di definirla introducendo ricorsioni per funzionali di tipo superiore, ma Wilhelm Ackermann (1896-1962) ha mostrato che essa è definibile da un sistema di equazioni: la funzione è $\varphi(x, y, z)$ dove

$$\begin{cases} \varphi(0, a, b) & = a + b \\ \varphi(n, a, 1) & = a \\ \varphi(n + 1, a, b) & = \varphi(n, a, \varphi(n + 1, a, b - 1)), \end{cases}$$

ogni $\varphi(n + 1, a, b)$ essendo l'iterazione di $\varphi(n, a, b)$, come l'addizione è l'iterazione del successore, la moltiplicazione l'iterazione dell'addizione, la potenza l'iterazione della moltiplicazione, e così via.

L'esempio di Ackermann suggerisce di generalizzare la definizione delle funzioni ricorsive mediante equazioni. Gödel segue questa strada nel 1934 per definire le funzioni *ricorsive generali*, attribuendo l'origine dell'idea a uno spunto di Jacques Herbrand (1908-1931):

> [...] introdurre nuove funzioni $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{p_n})$ con assiomi che verifichino le condizioni:
>
> [...]
>
> 2) Questi assiomi contengono solo variabili libere e costanti.
>
> 3) Dobbiamo essere in grado di mostrare, per mezzo di dimostrazioni intuizionistiche, che è possibile calcolare con questi assiomi i valori delle funzioni in modo univoco per ogni particolare sistema di valori dei loro argomenti. (61)

Gödel precisa innanzi tutto l'idea degli assiomi con quella più restrittiva di sistemi di equazioni:

> Se φ denota una funzione incognita e $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sono funzioni note [...] le ψ e la φ sono sostituite le une nelle altre nel modo più generale e alcune coppie delle espressioni risultanti sono uguagliate tra loro [...]. (62)

Ingannato dal ricordo, afferma che Herbrand avrebbe voluto considerare ricorsive le funzioni che sono soluzioni uniche di tali sistemi di equazioni. (63) Invece Herbrand alludeva a un calcolo deduttivo, come si vede da altri luoghi dove espone la stessa idea.

Nella tesi per esempio [Herbrand 1968, p. 149] poneva le seguenti condizioni per l'introduzione di funzioni in una teoria T: che si abbiano condizioni della forma

$$\vdash .\Phi[f(0, x_1, \ldots, x_n)], \tag{1}$$

$$\vdash .\Psi[f(y, x_1, \ldots, x_n), f(y + 1, x_1, \ldots, x_n)] \tag{2}$$

per le quali si possa dimostrare

$$(\exists x).\Phi x, \tag{3}$$

$$(y)(\exists x).\Psi yx. \tag{4}$$

E ancora in [Herbrand 1931]:

> On pourra aussi introduire un nombre quelconque de fonctions $f_i x_1 x_2 \ldots x_{n_i}$ avec des hypothèses telles que
>
> a) *Elles ne contiennent pas de variables apparentes,*
>
> b) *Considerées intuitionistiquement,* (64) *elles permettent de faire effectivement le calcul de $f_i x_1 x_2 \ldots x_{n_i}$ pour tout système particulier de nombres; et l'on puisse démontrer intuitionistiquement que l'on obtient un résultat bien déterminé.*

Se pure tradito dalla memoria nel 1934, Gödel in seguito osserverà giustamente che

> [...] siccome Herbrand era un intuizionista, questa definizione per lui evidentemente significava che esiste una dimostrazione *costruttiva* della esistenza

(61) Herbrand, lettera a Gödel, 1931, citata da [van Heijenoort 1982].

(62) [Gödel 1934].

(63) Il cattivo ricordo si mantiene nel 1964, quando Gödel espone il suo debito nei confronti di Herbrand in una nota aggiunta alla ristampa di [Gödel 1934] in [Davis 1965]; ivi osserva che la proposta della definibilità semantica non è accettabile, in quanto Lázló Kalmar (1905-1976) nel 1955 ha dimostrato che si fuoriesce così dal campo delle funzioni ricorsive.

(64) [Cette expression signifie: traduites en langage ordinaire, considerées comme une propriété des entiers, et non comme un pur symbole. Nota di Herbrand]

e unicità di φ. Egli probabilmente pensava che una tale dimostrazione possa essere data soltanto esibendo una procedura di calcolo.

Quello che egli non riuscì a vedere (o a rendere esplicito) è che il calcolo, per *tutte* le funzioni calcolabili, si svolge *esattamente con le stesse regole*. (Lettera di Gödel a van Heijenoort, 1963, citata in [van Heijenoort 1982])

In [Gödel 1934]:

> Imporremo due restrizioni alla definizione di Herbrand. [...]
>
> La prima [standardizza in $\varphi(\psi_{i1}(\overline{x}), \psi_{i2}(\overline{x}), \ldots, \psi_{il}(\overline{x}))$ la parte sinistra delle equazioni]
>
> [...] la seconda restrizione alla definizione di Herbrand di funzione ricorsiva [φ] è che per ogni insieme di numeri naturali $k_1, \ldots, k_l$ ci sarà uno e un solo m per cui $\varphi(k_1, \ldots, k_l) = m$ è un'equazione derivata.

La seconda restrizione "equivale alla condizione che tutti i possibili insiemi di argomenti $(n_1, \ldots, n_l)$ di φ possano essere ordinati in modo che il calcolo dei valori di φ per ogni dato insieme di argomenti $(n_1, \ldots, n_l)$ per mezzo dell'equazione data richieda solo la conoscenza dei valori di φ unicamente per insiemi di argomenti che precedono $(n_1, \ldots, n_l)$". Non è evidente a prima vista, ma qualche calcolo sperimentale lo conferma o lo rende evidente.

Le regole di Gödel per derivare equazioni sono semplificate nelle seguenti, nella formulazione successiva di Stephen C. Kleene (1909-1994) del sistema HG (per "Herbrand-Gödel") in [Kleene 1936].

Regole di HG

R_1: e_2 si ottiene da e_1 sostituendo un numerale n a tutte le occorrenze di una variabile;

R_2:

$$\frac{r = s \qquad \psi_{ij}(n_1, \ldots, n_m) = p}{e}$$

se e solo se e si ottiene da $r = s$ rimpiazzando una o più occorrenze di $\psi_{ij}(n_1, \ldots, n_m)$ in s con p, e $r = s$ non contiene alcuna variabile.

4.3 – *Alonzo Church (1903-1995)*

Alonzo Church (1903-1995) è importante per diversi aspetti, tra cui la prima dimostrazione resa pubblica della indecidibilità della logica del primo ordine (pochi mesi prima di Turing), la pubblicazione di *Introduction to Mathematical Logic*, dopo un lunga gestazione come appunti del suo corso a Princeton, e l'invenzione del Lambda Calcolo per la dimostrazione dell'indecidibilità, un formalismo che poi si trasformò nel linguaggio di programmazione Lisp e in seguito nei linguaggi di programmazione funzionale. Si è anche dedicato intensamente alla redazione del *Journal of Symbolic Logic* nei primi anni di pubblicazione, a partire dal 1936, lo stesso anno del risultato sull'indecidibilità, anzi questo apparve nel primo numero della rivista come "A Note on the Entscheidungsproblem", in *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, No. 1, March 1936, pp. 40-41. ([65])

Il Lambda Calcolo, abbreviato λ-calcolo, deriva dal desiderio di sviluppare una teoria generale delle funzioni aritmetiche, e in un certo senso era stato anticipato, come intenzione, da Moses Schönfikel (1888-1942) e Haskell Curry (1900-1982), fondatori della logica combinatoria. Un primo tentativo di Church nel 1932-33 fu dimostrato inconsistente da Stephen G. Kleene e J. Barkley Rosser (1907-1989) nel 1935.

Nel 1936 Church propose il concetto di λ-definibilità come formalizzazione dell'intuitiva "calcolabilità effettiva", e Kleene immediatamente mostrò che era equivalente alla ricorsività di Gödel e Herbrand.

Per spiegare come si definiscono e si calcolano le funzioni nel sistema che ora si chiama λ-calcolo formale (non tipato), e quindi seguire il percorso di Church sull'indecidibilità bastano poche notazioni. ([66])

Il λ-calcolo è basato su una operazione primitiva di *applicazione*. La funzione f applicata all'argomento a è indicata con fa.

([65]) Diamo questi dati perché Church non è conosciuto a fondo fuori dalla ristretta cerchia degli specialisti.

([66]) Seguiamo e consigliamo il manuale di [Barendregt 1981], anche se ogni tanto lascia a desiderare. Per esempio nella prossima definizione (β) non è chiaro cosa sia $t(x)$ se t non contiene x; si immagina che sia t, che non disturba. Il calcolo tipato è una versione più complessa, qui non pertinente.

Se t è un'espressione che magari contiene x allora $\lambda x.t(x)$ è la funzione che assegna all'argomento a il valore $t(a)$:

$$(\lambda x.t(x))a = t(a) \qquad (\beta)$$

I termini (λ-termini) sono costruiti dalle variabili usando applicazione e astrazione, quindi sono parole sull'alfabeto

$v_0, v_1, \ldots$	variabili
λ	astrattore
(,)	parentesi

definite da

x è un λ-termine
se M è un λ-termine, anche λxM lo è
se M, N sono λ-termini, anche (MN) lo è.

Notazioni: $x, y, \ldots$ denotano arbitrarie variabili; $M, N, L, \ldots$ denotano arbitrari λ-termini; il simbolo $\equiv$ denota l'uguaglianza sintattica; se $\vec{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$ allora:

$$\lambda x_1 \ldots x_n.M \equiv \lambda \vec{x}.M \equiv \lambda x_1(\lambda x_2(\ldots(\lambda x_n(M))\ldots));$$

se $\vec{N} \equiv N_1, \ldots, N_n$ allora

$$MN_1 \ldots N_n \equiv M\vec{N} \equiv (\ldots((MN_1)N_2)\ldots N_n;$$

$M[x : N]$ è il risultato della sostituzione di N alle occorrenze libere di x in M.

La λ-notazione si trasforma in un calcolo mediante regole di conversione (sinteticamente cnv), tipo:

α. Se y non è libera in X, allora
$\lambda x.X$ cnv$_\alpha$ $\lambda y.[y/x]X$

β. $(\lambda x.M)N$ cnv$_\beta$ $[N/x]M$

η. Se x non è libera in M, allora $\lambda x.Mx$ cnv$_\eta$ M.

Con la seconda e terza regola si cercano di eliminare il massimo numero di astrazioni, ottenendo espressioni più semplici. Per questo tali conversioni si chiamano riduzioni e l'espressione convertita *redex*. ([67]) Un'espressione che non contiene redex si dice *in forma normale*. Calcolare significa ridurre forma normale. L'ordine di eliminazione di redex in cui si elimina sempre il redex più a sinistra si chiama ordine normale.

Il teorema di Church-Rosser I afferma che se X cnv Y allora esiste un'espressione Z tale che X red Z e y red Z. Ne segue

Corollario. Nessuna espressione può essere convertita a due distinte forme normali.

Teorema di Church-Rosser II. Se A red B e B è in forma normale, esiste una riduzione in ordine normale da A a B.

Equazioni. Sono le formule che si ottengono dai seguenti assiomi e regole:

(I)	$(\lambda x.M)N = M[x : N]$ (la *conversione* β);
$(II.1)$	$M = M$;
$(II,2)$	$M = N \rightarrow N = M$;
$(II.3)$	$M = N, N = L \rightarrow M = L$;
$(II.4)$	$M = N \rightarrow MZ = NZ$;
$(II.5)$	$M = N \rightarrow ZM = ZN$;
$(II.6)$	$M = N \rightarrow \lambda x.M = \lambda x.N$.

Come teoria equazionale, quantificatori e connettivi possono essere usati solo nel metalinguaggio informale, come per esempio affermare:

$$\forall M(\lambda x.x)M = M.$$

Un teorema importante è:

Teorema del punto fisso. $\forall F \exists X\ FX = X$.

Quando Church vide l'equivalenza con la definizione di Gödel dimostrata nel 1935 da Kleene, propose la sua tesi: che le funzioni effettivamente calcolabili fossero tutte ricorsive generali.

Invece Gödel non ne era convinto, cioè non era convinto che il suo concetto di ricorsione comprendesse tutte le possibili ricorsioni. ([68])

Il lavoro che contiene il risultato di Church e che ora riassumiamo non ha nulla di emozionante, sorprendente, se non si sapesse la storia che sta dietro; esordisce parlando di "una classe di problemi della teoria elementare dei numeri che richiedono di trovare una funzione f di numeri interi effettivamente calcolabile tale che $f(x_1, \ldots, x_n) = 2$ [usa 1 e 2

([67]) Quando si eseguono riduzioni si scrive anche red invece di cnv.

([68]) Si veda per un'analisi più approfondita [Davis 1982] e [Kleene 1981].

invece di 0 e 1 per come sono definiti i numeri, vedi oltre] sia condizione necessaria e sufficiente per la verità di una certa proposizione della teoria elementare dei numeri che coinvolge $x_1, \ldots, x_n$ come variabili libere". ([69])

> Lo scopo di questo lavoro è quello di proporre una definizione di calcolabilità effettiva che si pensa corrisponda in modo soddisfacente alla vaga nozione intuitiva in termini della quale i problemi di questa classe sono spesso formulati, e di mostrare, con un esempio, che non tutti i problemi di questa classe sono risolvibili.

Il secondo capitolo è dedicato alla λ-definibilità, con i concetti di conversione, forma normale, unica a meno di riscrittura di variabili vincolate, e se una formula ha una forma normale ogni successione di riduzioni termina in forma normale. I numeri sono rappresentati con

$$\begin{array}{lcl} 1 & \rightarrow & \lambda ab.a(b) \\ 2 & \rightarrow & \lambda ab.a(a(b)) \\ \ldots & & \end{array}$$

Una funzione F a un argomento si dice λ-definibile se si può trovare una formula $\boldsymbol{F}$ tale che se $F(m) = r$ e se $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{r}$ sono le formule per m, r allora $\{\boldsymbol{F}\}$ $(\boldsymbol{m})$ cnv $\boldsymbol{r}$.

Il terzo capitolo introduce l'aritmetizzazione di Gödel, che si esegue in entrambe le direzioni in modo effettivo. Il quarto presenta le funzioni ricorsive, già nella versione modificata da Kleene che abbiamo indicato con HG.

Il quinto dimostra che l'operatore di minimo applicato a una funzione ricorsiva produce una funzione ricorsiva, introducendo così con la sua aggiunta quelle che Kleene chiamerà μ-ricorsive o semplicemente ricorsive. Nel sesto elenca una serie di insiemi e funzioni che sono ricorsivi secondo Kleene o ricorsivamente enumerabili, e l'equivalenza tra funzioni ricorsive e funzioni λ-definibili (ottenuta indipendentemente dall'autore e da Kleene).

Nel settimo capitolo si definisce il concetto di funzione effettivamente calcolabile identificando queste con le funzioni ricorsive, o con quelle λ-definibili. Aveva già anticipato in una nota iniziale (la 3) che si sarebbe potuto limitare a uno dei due concetti. "Il fatto, tuttavia, che due definizioni della calcolabilità effettiva così ampiamente differenti e (nell'opinione dell'autore) ugualmente naturali risultino equivalenti, aggiunge forza alle ragioni che vengono addotte [più oltre] per credere che esse costituiscano una caratterizzazione di questa nozione [di calcolabilità effettiva] che ha la massima estensione coerente con l'usuale sua comprensione intuitiva".

Aveva già detto, parlando delle funzioni ricorsive, che, per ogni funzione effettivamente calcolabile nel senso di ricorsiva, esiste un algoritmo per calcolare i suoi valori. In verità non c'è nell'articolo una definizione di algoritmo, ma dall'esempio nel capitolo 4 sembra di capire che sia intesa una serie di regole con un ordine precisato. Nella nota 10 s'immagina l'obiezione che l'algoritmo descritto possa non fornire un calcolo effettivo a meno che sia costruttiva la condizione che si incontri l'equazione apposita tra quelle derivate dal sistema di equazioni. Ma Church si limita a dichiarare che si può intendere il quantificare esistenziale $\exists$ in modo costruttivo.

Ora viceversa è vero che se esiste un algoritmo per calcolare i valori di una funzione, essa è effettivamente calcolabile.

Cioè la definizione di ricorsivo fornisce un algoritmo, e questo entro le restrizioni della ricorsività è effettivamente calcolabile.

Quindi Church riformula le sue conclusioni per un sistema di logica formale con espressioni per i numeri $1, 2, 3, \ldots$; sono inclusi nel sistema di logica: gli assiomi come una lista finita o infinitamente numerabile; i teoremi che sono gli assiomi con tutte le espressioni ottenibili da essi con una lista finita di operazioni, le regole.

Perché il sistema soddisfi tutti gli scopi per cui serve un sistema di logica simbolica come usualmente inteso, è necessario che ciascuna regola sia un'operazione effettivamente calcolabile, che l'insieme completo delle regole sia effettivamente numerabile (se infinito), che l'insieme completo degli assiomi sia effettivamente enumerabile e che la relazione tra un intero positivo e l'espressione che lo rappresenta sia effettivamente determinabile. Si supponga che le condizioni siano soddisfatte. Diciamo che una funzione F di un intero positivo è *calcolabile nella* logica se esiste un'espressione $\boldsymbol{f}$

([69]) Per esempio, con $n > 1$, una funzione f tale che $f(n) = 2$ se e solo se esistono interi positivi x, y, z tali che $x^n + y^n = z^n$.

nella logica tale che $\{\boldsymbol{f}\}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{v}$ è un teorema se e solo se $F(m) = n$ è vero, $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{v}$ essendo le espressioni che rappresentano m e n.

Allora visto che l'insieme completo della logica è ricorsivamente enumerabile, ne segue che ogni funzione di un argomento che è calcolabile nella logica è anche effettivamente calcolabile.

Nel capitolo 8 sono studiati invarianti della trasformazione chiamata conversione. Gli unici effettivamente calcolabili al presente sono quelli ovvi, per es. l'insieme di variabili libere contenute in una formula.

Church dimostra che non esiste alcun insieme di invarianti della conversione che sia effettivamente calcolabile, e arriva a

> Teor. XVIII: "Non esiste alcuna funzione ricorsiva di una formula $\boldsymbol{C}$ il cui valore sia 2 o 1 a seconda che $\boldsymbol{C}$ abbia una forma normale o no",

vale a dire la proprietà di una formula di avere una forma normale non è ricorsiva.

Ora siamo alla fine della storia; quasi tutti i protagonisti sono entrati in scena.

Kleene introduce nel 1936 le funzioni μ-ricorsive, che aggiungono l'operatore di minimo alla ricorsione primitiva:

$$f(\vec{x}) = \mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$$

se per ogni $\vec{x}$ esiste un y t.c. $g(\vec{x}, y) = 0$.

L'equivalenza di μ-ricorsività e HG è dimostrata nel 1936 (Kleene), quella di Turing-calcolabilità e λ-definibilità nel 1936 da Turing.

Solo nel 1938 Kleene introduce le funzioni ricorsive parziali (anticipate nell'articolo di Church quando necessario con il nome di "potenzialmente ricorsive), e questo ritardo è curioso, perché è l'unico modo per ottenere la chiusura, evitando la diagonalizzazione che forse era alla base delle perplessità di Gödel riguardo alla tesi di Church: se le funzioni ricorsive sono definite per mezzo di sistemi di equazioni, si possono enumerare in modo effettivo associando φ_n a φ, ma

$$\varphi(x) = \varphi_x(x) + 1$$

non può essere ricorsiva, benché apparentemente calcolabile; φ invece può essere una funzione ricorsiva (parziale) con la via di fuga che $\varphi_r(r)$ non è definita.

Mancano soltanto Post e Turing, che tuttavia non sono necessari per concludere l'introduzione del concetto di algoritmo, benché siano importanti per la continuazione. Diamo comunque alcune informazioni.

La storia di Post sembra un racconto di Dickens, una storia umana, dove compare il personaggio precursore isolato e misconosciuto, con problemi di salute, il genio che lavora da solo su problemi che sembrano interessare solo a lui, che non trova, perché non cerca o non ha collegamenti, lo scambio con le istituzioni e alla fine è privato dei meritati allori senza per questo lamentarsi del destino cinico e baro, ma solo della propria convinta inadeguatezza. È il caso di Emil L. Post (1897-1954), che per ora deve solo ringraziare Davis che ha curato le sue opere. ([70])

Lavorava sul sistema dei *Principia Mathematicae* di Russell e Whitehead, dimostrando la completezza della parte proposizionale; introdusse definizioni sue di consistenza e completezza, che forse solo il pignolo Church ospiterà nel suo manuale.

Nel 1936 Post propose quella che ora è nota come macchina di Post, ([71]), una specie di automa che è il prototipo degli schemi di programma sviluppati 10 anni dopo da von Neumann e suoi associati. Per ogni funzione ricorsiva parziale si può trovare una macchina di Post in grado di calcolarla.

Con molti rimpianti, ma senza acredine, dirà in seguito a Gödel, nel 1938, a proposito di sue possibili pretese di anticipazione del risultato di incompletezza di cui si incominciava a parlare:

"Quanto a rivendicazioni che potrei avanzare, il massimo che potrei dire è che io avrei dimostrato il teorema di Gödel nel 1921 – se fossi stato Gödel."

In un'aggiunta il giorno successivo scrisse: "[...] dopo tutto non sono le idee ma la messa in opera della idee che costituisce un marchio di grandezza."

Dal 1936 insegnerà al City College di New York e si dedicherà allo studio della computabilità con Kleene, aprendo l'argomento degli insiemi ricorsivamente enumerabili; nel 1947 dimostrerà che è impossibile una soluzione del problema di Thue. ([72])

([70]) Si vedano le spiegazioni e i commenti di Martin Davis in [Post 1994].

([71]) [Post 1936], con data di ricevimento ottobre 1936.

([72]) Vedi nota 51.

Alan Turing (1912-1954) nel 1935 seguì a Cambridge un corso sui fondamenti della matematica tenuto dal topologo Maxwell H. A. Newman (1897-1984), dove veniva esposto il programma di Hilbert di utilizzazione della formalizzazione e della logica per le dimostrazioni di non contraddittorietà, arrivando fino ai risultati di incompletezza di Gödel del 1930. Tra i problemi messi a fuoco dal lavoro della scuola di Hilbert e di Gödel, restava aperto quello della decisione, o *Entscheidungsproblem*, come era stato formulato nel libro di [Hilbert e Ackermann 1928].

Turing portò a Newman la soluzione (negativa) dell'*Entscheidungsproblem* nell'aprile del 1936; la sua soluzione era basata su una originale definizione matematica di macchina.

Le macchine di Turing non hanno sul momento (1936) alcun legame con macchine calcolatrici reali, neppure la macchina universale che sarà in seguito considerata, da Turing stesso e da tutti, il *blueprint* del calcolatore digitale elettronico programmabile *general purpose*. Questa trasformazione della macchina di Turing avverrà solo dopo le vicende del tempo di guerra, con il maturare della consapevolezza della utilità e necessità di macchine di grande potenza e velocità di calcolo, e con l'esperienza fatta con la costruzione delle macchine *Bombe* e *Colossus* per il lavoro di decrittazione.

Turing raccontò di aver concepito l'idea della macchina un pomeriggio mentre stava sdraiato sui prati di Grantchester (sul fiume Cam). Le macchine sono definite trasportando ad esse le competenze e le azioni di una persona che esegua un calcolo.

Il 28 maggio 1936 Turing sottopose il suo lavoro per pubblicazione nei *Proceedings* della London Mathematical Society, aggiungendo la dichiarazione:

> In un recente articolo Alonzo Church ha introdotto un'idea di "calcolabilità effettiva", che è equivalente alla mia "computabilità", ma definita in modo molto diverso. Church perviene a conclusioni simili anche per qualche riguarda l'Entscheidungsproblem. (73)

Il giorno seguente scrisse alla madre:

> Nel frattempo è apparso in America un articolo, scritto da Alonzo Church, che fa le stesse cose in un modo diverso. Con Mr. Newman abbiamo deciso tuttavia che il metodo è sufficientemente diverso da giustificare la pubblicazione anche del mio articolo. Alonzo Church vive a Princeton, e allora ho deciso senz'altro di andare là.

(73) [In [Turing 1936], NdA].

5. – Certezza della correttezza delle dimostrazioni

Un'altra certezza è che la formalizzazione sia una garanzia della correttezza delle dimostrazioni. I primi proponenti della traduzione della matematica in linguaggi formali ne erano convinti.

Questa certezza è precaria a causa della fallibilità umana, e naturalmente quanto più lunga e complessa è una dimostrazione, tanto più probabile è l'infiltrazione in essa di distrazioni o sviste dovute alla stanchezza.

In soccorso alle debolezze umane viene la circostanza che la verifica della correttezza di una dimostrazione, dato il carattere formale, può essere delegata a un programma; questo a sua volta deve essere corretto.

La correttezza di un programma esprime il fatto che il programma esegue quello per cui è disegnato. Una affermazione del genere deve essere verificata e dare garanzie di essere vera. Tutto ciò che è affermato come vero deve rispondere ai criteri ritenuti più sicuri, che sono quelli matematici. Quindi le prove che i programmi fanno quello per cui sono disegnati, cioè che calcolano proprio la funzione voluta, è opportuno che siano dimostrazioni, se le dimostrazioni danno maggiore certezza. Di queste prove Alan Turing per primo ha capito la necessità, e ha iniziato a produrle manualmente. (74).

Ma qui si vede che tutta la problematica dipende da una assunzione di carattere religioso, che ci siano *principi primi*, mentre la circolarità è palese: la correttezza di una dimostrazione dipende dalla dimostrazione di correttezza . . . Per evitare un rimando all'infinito, occorre almeno che la prova di correttezza sia svolta in una logica più semplice e controllabile di quella dell'oggetto esaminato. (75)

(74) [Turing 1949].

(75) Tuttavia Donald Knuth (1938-) ammoniva: "Attenzione ai *bug* nel programma precedente; ho solo dimostrato che è corretto, non l'ho eseguito" (*Beware of bugs in the above code; I have only proved it correct, not tried it*) – nella Don Knuth' Home Page, Frequently Asked Questions.

Sono state le dimostrazioni di correttezza dei programmi a proporsi come il candidato naturale per l'infiltrazione della meccanizzazione dentro il ragionamento matematico, coinvolgendo le dimostrazioni automatiche di teoremi, e allora il concetto stesso di dimostrazione e la sua funzione sono stati messi in discussione. Come è facile immaginare, l'argomento è troppo ampio e complicato, e dovrà essere affrontato appositamente.

6. – Una morale

La morale di una storia della matematica moderna che non sia motivata da tesi precostituite è che ogni valutazione definitiva e normativa, che si potrebbe essere tentati di elaborare in periodi di novità o di assestamento, è condannata alla precarietà e alla falsificazione: falsificazione nel senso di sicura prossima smentita e falsificazione nel senso di rappresentazione falsata del presente e del passato. Una tale valutazione presuppone infatti, contro gli insegnamenti ripetuti della storia, che la matematica abbia raggiunto la sua natura vera e definitiva. Ma chi la propone non può controllare, e talvolta neanche conoscere, gli elementi che stanno fermentando nella società e nella comunità scientifica e che, non ancora inseriti nella nuova sintesi, ne provocheranno inevitabili crepe. D'altra parte una nuova proposta non può che usare gli strumenti culturali disponibili nel presente e collaudati, per quanto magari in modo originale con l'aggiunta di qualche contributo innovativo; tali strumenti derivati dal recente passato tuttavia erano stati elaborati in funzione di altri problemi e altri obiettivi.

Piegando anche inconsapevolmente gli strumenti posseduti alle nuove esigenze, la lettura della storia viene deformata in una descrizione o di fallimenti e confusioni o di anticipazioni che erano estranee alle vere preoccupazioni dei protagonisti.

Qualche volta le crisi sono come i dolori del parto, quando si concepisce una nuova creatura. Sulle ceneri della logica della ragione è cresciuta la logica formale; la conclusione della ricerca di un metodo di decisione ha sancito i primi vagiti dell'informatica.

Quello che nell'introduzione si è chiamato il fenomeno Giano si può chiamare un caso della cosiddetta eterogenesi dei fini nella storia, che è più frequente di quanto si creda. Una generazione, o più di una, lavora su un problema, con un obiettivo, costruendo strumenti e concetti, ma quando l'obiettivo è raggiunto, oppure si svuota, parte di quanto è stato elaborato in funzione di quello diventa invece autonoma, preminente, ed è lanciata, quasi come in una corsa ciclistica all'americana, allo sviluppo di problematiche imprevedibili e impreviste dalla generazione precedente.

E c'è sempre uno scarto tra i problemi riconosciuti o sentiti in un dato momento storico e l'armamentario concettuale con i quali vengono affrontati, uno scarto di circa una generazione, che è l'intervallo tra la giovinezza, nel corso della quale si è assorbita un'eredità culturale, e la maturità, nella quale si ha l'autorità o l'occasione non solo di far sentire la propria voce ma di porre in atto una soluzione originale ai problemi.

Un esempio abbastanza vicino: [76] negli anni della propria formazione, gli anni trenta del Novecento, Bourbaki era stato colpito dal lavoro svolto da Hilbert nella mitica Göttingen, che già non esisteva più sotto i colpi dei nazisti; Hilbert aveva smesso di lavorare nel 30-31; ma già Bourbaki non era più sensibile, come altri della sua età, al problema che quegli voleva risolvere e che derivava dalla fine dell'Ottocento e primi del Novecento, un prodotto della crisi fondazionale del periodo: la dimostrazione, e la certezza, della noncontraddittorietà come fondamento del metodo assiomatico per teorie dell'infinito. Quanto da Hilbert aveva imparato, Bourbaki lo considerava in funzione del proprio disagio; la sua preoccupazione era un'altra, quella dell'unificazione nella crescita in corso di tanta nuova matematica astratta; e dopo qualche oscillazione e incertezza ha finito per adottare il metodo assiomatico in una versione che gli sembrava suggerisse o imponesse non la pluralità ma l'unità attraverso la generalizzazione. Anche Hilbert cercava l'unità, ma non nel metodo, quanto piuttosto nell'approfondimento dei risultati dei problemi.

Analogamente a questo caso trasparente, lo sfasamento a ogni generazione sembra inevitabile, è quasi una legge bio-culturale, che potremmo chia-

---

[76] Ci riallacciamo alle conclusioni di [Lolli 2022, cap. 13, pp. 252-4].

mare la legge dei “venti anni dopo” (o “legge del passaggio generazionale”), dal titolo del romanzo omonimo (1845) di Alexandre Dumas (1802-1870).

Venti anni è un periodo simbolico, a indicare due generazioni culturali, ma con un’approssimazione anche genetica (statisticamente 25 anni circa). Tra Frege nato nel 1848 e Russell nel 1872 corrono 24 anni: l’obiettivo di Frege era di confutare Kant; non quello di Russell. Hilbert inizia a interessarsi di questioni fondazionali tra il 1899 delle *Grundlagen* e i primi anni del Novecento, per riprendere dal 1917 per tutti gli anni venti; Bourbaki si forma tra il 1931 e il 1935 quando Dieudonné e André Weil hanno compiuto 25 anni.

Grothendiek (1928-2014) consegue il dottorato nel 1953 e nel 1960 invoca la necessità di usare il linguaggio categoriale nella categoria dei preschemi invece di quello degli insiemi imposto da Bourbaki. (77)

Si potrebbe anche citare un altro caso, a proposito dei fisici della generazione separata da venti anni da quella di Einstein e delle divergenze sulla fisica quantistica; quel contrasto era tuttavia diverso, rientrava sotto un’altra legge che allude alla disposizione ad adottare subito una nuova prospettiva da parte dei giovani, ma riguarda soprattutto gli strumenti o i programmi della ricerca scientifica, non la filosofia o la politica della scienza, o la politica in generale, dove si manifesta il ritardo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Babbage 1827] C. Babbage, “On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning”, *Trans. Cambridge Philosophical Society*, vol. II, part II, Cambridge, 1827, pp. 325-77.

[Babbage 1864] Ch. Babbage, *Passages from the Life of a Philosopher*, London, Longman, 1864, in [Babbage 1961, pp. 5-157].

[Babbage 1961] Ch. Babbage, *Charles Babbage and his Calculating Engines*, a cura di Ph. Morrison e E. Morrison, New York, Dover, 1961.

[Barendregt 1981] H. P. Barendregt, *The Lambda Calculus. Its Syntax and Semantics*, North Holland, Amsterdam, 1981.

[Bartocci 2012] C. Bartocci, *Una piramide di problemi*, Raffaello Cortina, Milano, 2012.

[Behmann 1922] H. Behmann, “Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem”, *Mathematische Annalen*, **86** (1922), pp. 163-229.

[Benacerraf e Putnam 1964] P. Benacerraf e H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Blackwell, Oxford, 1964.

[Boole 1847] G. Boole, *A Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, Macmillan, 1847; trad. it. *Analisi matematica della logica*, a cura di M. Trinchero, Silva, Milano, 1965.

[Boole 1854] G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought, On Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Walton and Maberley, London, 1854, Dover, New York, 1951; trad. it. *Indagini sulle leggi del pensiero, su cui sono fondate le teorie matematiche della logica e della probabilità*, a cura di M. Trinchero, Einaudi, Torino, 1976.

[Boolos 1997] G. Boolos, “Saving Frege from Contradiction”, *Proceed. Aristotelian Society*, 8 (1996-97), pp. 137-51, rist. in [Boolos 1998, pp. 171-82].

[Boolos 1998] G. Boolos, *Logic, Logic, and Logic*, Harvard Univ. Press, Cambridge Mass., 1998.

[Borel 1898] E. Borel, *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[Church 1936] A. Church, “A Note on the Entscheidungsproblem”, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, No. 1, March 1936, pp. 40-41.

[Church 1956] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[Comte 1819] A. Comte, *Essais sur la Philosophie des Mathématiques*, Au Bureau de la Revue Occidentale, Paris, 1879.

[Condillac 1798] E. B. de Condillac, *Oeuvres*, Paris, 1798.

[Condillac 1827] E. B. de Condillac, *Oeuvres Complètes*, vol. XV, *Etude de l’Histoire-Logique*, Baudouin, Paris, 1827.

[Couturat 1905] L. Couturat, “Définitions et démonstrations mathématiques”, *L’Enseignement Mathématique*, 7, 1905, pp. 27-40 e 104-21.

[Davis 1965] M. Davis (a cura di), *The Undecidable*, Raven Press, Hewlett, New York, 1965.

[Davis 1982] M. Davis, “Why Gödel Didn’t Have Church’s Thesis”, *Information and Control*, 54 (1982), pp. 3-24.

[Dedekind 1888] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, Leipzig, 1888; trad. it. di O. Zariski, col titolo *Essenza e significato dei numeri*, in [Dedekind 1926, pp. 7-118], e di F. Gana col titolo *Che cosa sono e a che servono i numeri?* in [Dedekind 1983, pp. 79-128].

[Dedekind 1926] R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali* (a cura di O. Zariski), Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926.

[Dedekind 1983] R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica* (a cura di F. Gana), Bibliopolis, Napoli, 1983.

[Dijkstra 1989] E. W. Dijkstra, “On the cruelty of really teaching computer science”, *Communications ACM* **32** 1989, pp. 1398-1404.

(77) Essa comporta “un nuovo sforzo di astrazione”, con la “difficoltà psicologica” di “trasferire agli oggetti di una categoria già piuttosto differente dalla categoria degli insiemi [. . .] nozioni che sono familiari nel caso di insiemi: prodotti cartesiani, leggi dei gruppi, degli anelli”, [Grothendieck 1960]. Il concetto di categoria era stato introdotto nel 1945 da Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane, e non poteva rientrare nel quadro degli *Éléments* concepiti negli anni trenta. L’esempio è un po’ forzato – il salto è anche meno di venti anni – per applicare a Bourbaki la legge del contrappasso.

[Dyson 2012] G. DYSON, *Turing Cathedral*, Pantheon Books, New York, 2012.

[Frege 1879] G. FREGE, *Begriffschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nebert, Halle, 1879 (Olms, Hildesheim, 1964); trad. it. *Ideografia. Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico*, in [Frege 1965, pp. 103-206].

[Frege 1884] G. FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Koebner, Breslau, 1884; trad. it. *I fondamenti dell'aritmetica. Una ricerca logico-matematica sul concetto di numero*, in [Frege 1965, pp. 211-349].

[Frege 1893-1903] G. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, 2 voll., Poile Koebner, Jena, 1893, 1903.

[Frege 1965] G. FREGE, *Logica e aritmetica* (a cura di C. Mangione), Boringhieri, Torino, 1965.

[Frege 1976] G. FREGE, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Hamburg, 1976; trad. it. *Alle origini della nuova logica*, Boringhieri, Torino, 1983, 2021.

[Gauss 2011] G. F. GAUSS, "Fragen zur Metaphysik del Mathematik", *Werke*. X/1, Gottingen 1870-1933; rist. 2011.

[Gödel 1929] K. GÖDEL, "Über die Vollständigkeit des Logikkalküls", Univ. di Vienna, tesi di laurea; trad. ingl. in [Gödel 1986, pp. 61-9]; trad. it. in [Gödel 1999, pp. 63-82].

[Gödel 1930] K. GÖDEL, "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37 (1930), pp. 349-60; trad. ingl. in [Gödel 1986, pp. 103-23]; trad. it. in [Gödel 1999, pp. 83-93].

[Gödel 1931] K. GÖDEL, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia matematica* und verwandte Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), pp. 173-98; trad. ingl. in [Gödel 1986, pp. 145-95]; trad. it. in [Gödel 1999, pp. 113-38].

[Gödel 1932] K. GÖDEL, "Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 2 (1932), pp. 27-8; trad. ingl. in [Gödel 1986, pp. 231-5]; trad. it. in [Gödel 1999, pp. 168-9].

[Gödel 1933] K. GÖDEL, "Zum Entscheidungsproblems des logischen Funktionenkalk|uls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 40 (1933), pp. 433-43; trad. ingl. in [Gödel 1986, pp. 307-27]; trad. it. in [Gödel 1999, pp. 226-36].

[Gödel 1934] K. GÖDEL, *On undecidable propositions of formal mathematical systems*, (a cura di S. C. Kleene e J. B. Rosser), The Institute for Advanced Study, Princeton, 1934; ristampato con correzioni e un poscritto in [Davis 1965, pp. 39-74] e in [Gödel 1986, pp. 346-71]; trad. it. in [Gödel 1999, pp. 252-76].

[Gödel 1986] K. GÖDEL, *Collected Works. Vol. I*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1986; trad. it. [Gödel 1999].

[Gödel 1999] K. GÖDEL, *Opere*, vol. 1, Bollati Boringhieri, Torino, 1999.

[Grassmann 1861] H. GRASSMANN, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Verlag Enslin, Berlin, 1861.

[Grothendieck 1960] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie algébrique: I. Le langage des schémas*, Publications Mathématiques de l'I.H.É.S., Paris, 1960.

[Hardy 1929] G. H. HARDY, "Mathematical Proof", *Mind*, 38, n. 149, pp. 1-25.

[Herbrand 1931] J. HERBRAND, "Sur la non-contradiction de l'arithmetique", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 166 (1931), pp. 1-8; ristampato in [Herbrand 1968, pp. 221-32]; trad. ingl. in van Heijenoort 1967, pp. 618-28.

[Herbrand 1968] J. HERBRAND, *Écrits logiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968.

[Hilbert 1899] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899.

[Hilbert 1900a] D. HILBERT, "Über den Zahlbegriff", *Jahresberichte der DMV*, 8 (1900), pp. 180-4; trad. it. in [Hilbert 1978, pp. 139-43].

[Hilbert 1900b] D. HILBERT, "Mathematische Probleme", *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1900, pp. 253-97; trad. it. parziale in [Hilbert 1978, pp. 145-62].

[Hilbert 1904] D. HILBERT, "Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik", in *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, 1904, Teubner, Leipzig, 1905; trad. it. "Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica" in [Hilbert, 1978pp. 162-75].

[Hilbert 1917] D. HILBERT, "Axiomatisches Denken", *Mathematische Annalen*, **78** (1918), pp. 405-15; trad. it. "Pensiero assiomatico", in [Hilbert 1978, pp. 177-88].

[Hilbert 1922a] D. HILBERT, "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem mathematichen Seminar der Hamburgischen Universität*, **1** (1922), pp. 157-77; trad. it. "Nuova fondazione della matematica", in [Hilbert 1978, pp. 189-213].

[Hilbert 1922b] D. HILBERT, "Die logische Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen*, 88 (1923), pp. 151-65; trad. it. "I fondamenti logici della matematica", in [Hilbert 1978, pp. 215-31].

[Hilbert 1925] D. HILBERT, "Über das Unendliche" (1925), *Mathematische Annalen*, **95** (1926), pp. 161-90; trad. it. "Sull'infinito", in [Hilbert 1978, pp. 233-66].

[Hilbert 1927] D. HILBERT, "Die Grundlagen der Mathematik" (1927), *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **6** (1928), pp. 65-85; trad. it. "I fondamenti della matematica" in [Hilbert 1978, pp. 267-89].

[Hilbert 1928] D. HILBERT, " Probleme der Grundlegung der Mathematik", in *Atti Congresso internazionale dei matematici, Bologna, 3-10 ottobre 1928*, Zanichelli, Bologna, 1929, vol. I, pp. 135-41, con aggiunte e correzioni in *Mathematische Annalen*, **102** (1929), pp. 1-9; trad. it. "Problemi della fondazione della matematica", in [Hilbert 1978, pp. 292-300].

[Hilbert 1930] D. HILBERT, "Naturerkennen und Logik", *Die Naturwissenschaften*, **18** (1930), pp. 959-63; trad. it. "Conoscenza della natura e logica" in [Hilbert 1978, pp. 301-11].

[Hilbert 1978] D. HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V. M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1978.

[Hilbert e Ackermann 1928] D. HILBERT e WILHEM ACKERMANN (1896-1962), *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928.

[Hume 1739-40] D. HUME, *A Treatise of Human Nature: Being an Attempt to introduce the experimental Method of Reasoning into Moral Subjects*, J. Noon, London, 1739-40; trad. it. in [Hume 1971]

[Hume 1971] D. HUME, *Opere filosofiche*, a cura di E. Lecaldano e E. Mistretta, Laterza, Bari, 1971.

[Kleene 1936] S. C. KLEENE, "General recursive functions of natural numbers", *Mathematische Annalen*, 112 (1936), pp. 727-42; ristampato in [Davis 1965, pp. 236-53].

[Kleene 1981] S. C. KLEENE, "Origins of recursive function theory", *Annals of the History of Computing*, 3 (1981), pp. 52-67.

[Kronecker 1887] L. KRONECKER, "Über den Zahlbegriff", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 101, 1887, pp. 337-55.

[Ladrière 1957] J. LADRIÈRE, *Les limitations internes des formalismes. Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[Lolli 1985] G. LOLLI, "La matematica: i linguaggi e gli oggetti", in [Mangione 1985, pp. 213-40].

[Lolli 2011] G. LOLLI, *La guerra dei trent'anni (1900-1930). Da Hilbert a Gödel*, ETS, Pisa, 2011.

[Lolli 2022] G. LOLLI, *Matematica in movimento*, Bollati Boringhieri, Torino, 2022.

[Mangione 1985] C. MANGIONE, a cura di, *Scienza e filosofia. Saggi in onore di Ludovico Geymonat*, Garzanti, GeMS, Milano, 1985.

[Pastore 1906] A. PASTORE, *Logica Formale, dedotta dalla considerazione di modelli meccanici*, Fratelli Bocca, Torino, 1906.

[Peacock 1830] G. PEACOCK, *A Treatise on Algebra*, 1830, Deighton, Cambridge; ed. ampliata in 2 voll., vol. 1 *Arithmetical Algebra*, 1842, e vol. 2 *Symbolic Algebra*, 1846, University Press, Cambridge.

[Peano 1888] G. PEANO, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. GRASSMANN, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Bocca, Torino, 1888, parzialmente ristampato in [Peano 1958, pp. 3-20].

[Peano 1958] G. PEANO, *Opere Scelte*, vol. II, Cremonese, Roma, 1958.

[Post 1921] E. POST, "Introduction to a general theory of elementary propositions", *Amer. J. Math.*, 43 (1921), 163-85, ristampato in [van Heijenort 1967, pp. 264-83] e in [Post 1994, pp. 21-43].

[Post 1936] E. POST, "Finite combinatory processes-Formulation I", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, settembre 1936, pp. 103-5.

[Post 1994], E. POST, *Solvability, Provability, Definability: The Collected Works of Emil L. Post*, a cura di M. Davis, Birkäuser, Boston, 1994.

[Schmalz 1993] R. SCHMALZ, *Out of the Mouths of Mathematicians*, MAA., Washington, 1993.

[Stern 1982] J. STERN (a cura di), *Proceedings of the Herbrand Symposium: Logic Colloquium '81*, North Holland, Amsterdam, 1982

[Stewart 1877] D. STEWART, *Elements of the Philosophy of the Human Mind, The Collected Works*, vol. iii, T. & T. Clark, Edinburgh, 1877.

[Skolem 1923] TH. SKOLEM, "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem ausdehnungsbereich", *Videnskapsselskapets skrifter, I. Mathematisk-naturvidenskabelig klasse*, n. 6, 1923; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 302-33].

[Turing 1936] A. M. TURING, "On computable numbers, with an application to the *Entscheidungsproblem*"; articolo apparso in due parti, nel vol. 42, Part 3 (novembre 1936) e Part 4 (dicembre 1936) dei *Proc. London Mathematical Society*, quindi pubblicati insieme in *Proc. London Mathematical Society*, 2nd series, 42, 1937, pp. 230-65; ristampato in [Davis 1965, pp. 115-51].

[Turing 1937] A. M. TURING, "On computable numbers, with an application to the *Entscheidungsproblem*. A Correction", *Proc. London Mathematical Society*, 2nd series, 42, 1937, pp. 544-6; ristampato in [Davis 1965, pp. 152-4].

[Turing 1949] A.M. TURING, "Cheking a Large Routine", *Report of a Conference on High Speed Automatic Calculating Machines*, pp. 67-9; rist. in Id., *Mechanical Intelligence*, a cura di D. C. Ince, vol. 1 di *Collected Works of A. M. Turing*, North Holland, Amsterdam, 1992, pp. 129-31.

[Uspensky 1983] V. A. USPENSKY, *Post's Machine*, Little Mathematical Library, MIR Publisher, Moscow, 1983.

[van Heijenoort 1967] J. VAN HEIJENOORT, *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1967.

[van Heijenoort 1982] J. VAN HEIJENOORT, "L'oeuvre logique de Jacques Herbrand et son contexte historique", in [Stern 1982, pp. 57-85].

[Weyl 1918] H. WEYL, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchgungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit, Leipzig, 1918; trad. it. [Weyl 1977].

[Weyl 1977] H. WEYL, *Il continuo*, Bibliopolis, Napoli, 1977.

[Zamjatin 1922] E. ZAMJATIN, *Noi*, Feltrinelli, Milano, 1963.

Gabriele Lolli ha contribuito per tanti anni alla Rivista come autore e revisore. Negli ultimi tempi i suoi articoli arrivavano con cadenza quasi annuale: riflessioni sulla matematica, sulla sua storia e sulla sua filosofia, sempre acute, approfondite, coltissime ma aggiornate e attuali. Questo è il suo ultimo articolo, proposto per la prima volta l'8 maggio 2024 e inviato in forma definitiva il successivo 3 agosto. Mancava solo di sunto e abstract. Lo scorso 13 gennaio 2025, infatti, Gabriele ci ha lasciati. In calce all'articolo abbiamo allora deciso di presentare non la sua foto e le sue note biografiche, che del resto ci sono familiari, ma questo nostro ricordo, a significare il nostro grazie.