

---

# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ANTONIO FONTANA, CARLO TOFFALORI

## **Euclide I, 1**

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 10*  
(2025), n.1, p. 49–64.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI\\_2025\\_1\\_10\\_1\\_49\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2025_1_10_1_49_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# Euclide I, 1

ANTONIO FONTANA

Liceo A. Genovesi, Napoli – PhD in Computer Science and Mathematics, Università di Camerino

E-mail: antonio.fontana@unicam.it

CARLO TOFFALORI

Università di Camerino

E-mail: carlo.toffalori@unicam.it

**Sommario:** Trattiamo la prima proposizione degli *Elementi di Euclide*, che mostra come costruire un triangolo equilatero di lato assegnato. Discutiamo i principi di continuità che paiono necessari per provarla ma Euclide sembra trascurare. Tracciamo poi la storia della prima proposizione fino ai giorni nostri. Ne presentiamo infine qualche intrigante eco letteraria.

**Abstract:** We deal with the first proposition of Euclid’s *Elements*, which shows how to construct an equilateral triangle of given side. We discuss the continuity principles that seem necessary to prove it but Euclid seems to neglect. We then trace the history of this proposition until today. Finally, we present some intriguing literary echoes of it.

## 1. – Un dubbio su Euclide

Due grandi matematici italiani dell’Ottocento, Enrico Betti (1823-1892) e Francesco Brioschi (1824-1897), curarono nel 1868 una loro edizione [BetBr] degli *Elementi* di Euclide [Eu], [He].<sup>(1)</sup> Nelle pagine iniziali, celebrarono l’opera del matematico alessandrino, definendola “*inimitabile modello di logica e chiarezza lasciatoci dai Greci*”, lodandone la “*suprema accuratezza*” e deprecandone il progressivo abbandono nella didattica.

Eppure, pochi anni dopo, Bertrand Russell (1872-1970) esprimeva critiche pesanti agli *Elementi*, sostenendo che la loro fama come capolavoro della logica era largamente immeritata [Ru]. A Euclide Russell rimproverava: “*Le sue definizioni non sempre definiscono, i suoi assiomi non sono sempre indimostrabili, le sue dimostrazioni richiedono molti assiomi di cui egli è del tutto inconscio*”.

Accettato: 17 ottobre 2024.

<sup>(1)</sup> Una ottima traduzione del primo libro degli *Elementi*, con relativo commento, si trova in [RuPS]. La segnaliamo molto volentieri. Il nostro argomento vi viene considerato nel capitolo *Approfondimento*, pp. 145-148; gli è pure dedicata parte dell’immagine di copertina.

A sostegno delle sue riserve, Russell menzionava la prima proposizione degli *Elementi*, la 1 del libro I, quella che presenta la costruzione del triangolo equilatero di lato assegnato AB.

La ricordiamo: Euclide traccia col compasso le due circonferenze di raggio AB e centro rispettivamente A e B e individua in un loro punto di intersezione C il terzo vertice del triangolo cercato. Infatti, C ha la stessa distanza di B da A e di A da B, come dire  $CA = BA$  e  $CB = AB$ . A questo punto basta applicare le proprietà transitiva e simmetrica dell’uguaglianza per concludere anche  $CA = CB$ .

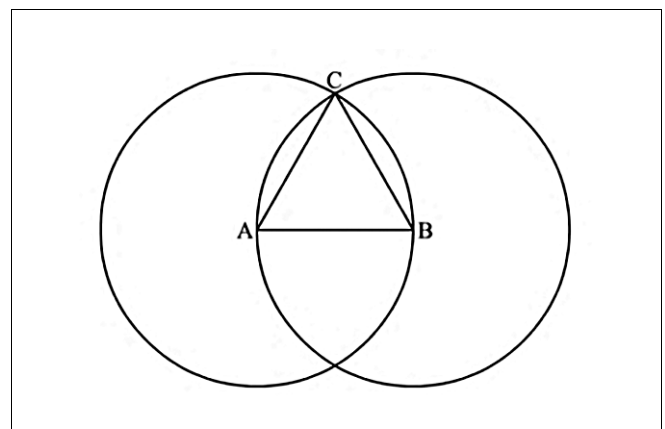


FIGURA 1 – la costruzione di Euclide.

Ma, obiettava Russell, l'esistenza del punto di intersezione C tra le due circonferenze non è per niente garantita. Non la assicurano né proposizioni precedenti (che non ci possono essere), né i postulati iniziali. Servirebbe invece qualche altra assunzione.

Rivediamo infatti la costruzione alla luce della geometria analitica, in riferimento a un sistema cartesiano ortogonale. Immaginiamo in particolare che A e B corrispondano all'origine (0, 0) e al punto di coordinate (1, 0), così che la loro distanza misura 1. Le circonferenze che ne risultano hanno allora equazioni

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1, \\(x - 1)^2 + y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Le soluzioni del relativo sistema, cioè le coordinate dei punti di intersezione, sono  $\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . In particolare, la loro ordinata è irrazionale, anche se le coordinate iniziali dei centri, la misura del raggio e, di conseguenza, i coefficienti delle equazioni sono tutti razionali, anzi interi. Come dire che le circonferenze sono sì secanti nel piano reale, ma non in quello razionale.<sup>(2)</sup>

In definitiva il disegno inganna, quando nella costruzione euclidea induce ad accettare l'esistenza di C. Tanto sottolineava Russell. In verità qualche suo maligno detrattore insinua che la colpa che egli maggiormente imputava a Euclide era, paradossalmente, quella di non avergli dato retta<sup>(3)</sup> – più di due millenni prima! Ma, al di là delle battute, la dimostrazione degli *Elementi* rivela qualche innegabile fallacia cui porre rimedio.

Sembra dunque ragionevole stabilire, come si diceva, un nuovo postulato, che garantisca l'intersezione C. Il resto dell'argomentazione di Euclide sembra invece condivisibile. Le premesse degli *Elementi* su cui si basa sono infatti:

- i postulati 1 e 2, quando traccia il segmento iniziale AB;<sup>(4)</sup>

<sup>(2)</sup> [Ha, Ex. 16.7 (a), p. 147] chiarisce che il piano su un campo ordinato  $F$  contiene un triangolo equilatero se e solo se  $F$  contiene  $\sqrt{3}$ .

<sup>(3)</sup> Come riferito nelle righe introduttive della riproduzione dell'articolo di Russell nel sito citato in [Ru].

<sup>(4)</sup> Per una discussione del contenuto e del significato dei postulati euclidei un riferimento classico e consigliabile è [He]. I postulati 1 e 2 sono trattati alle pagine 195-199.

- il postulato 3, quando costruisce cerchi di centro e raggio assegnati;
- le definizioni 15, 16 e 17, relative appunto a cerchio (e circonferenza) e rispettivi centro e diametro,
- la prima nozione comune, sulla proprietà transitiva della relazione di uguaglianza.

A questi presupposti un osservatore pignolo potrebbe aggiungere i procedimenti logici cui la dimostrazione si affida, a cominciare dal *modus ponens* – che interviene quando dalla prima nozione comune e dalla specifica osservazione che CA e CB sono singolarmente uguali ad AB si deduce che CA e CB sono uguali tra loro.

L'obiettivo principale di questa nota è, allora, discutere il postulato mancante e la possibile omissione di Euclide. Ma il nostro discorso si allargherà a esaminare la prima proposizione degli *Elementi* nel suo complesso.

In dettaglio, il capitolo 2, successivo a questa introduzione, tratta del problema del continuo, discute l'*assioma della continuità circolare*, cruciale per lo sviluppo dell'argomentazione euclidea, e lo collega all'assioma generale della continuità, come enunciato da Dedekind. Ricorda le tappe storiche che hanno portato alla formulazione di questi principi, da Finé a Pascal, da Bolzano a De Morgan.

Il capitolo 3 riferisce e discute brevemente altre obiezioni minori, sollevate già nell'antichità alla dimostrazione di Euclide. Rileva poi i vari luoghi degli *Elementi* in cui viene applicata la prima proposizione, o comunque vengono proposte situazioni analoghe, soggette alle stesse riserve.

Il capitolo 4 esamina la costruzione del triangolo equilatero di lato assegnato nelle geometrie non euclidee e nella geometria del compasso di Lorenzo Mascheroni.

Il capitolo 5 ritorna sulle critiche mosse a Euclide, soprattutto nel corso dell'Ottocento, in Gran Bretagna e in Italia e ricorda, tra i suoi difensori più fieri e convinti, Charles Dogdson, alias Lewis Carroll, l'autore dei romanzi di Alice.

Il capitolo 6 descrive le fortune letterarie della prima proposizione, citata più o meno esplicitamente da vari importanti scrittori: lo stesso Carroll, Charles Dickens, il poeta Samuel Coleridge e Jorge Luis Borges.

Il capitolo finale 7 presenta alcuni studi moderni dell'opera euclidea e in particolare della sua prima proposizione. Riferisce dei controlli automatici che ne verificano la coerenza, ma anche di recenti analisi filosofiche dell'approccio euclideo, di cui si sottolineano il ricorso sistematico a figure e diagrammi, dunque l'intento soprattutto costruttivo e visuale, ma anche lo spirito che ispira postulati e dimostrazioni, molto diverso dalla sensibilità e dall'impostazione dei nostri giorni. Ringraziamo Silvia De Toffoli per aver attirato la nostra attenzione su questi aspetti.

Ringraziamo anche Paolo Maroscia e i due revisori anonimi di questo articolo per tanti preziosi suggerimenti.

## 2. – Il problema del continuo

Per illustrare il concetto del continuo, Francesco Severi (1879-1961) proponeva in [Se] di considerare una "successione di piccolissime macchie", come nella successiva figura 2. L'impressione che un osservatore ricava guardandole varia con la distanza: in genere risulta chiaro che A e B sono diversi; tuttavia, le macchie sono avvertite come una linea fluente e ininterrotta solo in lontananza, mentre da vicino appaiono come una sequenza di punti separati. Dunque, se si tracciano due simili linee, e nello specifico le due circonferenze di Euclide, uno spettatore abbastanza vicino può accordare al massimo che si incrocino (se si incrociano), ma non certo che si incontrino, mentre un osservatore lontano potrà invece ricavare quest'ultima impressione.

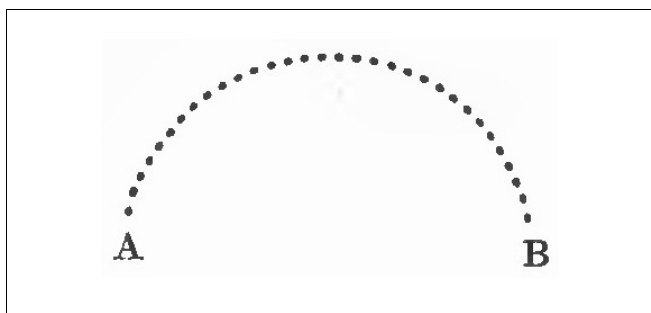


FIGURA 2 – la linea di "piccolissime macchie" di Severi. Immagine tratta da

[https://it.wikisource.org/wiki/Scientia\\_-\\_Vol.\\_VIII/Ipotesi\\_e\\_realt%C3%A0\\_nelle\\_scienze\\_geometriche#Euclide](https://it.wikisource.org/wiki/Scientia_-_Vol._VIII/Ipotesi_e_realt%C3%A0_nelle_scienze_geometriche#Euclide).

Secondo Aristotele (384-322 a. C.), che precedette storicamente Euclide (IV-III secolo a. C.) di circa cinquanta anni, lo spazio ha natura continua. Tanto leggiamo nella sua *Fisica* [Ar1, 208a]. Inoltre, nella sua concezione il continuo è inteso come "divisibile all'infinito" [Ar1, 185b], ma anche dotato di un'ulteriore proprietà di contiguità. Aristotele, infatti, definisce il contiguo affermando che "oltre a essere consecutivo, è anche a stretto contatto", e poi aggiunge che il continuo è quella forma di contiguità in cui "l'estremo di ciascuna delle realtà a contatto fa tutt'uno" con l'estremo dell'altra [Ar1, 227a].

In questa prospettiva pare ragionevole attendersi che due linee continue, incrociandosi, si incontrino. Ma Euclide non enuncia esplicitamente nessun principio del genere all'inizio degli *Elementi*. Semmai parla implicitamente dell'intersezione di due rette nel famoso *quinto postulato*, quando asserisce: *se due rette tagliate da una terza formano dalla stessa parte due angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora quelle due rette, tracciate indefinitamente, si incontrano da quella parte*. Leggiamo allora tra le righe che due rette, se convergono, si intersecano. Del resto nella Definizione 23, Euclide definisce due rette del piano *parallele* se, prolungate illimitatamente da entrambe le parti, non si incontrano né dall'una né dall'altra di queste parti. Insomma, dell'intersezione di due rette in qualche modo si parla.

Manca però totalmente negli *Elementi* un'affermazione dello stesso genere per le circonferenze e più in generale per le curve. Il principio mancante, che potremmo chiamare *assioma della continuità circolare*, viene enunciato nel modo che segue in [Gre, p. 94]:

*se un cerchio ha un punto all'interno e uno all'esterno di un altro cerchio, allora le due circonferenze corrispondenti si incontrano in due punti.*

Naturalmente, la posizione di un punto all'interno o all'esterno di un cerchio si deduce dalla sua distanza dal relativo centro, minore o maggiore del raggio. Si intende poi che ambedue i cerchi condividono la proprietà di possedere un punto dentro, e uno fuori l'altro. Non basta che a soddisfarla sia solo uno: quando un cerchio è esterno a un altro, si ritrova certamente con un punto dentro e uno fuori, ma non vale altrettanto per il cerchio interno, e infatti le due

circonferenze non si incontrano per nulla. Se invece si fa riferimento alle circonferenze invece che ai cerchi, l'ipotesi che l'una abbia un punto interno e uno esterno all'altra sembra sufficiente.

Pure Betti e Brioschi sottoscrivono, o almeno menzionano, in [BetBr] questa necessaria condizione di continuità circolare. Infatti, dopo aver provato la prima proposizione del primo libro più o meno allo stesso modo di Euclide, avvertono l'esigenza di un commento finale, assente negli *Elementi*: “Le circonferenze dei due cerchi si segano necessariamente, perché ciascuna di esse ha un punto interno ed un punto esterno rispetto all'altro cerchio” [BetBr, p. 6].

A rigore, si avverte una qualche differenza tra questa affermazione e il principio di continuità circolare che abbiamo tratto da [Gre]. Infatti, la situazione iniziale è la stessa, due cerchi di cui ciascuno ha un punto all'interno e uno all'esterno dell'altro; ma là se ne deduce l'esistenza di due punti di intersezione, e qua di almeno uno. Tuttavia, che i punti diventino due lo sia può desumere perché due sono gli archi di circonferenza che congiungono i punti originari, quello interno e quello esterno; dopo di che, interviene lo stesso Euclide che, nella proposizione 10 del libro terzo, assicura che i punti comuni a due circonferenze distinte non possono essere più di due.<sup>(5)</sup>

Concentriamoci dunque sull'assioma di continuità circolare, come enunciato in [Gre]. La storia della sua formulazione e del suo raffinamento nei secoli fino all'inizio dell'Ottocento viene descritta e discussa da Vincenzo De Risi nell'articolo [DeR], da cui estraiamo solo alcuni spunti chiave. Apprendiamo così che la questione non riscosse grande attenzione

---

<sup>(5)</sup> [Gre, p. 94] enuncia anche un *principio di continuità lineare*, secondo cui, se un segmento ha i due estremi uno all'interno e uno all'esterno di un cerchio, allora quel segmento interseca la circonferenza – per una retta in analoga condizione, le intersezioni diventano due. Non ci soffermiamo su questo postulato, esso pure adoperato tacitamente da Euclide. Sia in [Gre, pp. 100-101] che in [He, Book I, pp. 237-238] si mostra come dedurlo dall'assioma di continuità di Dedekind, di cui parleremo tra poco. In [Gre, p. 101] si aggiunge che il principio di continuità lineare è conseguenza di quello di continuità circolare, esso pure deducibile dall'assioma di Dedekind.

dai primi commentatori euclidei e neppure nel Medio Evo. Ma nel 1532 il matematico e cartografo francese Oronce Finé (1494-1555) – o Fine, come oggi si preferisce scrivere, o ancora Oronzo Finneo, adoperando la versione italianizzata del nome – aggiunse nella sua opera *Protomathesis* due nuovi postulati ai cinque classici di Euclide e, nel primo di essi, ossia nel sesto complessivo, stabilì che “una linea retta o curva, che è condotta da un punto interno a una figura ad un punto esterno nello stesso piano, interseca la figura o sul bordo o nei suoi lati”. La nozione di “figura” appare oggettivamente vaga. Se però la interpretiamo come uno dei cerchi della costruzione del triangolo equilatero, e per linea consideriamo un arco dell'altra circonferenza, ecco che, applicandole l'asserzione di Finé, deduciamo l'esistenza del punto C.

Di cerchi e circonferenze, e non solo genericamente di figure, parla invece Blaise Pascal (1623-1662) quando tratta lo stesso tema nella sua *Introduction à la géométrie*. In verità di quest'opera, dedicata alla geometria elementare, ci restano alcuni frammenti, conservati da Leibniz [It]. Nella sua parte finale, Pascal elenca una serie di affermazioni che chiama “*teoremi naturalmente noti*” e che di conseguenza enuncia senza dimostrazione. L'espressione non manca di colpire e viene opportunamente sottolineata in [It], che la collega a un passo dell'altro trattato di Pascal, *Lo spirito della geometria* [Pal, p. 94], in cui l'autore raccomanda di “*enunciare come assiomi soltanto cose perfettamente evidenti per se stesse*”. Allora [It] si domanda se i “*teoremi naturalmente noti*” non possano intendersi in questa luce, come proposizioni che si “sentono” e non si provano. Questo approccio di Pascal, così naif almeno in apparenza, corrisponde pienamente alla sua filosofia e alla sua sensibilità.

Tornando al nostro interesse principale: ai numeri 10 e 11 della lista pascaliana di questi “*teoremi naturalmente noti*”, troviamo le seguenti proposizioni, perfettamente attinenti all'auspicato principio di continuità circolare.

- *La circonferenza che passa per due punti, uno all'interno di un altro cerchio e l'altro al di fuori, lo taglia in due punti e in due soltanto.*
- *Se due circonferenze hanno reciprocamente dei punti uno all'interno dell'altra, esse si taglieranno a vicenda in due punti e in due soltanto.*

Nel suo articolo [DeR], De Risi cita altri contributi al concetto della continuità nelle circonferenze, che da Finé arrivano appunto a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): ci limitiamo qui a citare Claude Richard (1589-1664) e Gilles Personne de Roberval (1602-1675), loro pure francesi, e ancora l'italiano Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) e John Wallis (1616-1703). Nella sua conclusione [DeR] accenna a Bernard Bolzano (1781-1848) e al teorema del valore intermedio, da lui provato in un articolo del 1817, di cui [Bol] fornisce la traduzione in inglese. Nella forma in cui già Bolzano lo enuncia e dimostra, nella sezione 15 del suo articolo, il teorema asserisce: *se  $f, g$  sono due funzioni reali di variabile reale, definite e continue in un intervallo  $[a, b]$  per cui  $f(a) > g(a)$  e  $f(b) < g(b)$ , c'è almeno un punto  $c$  di quell'intervallo in cui  $f(c)$  e  $g(c)$  coincidono.*

Il teorema si può allora applicare alle funzioni corrispondenti a due opportune semicirconferenze delle circonferenze tracciate nella prima proposizione di Euclide per ricavare il punto di intersezione richiesto: nell'esempio del capitolo 1, basta

- assumere

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, g(x) = \sqrt{2x - x^2} \text{ e poi } a = 0, b = 1,$$

- osservare che

$$f(0) = 1 > 0 = g(0) \text{ e } f(1) = 0 < 1 = g(1)$$

per dedurre l'esistenza (ma non il valore!) del punto C.

Naturalmente l'enunciazione e la dimostrazione del teorema del valore intermedio presuppone che si chiariscano preliminarmente i concetti di numero reale e di funzione continua e, ancora, che si spieghi perché i numeri reali debbano essere coinvolti.

A introdurre e descrivere una nozione di continuità provvede già Bolzano nel suo lavoro, anche se la definizione e la prova stessa del teorema saranno ulteriormente perfezionate da Cauchy nel suo *Cours d'analyse* del 1821: si vedano [BS, Capitolo 2, in particolare Teorema IV, e poi Nota III] e anche [Gra].

Per l'introduzione rigorosa dei numeri reali si dovrà invece aspettare il 1872.

Nel frattempo, a tornare sulla prima proposizione di Euclide era stato pure Augustus De Morgan, nelle sue *Short Supplementary Remarks on the first Six Books of Euclid's Elements* del 1849 [DeM]. Negli anni precedenti si erano progressivamente diffuse

critiche svariate verso gli *Elementi*, come pure, per reazione, interventi appassionati a loro difesa. De Morgan scrive in questa atmosfera. Prende inizialmente atto che Euclide si affida anche a postulati “*adottati tacitamente*”, forse assimilabili ai “*teoremi naturalmente noti*” di Pascal. Ma nel caso specifico della prima proposizione, a pagina 6 del suo lavoro suggerisce di assumere la seguente affermazione come ulteriore postulato: “*se due figure che hanno uno o più punti in comune hanno pure ciascuna un punto che non sta nell'altra, allora i bordi di quelle due figure si devono tagliare*”. Tanto, dunque, vale se come “figure” si assumono due cerchi che in parte si sovrappongono e in parte no. Anzi De Morgan, aggiunge per maggior chiarezza un altro postulato, e cioè che: “*ogni punto sta dentro o fuori un cerchio, a seconda che la sua distanza dal centro sia maggiore o minore del raggio*”.

Veniamo ai numeri reali e alle definizioni equivalenti che nel 1872 ne proposero vari matematici, tra cui Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918). Nell'approccio di Dedekind [Ded], un numero reale è introdotto come una *sezione* dell'insieme ordinato  $\mathbb{Q}$  dei razionali – da intendersi come una partizione di  $\mathbb{Q}$  in due sottoinsiemi non vuoti  $A < B$  con  $A$  privo di massimo. Sul nuovo insieme  $\mathbb{R}$  dei reali si stabiliscono una struttura di insieme ordinato, e addirittura di campo ordinato, che estendono quelle abituali di  $\mathbb{Q}$ . La loro proprietà chiave è l'*assioma di completezza*: *ogni insieme di reali non vuoto e superiormente limitato ammette un minimo confine superiore sup* – un principio che Bolzano aveva già applicato nella sua dimostrazione del teorema del valore intermedio, e che del resto si prova del tutto equivalente a quest'altro enunciato [Bl, Theorem 3.5.4 p. 167]. Di più, se la costruzione di Dedekind si applica non più ai razionali ma ai reali, determinandone le sezioni, ecco che la struttura che si ottiene resta isomorfa a quella dei reali e quindi non produce nulla di nuovo.

Anzi, il campo ordinato dei reali si caratterizza come l'unico che, a meno di isomorfismi, soddisfa l'assioma di completezza: un teorema di Edward Huntington (1874-1952) del 1903 [Hu].

L'*assioma della continuità* di Dedekind e Cantor asserisce nella sostanza che l'insieme ordinato dei reali è in corrispondenza biunivoca col continuo lineare della geometria. Trasferito appunto al conti-

nuo geometrico unidimensionale, il *postulato di continuità di Dedekind* diviene:

*se una retta si ripartisce in due sottoinsiemi non vuoti tali che nessun punto di uno sta tra due punti dell'altro, allora c'è un unico punto  $O$  della retta tale che uno dei due sottoinsiemi è una semiretta di origine  $O$  e l'altro il suo complemento.*

La sua formulazione originaria si trova, tradotta in inglese, nei commenti di Heath agli *Elementi* [He, Book I, p. 236]. Subito dopo, alle pagine 238-240, Heath dimostra come dedurre il principio della continuità circolare, e dunque – quanto a noi preme – una prova completa della prima proposizione di Euclide. Per la precisione, Heath spiega che, quando una circonferenza ha un punto all'interno e uno all'esterno di un'altra, allora le due si intersecano in *due* punti – come appunto asserito in [Gre, p. 94].

Sul tema generale del continuo e sulle discussioni che lo riguardano, rimandiamo volentieri a [We] e al più recente [Ze].

### 3. – Altre obiezioni a Euclide

Oltre alla questione della continuità, altri rilievi, meno sostanziali e forse più pignoli, furono mossi sin dall'antichità alla prima proposizione degli *Elementi*.

Uno dei commentatori più famosi di Euclide, Proclo [Pr], ne riferisce uno, attribuito a Zenone di Sidone – da non confondersi con l'omonimo filosofo eleatico dei paradossi. La perplessità riguarda stavolta l'eventualità che i lati AC e BC si congiungano prima di arrivare a C e quindi condividano non solo l'estremo C, ma un intero sottosegmento. In questo caso il triangolo equilatero ABC non verrebbe neppure a costituirsi, e diverrebbe una figura più composita, formata da un triangolo sovrastato da un segmento. Proclo e altri cercano di rispondere a questa contestazione, senza riuscire a opporre argomenti convincenti e definitivi. Heath [He, Book I, p. 196-199] descrive in dettaglio questi tentativi di provare che due segmenti di questo genere non possono avere un sottosegmento proprio comune, ma conclude la sua analisi suggerendo esplicitamente di accettare questa proprietà come postulato.

A chi poi si domanda se il punto C non possa addirittura giacere sul segmento originario AB, si

può invece obiettare che una tale ipotesi contraddice la quinta nozione comune di Euclide, che il tutto è maggiore della parte. Nello specifico, infatti, AC e BC, come parti proprie di AB, non potrebbero dividerne la lunghezza.

E ancora: ci si può chiedere quali premesse garantiscano, all'inizio degli *Elementi*, che la costruzione euclidea si mantenga tutta nel piano originario e non ne fuoriesca. Ma in verità lo stesso Euclide esclude questo caso, sia pure soltanto all'inizio del libro XI, quando inaugura la sua trattazione della geometria solida. La prima proposizione di questo libro afferma che un segmento non può distribuirsi parte in un piano e parte fuori. Forse il chiarimento è tardivo? D'altra parte, i primi libri degli *Elementi* sono dedicati alla geometria piana.

Risposte più argomentate ed esaurienti a tutti questi rilievi si trovano in [He, pp. 196-199 e 242-243].

Aggiungiamo che, all'interno degli *Elementi*, lo studio dettagliato della posizione reciproca di due circonferenze, compreso il caso in cui queste sono secanti, occupa il libro III. Nemmeno in quest'occasione, però, si enuncia un principio di continuità circolare. Tuttavia, una simile premessa viene tacitamente usata, oltre che nella Proposizione 1, anche nella Proposizione 22 del libro I, quando si prova l'inverso della ben nota proprietà di un triangolo che un suo lato qualsiasi è sempre minore della somma degli altri due e si mostra che, se tre segmenti soddisfano queste disequaglianze, allora si può costituire un triangolo che li ha per lati.

La costruzione del triangolo equilatero viene poi adoperata ripetutamente negli *Elementi*. Si comincia con la proposizione 2 del libro I, dove si mostra come piazzare un segmento uguale a un segmento dato con estremo in un punto assegnato. Si prosegue, sempre nel libro I, con la bisezione di un angolo retto (proposizione 9), la costruzione del punto medio di un segmento (proposizione 10), quella della perpendicolare a una retta data in un suo punto (proposizione 11), e poi, nel libro XI, su problemi di geometria dello spazio (proposizioni 11 e 22).

D'altra parte la proposizione 1, pur impiegata da Euclide nelle sue dimostrazioni, non sempre è indispensabile per giungere alle relative conclusioni. Talora basta affidarsi all'esistenza di un triangolo isoscele di base assegnata AB – la cui costruzione è

certamente meno complicata e delicata del triangolo equilatero, potendo prescindere dal problema dell'intersezione di due circonferenze, si veda per esempio [Ha, Proposition 10.2 p. 100].

#### 4. – La costruzione del triangolo equilatero in altre geometrie

Lecito domandarsi se esistono costruzioni del triangolo equilatero alternative a quella di Euclide.

Quella suggerita da Leonardo da Vinci al punto 344 della parte terza del *Trattato della pittura* [Leo] è molto empirica e ben poco astratta:

*Quanto si possano traversare le braccia sopra il petto, e che le gomita vengano nel mezzo del petto. Queste gomita con le spalle e le braccia fanno un triangolo equilatero.*

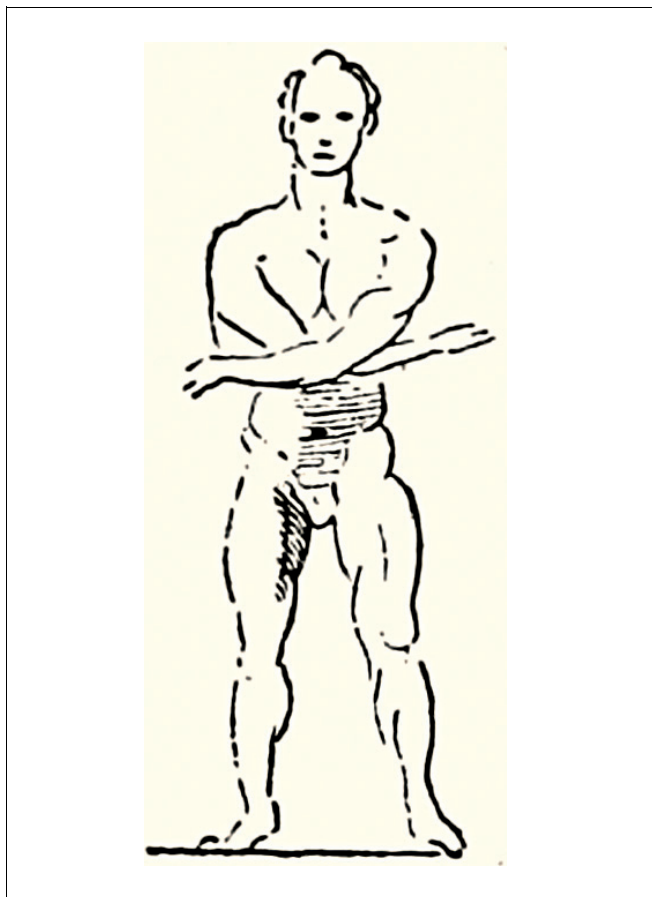


FIGURA 3 – il triangolo equilatero secondo Leonardo,  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/  
 File:Leonardo\\_-\\_Trattato\\_della\\_pittura,\\_1890\\_  
 \(page\\_193b\\_crop\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonardo_-_Trattato_della_pittura,_1890_(page_193b_crop).jpg)

Se invece preferiamo limitarci agli strumenti classici della geometria euclidea, riga e compasso, possiamo trovare due ulteriori procedimenti di costruzione, differenti da Euclide, in [MC, p. 30]. Il primo echeggia quello ben noto dell'esagono regolare:

- si considerano una circonferenza di centro  $O$  e un suo punto  $A$ ,
- si descrive la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AO$ ,
- si prendono i due punti di intersezione  $B$  e  $C$  di questa con la circonferenza di partenza,
- si ripete la costruzione con  $B$  e  $C$  al posto di  $A$ , ottenendo, in aggiunta ad  $A$ , due nuovi punti  $D$  ed  $E$  sulla circonferenza.

Il triangolo equilatero cercato è quello di vertici  $A$ ,  $D$ ,  $E$ .

Naturalmente la procedura si affida di nuovo, e con tutta evidenza, al principio della continuità circolare, quando desume l'esistenza di due, e solo due punti di intersezione  $B$ ,  $C$ , e poi  $D$ ,  $E$ . Presenta tuttavia una diversità sostanziale rispetto all'argomento di Euclide: muove infatti da una circonferenza data, senza prefissare il lato del triangolo da costruire. Lo stesso vale per l'ulteriore costruzione citata in [MC].

L'attenzione che Euclide tributa per il triangolo equilatero, riservandogli la prima proposizione degli *Elementi*, merita pure qualche interesse. Il libro [MC] cita e celebra le proprietà, le caratteristiche e le virtù di questa figura, cioè il triangolo equilatero, descrivendone anche una gran varietà di applicazioni pratiche, dalla medicina alle scienze spaziali, dalla geografia alle scienze sociali, e molto altro.

Sempre [MC] rileva come, dal punto di vista strettamente matematico, il triangolo equilatero rappresenti in geometria il poligono regolare più semplice, ma ricorra poi ripetutamente pure come faccia nei poliedri regolari. Inoltre anche in aritmetica il così detto triangolo di Tartaglia, o di Pascal che dir si voglia, ha sagoma equilatera.

In [MC] si sottolinea poi come, in religione, il triangolo equilatero sia inteso addirittura come simbolo di Dio. Del resto, la sacra Tetraktys dei pitagorici ha essa pure la sua forma, e per di più compare ancor oggi per motivi ben più terreni, come disposizione iniziale dei birilli nel bowling o delle bocce nel biliardo.

Dal punto di vista politico, o patriottico, il triangolo equilatero figura nelle bandiere di alcuni paesi, come Filippine e Nicaragua. Si trova poi largamente in arte e natura, e perfino nell'anatomia del corpo umano, come Leonardo ci ha già fatto osservare.

Venendo di nuovo a Euclide, è giusto chiedersi se e come la sua costruzione del triangolo equilatero si estende alle moderne geometrie non euclidee. Vale allora la pena di menzionare anzitutto l'osservazione di Lorenzo Mascheroni che, nella sua *Geometria del compasso* [Mas] – quella “che per via del solo compasso senza la riga determina la posizione de' punti” –, proprio all'inizio del primo libro sottolinea come la procedura proposta negli *Elementi* per costruire il triangolo equilatero si avvalga del solo compasso, senza bisogno di riga, almeno se muove dai punti A e B alla ricerca di un C “tanto lontano da ciascuno di essi, quanto essi lo sono tra loro”.

Passiamo però alle geometrie iperbolica e sferica. Ad esse la costruzione euclidea formalmente si trasmette senza apparenti modifiche. Tuttavia, il contesto diverso produce differenze sostanziali. Le proprietà dei poligoni regolari, e in particolare dei triangoli equilateri, cambiano radicalmente rispetto al modello euclideo. Per esempio, in un triangolo equilatero l'ampiezza degli angoli interni può variare. Inoltre, come osservato da [Gr, p. 191] nel caso iperbolico, questa ampiezza determina univocamente la lunghezza del lato.

In questa prospettiva estesa, il triangolo equilatero euclideo si può vedere come una sorta di limite comune, rispettivamente superiore e inferiore, per i triangoli equilateri iperbolici o sferici, che però sono soggetti nel proprio ambito alle variazioni che si accennavano.

Così nel caso iperbolico, facendo riferimento al modello costituito dal disco di Poincaré, si passa da un triangolo puramente ideale, che ha i tre vertici sul bordo del disco e angoli interni nulli, a un triangolo sempre più piccolo, che si avvicina al centro e il cui angolo interno tende a quello euclideo, dunque a  $\pi/3$  in radianti. Si ha allora a meno di isometrie un triangolo equilatero con angolo interno  $\alpha$  per ogni reale  $\alpha$  con  $0 < \alpha < \pi/3$ . Come detto, la lunghezza del lato di questo triangolo cambia di conseguenza, legata al valore dell'angolo.

Nella geometria sferica, invece, si parte da un triangolo limite, che consiste di un singolo punto

preso come polo e approssima il triangolo equilatero euclideo, e ci si allarga sulla sfera fino all'altro caso estremo, in cui i tre vertici del triangolo si distribuiscono sull'equatore. L'angolo interno  $\alpha$  stavolta varia nell'ambito  $\pi/3 < \alpha < \pi$ . Come esempio intermedio, si ottiene un triangolo equilatero con tre angoli interni retti. Il lato varia ancora insieme all'angolo. Inoltre, come sottolinea Russell [Ru], nel caso sferico il piano è limitato e la lunghezza del lato originario AB deve tenere conto di questo vincolo: quindi non può essere arbitrariamente grande, nello specifico non può superare un terzo dell'equatore.

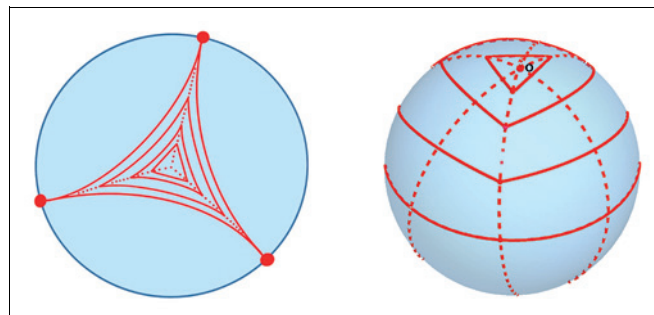


FIGURA 4 – triangoli equilateri, a sinistra il caso iperbolico, in riferimento al disco di Poincaré, a destra il caso sferico.

Maggiori dettagli sulle proprietà dei triangoli equilateri nelle geometrie non euclidee si trovano in [MC, Property 83 p. 74] e in vari punti di [Ha, Chapter 7]. Un approccio molto chiaro si trova in [ArDLMNR], che tratta il caso iperbolico alle pagine 165-166 e quello sferico a pagina 45. <sup>(6)</sup>

## 5. – I rivali di Euclide

Nel corso dell'Ottocento, in Gran Bretagna e altrove si accese un animato dibattito sull'insegnamento della geometria e sull'opportunità di basarlo ancora sugli *Elementi* di Euclide [Ca]. La discussione ne contrappose detrattori e difensori. Sorse in proposito nel Regno Unito una *Association for the Improvement of Mathematical Teaching*, che sviluppò analisi e proposte come [As]. Noi ci limitiamo qui a presentare un alfiere di ciascuno dei due campi

<sup>(6)</sup> Ringraziamo Silvia Benvenuti per averci segnalato questo libro e per tutti i suoi suggerimenti su questo punto.

avversi, soprattutto in relazione alla prima proposizione euclidea.

James Wilson (1836-1931) fu prete della Chiesa di Inghilterra ed educatore, più che matematico; si interessò tuttavia della geometria e del suo apprendimento. La sua opinione fu certamente influente, se una sua riflessione del 1868 [Wi1] trovò pronta traduzione anche in Italia, sul *Giornale delle Matematiche*. Nel suo scritto Wilson elogiava anzitutto il commento equilibrato e oggettivo che su Euclide aveva fornito De Morgan [DeM]. Dal punto di vista didattico sottoscriveva però l'opinione già espressa da illustri matematici, secondo cui “*l'Euclide è antiquato, artificioso, illogico e inadatto come libro di istituzione*”. Non menzionava espressamente la prima proposizione degli *Elementi*, ma stigmatizzava tutto “*l'intralciato ordine*” del primo libro.

Wilson elaborò in quello stesso anno la sua proposta di didattica della Geometria [Wi2], assai diversa da quella tradizionale di Euclide. Un accenno al principio della continuità circolare accompagnava, alla pagina 40 di quel trattato, non tanto la costruzione di un triangolo equilatero quanto la bisezione di un angolo.

Al riguardo il metodo di Wilson procede così. Sceglie anzitutto, a uguale distanza dal vertice O, due punti A e B sui lati dell'angolo. Traccia poi due circonferenze secanti di centro rispettivamente A e B, e di ugual raggio, minore di  $OA = OB$ . Indicato con C un loro punto di intersezione, individua in OC la bisettrice cercata. Completata la sua argomentazione, Wilson sentì tuttavia il bisogno di una precisazione: “*It is assumed here that, if a circle has one point inside another circle, the circumferences will intersect one another*” – insomma, un'enunciazione del principio di continuità circolare.

Tra i più fieri e incrollabili paladini di Euclide si collocò invece Charles Dogdson, alias Lewis Carroll (1832-1898): come scrittore, autore dei romanzi di Alice; nella vita, però, logico e matematico, insegnante al Christ Church College di Oxford. In questa veste compose nel 1885 una requisitoria a sostegno delle sue convinzioni, della quale già il titolo è rivelatore: *Euclid and his Modern Rivals* [Do].

Carroll conferma talora in questo scritto la sua vena brillante, spiritosa e fantasiosa di narratore. Immagina infatti che un processo sia allestito nell'oltretomba, pro o contro Euclide, alla presenza del

diretto interessato. Il giudice è Minosse, che insieme ad altri personaggi discute i nuovi testi di geometria alternativi agli *Elementi*, compreso quello di Wilson. La *Association for the Improvement of the Mathematical Teaching* è ripetutamente citata e criticata, ma se ne propone sarcasticamente un allargamento a una *Association for the Improvement of Things in General*.

Il guaio è, però, che, quando passa a censurare i censori di Euclide e propone una lista pignola delle loro presunte magagne, Dogdson alias Carroll diventa pedissequo e mortalmente noioso. Lunghe pagine sono dedicate ad analizzare e stroncare pure le teorie di Wilson. L'osservazione sopra riferita sulle conferenze incidenti viene bollata ironicamente da Minosse [Do, p. 139] come l'ipotesi più audace mai fatta nella geometria moderna, “*the boldest assumption yet made in Modern Geometry*”.

Per completezza aggiungiamo che il processo immaginario di Dogdson si conclude col prevedibile trionfo di Euclide.

La controversia sull'insegnamento della geometria si diffuse pure in Italia, ancora con posizioni contrapposte.<sup>(7)</sup>

Così ci fu chi, perfino nel nostro paese, dissentì sull'uso degli *Elementi* nella didattica. Citiamo nuovamente al riguardo un solo nome, quello del professore perugino Rinaldo Marcucci Ricciarelli, che battagliò a lungo contro quell'opera e scrisse in particolare nel 1871 una lettera polemica dal titolo nuovamente rivelatore: *L'Euclide deve essere bandito dalle scuole classiche* [Ri], perchè troppo astratto e inaccessibile, incapace di comunicare realmente ai giovani la geometria. Per maggiori dettagli sulla vicenda rimandiamo a [SaN]. Qui ci limitiamo a considerare la critica alla proposizione 1. Scrive dunque Ricciarelli:

*“Io non posso tollerare in Euclide il cominciare la geometria, dopo una noiosa filastrocca di postulati e definizioni, con tre problemi. [...] Il 1.º è:*

*Sovra una data retta finita, costruire un triangolo equilatero.*

---

<sup>(7)</sup> Rimandiamo a [Giac1, 2] per una trattazione del dibattito che si svolse in Italia a metà Ottocento sull'uso degli *Elementi* euclidei nella didattica della geometria e degli sviluppi che ne seguirono.

*Appena ti ha dato, benigno lettore, l'idea del triangolo, ti fa passare alla costruzione dell'equilatero. Se poi ti piacesse ridere, leggi la risoluzione; e poscia ti apparirà un piccolo triangolo equilatero chiuso nello spazio di due buoni cerchi che si tagliano.*"

Alla formulazione del problema, Ricciarelli aggiunge un commento sarcastico in nota: "Data retta finita! se è data, è anche finita". Ma pure su questa affermazione si potrebbe discutere, vista la delicatezza dei concetti di finitezza e infinitudine.

L'amore per gli *Elementi* di Euclide tuttavia resistette, anche a prescindere dalla già ricordata ammirazione di Betti e Brioschi. Ancora nel 1912, Alessandro Padoa ne rivendicava la limpidezza [Pad]. Rispondendo infatti all'atteggiamento di chiusura intransigente di Benedetto Croce contro la matematica e specificamente alla sua "apologia denigratoria" verso la geometria, Padoa osservava:

*"bastava che egli desse un'occhiata a qualsivoglia trattato di Geometria, da quello antichissimo di Euclide sino a' più recenti, per accorgersi che nessun concetto geometrico fu mai definito senza ricorrere a qualche altro concetto geometrico e che nessun asserto geometrico fu mai dimostrato senza ricorrere a qualche altro asserto geometrico, oltre a quelli espressi dalle definizioni."*

Una certezza granitica che però, almeno nel caso della proposizione 1, si scontra con le obiezioni che sappiamo.

Nell'ambito didattico, ci furono in quegli anni, e pure successivamente, tentativi autorevoli di superare la lacuna iniziale degli *Elementi* per presentare a studentesse e studenti una trattazione organica e inappuntabile oltre che accessibile – ma non concisa e immediata come il pur discutibile approccio euclideo. Così nell'edizione 1890 di [Fa] (un libro che si può ancora trovare in rete, in ristampe anche recenti), si arriva solo a pagina 105, Teorema 231, ad asserire che due circonferenze, i cui centri distano meno della somma dei raggi e più della loro differenza in valore assoluto, ammettono due punti comuni. E nel classico testo di Enriques e Amaldi [EA], esso pure reperibile in rete, si attende pagina 127 per postulare che "un segmento o un arco circolare che abbia gli estremi da parti opposte rispetto ad una retta o ad una circonferenza sega la retta o la circonferenza in un punto".

## 6. – Qualche eco letteraria

A fine Settecento Euclide e i suoi *Elementi* erano ancora in auge nella scuola anglosassone, anche se spesso fatalmente sgraditi agli studenti obbligati a studiarli. Fu così che il giovane Samuel Coleridge si propose di renderli più attraenti e accessibili, trasponevoli in versi, attraverso *A Prospectus and Specimen of a Translation of Euclid in a series of Pindaric Odes*. Coleridge (1772-1834) sarebbe poi divenuto un poeta di gran nome, tra i massimi esponenti del romanticismo inglese. Quando però concepì e avviò il suddetto progetto, nel 1791, non era ancora diciannovenne e la sua arte era ancora acerba. Del resto, limitò il suo esperimento a un solo esempio, che fu naturalmente la prima proposizione di Euclide. Le dedicò un'ode, il cui titolo fu *Un problema matematico, A mathematical problem* [Co]. Il quale problema è, appunto, la costruzione del triangolo equilatero, che trovò così una sua eco poetica e comunque un'esposizione in versi, seppure non memorabili. Riportiamo solo l'inizio dell'ode di Coleridge.

*This was now – this was erst,  
Proposition the first – and Problem the first.*

*On a given finite line  
Which must no way incline;  
To describe an equi –  
– lateral Tri –  
– A, N, G, L, E.  
Now let A. B.  
Be the given line  
Which must no way incline;  
The great Mathematician  
Makes this Requisition,  
That we describe an Equi –  
– lateral Tri –  
– angle on it:  
Aid us, Reason – aid us, Wit!*

Segue il resoconto dettagliato della costruzione di Euclide, non scevro di qualche enfatico riferimento alla storia e alla geografia del mondo.

La fortuna letteraria della prima proposizione di Euclide non si ferma comunque a Coleridge ed è anzi abbondante e per certi versi stupefacente.

A parlarne qualche decennio dopo è pure Charles Dickens (1812-1870) in uno dei suoi *Christmas Books, Racconti di Natale*, pubblicato nel 1845 e intitolato *The Cricket on the Earth, Il grillo del focolare* [Di, pp. 102-205]. Nei capoversi iniziali leggiamo nella traduzione italiana di Emanuele Grazzi [Di, p. 104]:

*La signora Peribingle, uscendo di casa nel crepuscolo rigido e camminando rumorosamente sulle pietre bagnate con un paio di zoccoli che lasciavano per tutto il cortile innumerevoli impronte sommarie della prima proposizione di Euclide, riempì il Ramino fino al beccuccio.*

Per ramino si intende un bricco panciuto di rame. In effetti l'impronta di uno zoccolo sulla neve può richiamare due cerchi che tendono a secarsi, anche se la parte comune (quella che con termini tecnici si chiama *mandorla*, o *vesica piscis*) resta indistinta – a rimarcare ancor più la vaghezza e il mistero dei due possibili punti di intersezione. La citazione euclidea è, stavolta, molto breve e circoscritta, ma colpisce in uno scrittore, come Dickens, che in genere è disinteressato, se non fortemente critico, verso la matematica. Si vede proprio che la questione del triangolo equilatero l'aveva colpito, quando gli era toccato di incontrarla sui banchi di scuola. Così, almeno, ci viene da pensare.

Pure Lewis Carroll riprese la prima proposizione di Euclide in un dialogo allegorico del 1895: *What the Tortoise Said to Achilles*, ovvero *Quel che disse la tartaruga ad Achille* [Car]. Come sappiamo, a quell'epoca, a fine Ottocento, la fiducia incondizionata in Euclide si era assai attenuata, ma resisteva fieramente nel nostro autore. Il quale però si sofferma non tanto sul problema della continuità circolare, quanto sulla struttura logica del ragionamento euclideo. L'accento al triangolo equilatero è dunque abbastanza debole, ben meno rilevante che in Coleridge. Tuttavia, ci pare giusto riferirlo per completezza.

Carroll, dunque, immagina che i protagonisti di un famoso paradosso di Zenone di Elea, Achille e la tartaruga, abbiano concluso la loro rincorsa e che l'animale sia stato finalmente raggiunto. Ma a questo punto un nuovo inseguimento comincia, puramente intellettuale, basato sulla prima proposizione degli *Elementi* e stimolato dalla tartaruga. Essa ricorda ad Achille la deduzione di Euclide già

riportata nel nostro primo capitolo (con l'uso del procedimento di *modus ponens*):

- (a) i segmenti AC e BC sono singolarmente uguali ad AB;
- (b) segmenti uguali a un terzo sono uguali tra loro;
- (c) dunque AC e BC sono uguali.

Ma, osserva la tartaruga, a rigore un ulteriore passaggio deve essere aggiunto nella dimostrazione

- (d) se (a) e (b), allora (c),

e poi un altro ancora

- (e) se (a), (b) e (d) allora (c)

e così via, in una procedura apparentemente senza fine.

Carroll vuole così evidenziare, nel suo stile paradossale, come una dimostrazione vada sempre distinta dalle regole di deduzione cui si affida, in questo caso il *modus ponens*, senza bisogno di richiamare queste ultime all'infinito.

Alla geometria di Euclide fa invece chiaro riferimento Jorge Luis Borges nel suo famosissimo racconto *La morte e la bussola*, presente nella raccolta *Finzioni* [Bor, pp. 726-738]. Una storia poliziesca, che ci narra di una serie di delitti, distribuiti regolarmente nello spazio e nel tempo: i primi tre, infatti, corrispondono a “*i vertici perfetti d'un triangolo equilatero e mistico*”. L'investigatore ne studia le caratteristiche, esamina dove e quando sono stati compiuti e rileva: “*I tre luoghi, in realtà, erano equidistanti. Simmetria nel tempo (3 dicembre, 3 gennaio, 3 febbraio); simmetria nello spazio... Sentì, d'un tratto, che stava per decifrare il mistero. Un compasso e una bussola completarono questa improvvisa intuizione*”. Egli presagisce infatti che i tre vertici sinora ottenuti facciano parte di un “*rombo perfetto*”, che raddoppia il triangolo equilatero fin qui disegnato. Crede allora di dedurre luogo e tempo dell'ultimo delitto, corrispondenti al quarto vertice e al successivo 3 marzo – ma poi anche in questo racconto, come in ogni giallo che si rispetti, sorprese e colpi di scena sono sempre nascosti dietro l'angolo.

Concentriamoci sull'aspetto geometrico della questione. Sulla base del testo di Borges sembra ragionevole ritenere che il punto mancante, dunque il quarto vertice del rombo, si ottenga proprio con la costruzione euclidea: se chiamiamo A, B, C i primi tre vertici e descriviamo le circonferenze di centro A e B e di raggio AB, queste si incontrano, oltre che in C, in un punto ulteriore D, che è quello cercato. Del

rombo risultante, il lato originario AB diventa la diagonale minore.

Ma in verità un lettore matematico pignolo potrebbe nutrire qualche dubbio. Infatti, la stessa costruzione si può ripetere a partire da AC e BC, invece che da AB, così che i rombi che estendono il triangolo equilatero originario sono 3, a seconda di quale lato si sceglie per avviare la procedura. Dunque in teoria emergono 3 possibili soluzioni per D, a meno che altre considerazioni, per esempio geografiche, non accreditino un lato rispetto agli altri (per esempio, come quello più a sud). Forse a questo allude Borges quando accenna alla bussola, oltre che al compasso.<sup>(8)</sup>

## 7. – Euclide I, 1 oggi: tra diagrammi e calcolatori

Nel 1882, pochi anni prima del saggio dialogico di Carroll su Achille e tartaruga, nuove critiche agli *Elementi* di Euclide, che ne evidenziarono le carenze logiche e rimproverarono l'eccessivo ricorso all'intuizione, furono portate da Moritz Pasch (1843-1930) [Pas]. Fu questo l'impulso che condusse all'elaborazione dei *Fondamenti della geometria* di David Hilbert (1862-1943) [Hi], dei quali si riconobbero il rigore e l'accuratezza superiori, ma si rimproverò anche l'eccessiva astrazione. Per esempio, la condizione chiave di continuità e completezza vi veniva enunciata in forma molto teorica e ben poco esplicita: alla fine dei suoi assiomi, Hilbert infatti postulava che il sistema geometrico fin lì risultante non fosse suscettibile di ampliamenti propri che continuassero a soddisfare quelle stesse premesse.

Come è ben noto, poi, sin dalle righe iniziali della sua opera Hilbert invitava a considerare non i comuni punti, rette e piani della geometria tradizionale, come sarebbe parso naturale e intuitivo, ma “tre distinti sistemi di cose”. Il termine che veniva così adoperato, cioè “cose”, e l'impostazione aristocratica che vi soggiaceva suscitarono le critiche e le ironie altrettanto famose di Henri Poincaré (1854-1912) in *Scienza e metodo* [Po], capitolo III, *La matematica e la*

*logica*, II: “Che cosa sono queste cose, non soltanto non ne sappiamo niente, ma non dobbiamo cercare di saperlo. Non ne abbiamo bisogno, e chi non avesse mai visto né punto, né retta, né piano potrebbe far geometria altrettanto bene che noi”.

Insomma, la logica, invocata a confermare e soccorrere l'intuizione, quando sovrabbonda ed eccede, finisce invece per mortificarla. La geometria, già commista sin dalle origini con l'aritmetica e poi progressivamente con l'algebra, diventa puro esercizio deduttivo.

Ora, è innegabile che il contributo della logica rechi alla geometria, non solo ai tempi di Pasch e Hilbert ma pure al giorno d'oggi, ovvi benefici, specie se unito al progresso dell'informatica. Compaiono infatti da qualche anno sistemi di controllo e convalida logica delle dimostrazioni, *proof checkers*, anche nel caso di Euclide. Per esempio [BeNW] propone un metodo di verifica al calcolatore delle dimostrazioni del primo libro degli *Elementi*, opportunamente rivisto per colmarne le lacune. In questa rielaborazione le 48 proposizioni originarie diventano 235 teoremi, e agli assiomi si aggiunge un principio della continuità circolare, in una forma che ben conosciamo: *se una circonferenza ha un punto interno e uno esterno a un'altra, allora c'è un punto comune su entrambe le circonferenze*. In questo approccio, la prova formale della prima proposizione di Euclide si guadagna un'intera appendice e finisce per occupare quasi due pagine.

A onore del vero, una rivisitazione logica degli *Elementi* risale a molti secoli addietro: per esempio, a rielaborare i primi sei libri secondo i canoni della sillogistica aristotelica avevano pensato nel Cinquecento, quindi ben prima di Carroll, Pasch e Hilbert, due matematici, Christian Herlin (1505-1562) e Conrad Dasypodius (1532-1600), l'uno francese e l'altro svizzero. La loro edizione uscì nel 1566 [HeD] – e in verità non sembra percepire la sottigliezza del problema dell'intersezione di due circonferenze.

Anche Leibniz aveva evidenziato una supremazia del ragionamento deduttivo sulle immagini, in *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, Libro IV, *Sulla conoscenza*, verso la fine del capitolo I [Lei]:

*non sono le figure a fornire la dimostrazione ai geometri [...]. La forza della dimostrazione è indipendente dalla figura tracciata, che è chiamata in causa solo per facilitare la comprensione di ciò che*

<sup>(8)</sup> In verità Borges insinua l'ipotesi che la sua storia si ambienta in “una Buenos Aires di sogno”. Ma lo fa quasi sottovoce, non all'interno del racconto, ma in una premessa generale alla seconda parte di *Finzioni* [Bor, p. 705].

si vuol dire e per fissare l'attenzione; sono le proposizioni universali, vale a dire le definizioni, gli assiomi e i teoremi già dimostrati a costituire il ragionamento e a sostenerlo quand'anche la figura non ci fosse.

Leibniz proseguiva citando proprio Herlin e l'edizione sua e di Dasypodius degli *Elementi*: “un altro dotto di nome Herlinus ha ridotto le medesime dimostrazioni in sillogismi e prosillogismi”. Non che per Leibniz le figure vadano abolite – ricordiamo che egli anticipò l'uso di quelli che oggi si chiamano diagrammi di Eulero-Venn. Ma la loro utilità è limitata a una funzione che potremmo definire didattica e pedagogica.

D'altra parte, alla fine del secolo scorso proprio due logici di gran fama, come Jon Barwise e John Etchemendy, sottolinearono al contrario l'importanza della visualizzazione a supporto del ragionamento astratto [BaE], nella scia dei diagrammi di Eulero-Venn; si chiesero se “*the logocentricity of mathematics arid logic*”, dunque “*la logocentricità dell'arida logica della matematica*”, non andasse superata e aperta a nuove forme di espressione e comunicazione; elaborarono così nuovi programmi anche visuali per introdurre e assistere formalismi e deduzioni. *Hyperproof* fu uno di questi: un nome che non rinnega in alcun modo l'impegno a “dimostrare”, ma intende perseguirlo con le nuove impostazioni e modalità che si dicevano.

Una simile esigenza, se investe pure l'astrattissima logica, vale a maggior ragione per la geometria. Ritorniamo allora agli *Elementi* di Euclide e alle loro caratteristiche<sup>(9)</sup>. Tra queste sta certamente il ricorso alla visualizzazione, che è ampio e naturale e assiste l'argomentazione.

Per cominciare, Euclide prova le sue proposizioni, a cominciare dalla prima, con spirito assolutamente costruttivo: produce esplicitamente, con l'aiuto di riga e compasso, gli oggetti geometrici di cui tratta. È vero che si affida spesso e volentieri a tecniche astratte, come quel procedimento per assurdo che i moderni intuizionisti disconoscono. Tuttavia, anche quando le adopera, l'antico matematico ricorre talora a figure e diagrammi per illustrare le

situazioni contraddittorie che intende confutare. Un esempio è fornito da un'altra proposizione sull'intersezione di due circonferenze, la decima del libro terzo, che già abbiamo citato. Essa afferma che i loro punti comuni sono al più due. La dimostrazione procede per assurdo, presupponendo due circonferenze con più di due punti di intersezione. Ma poi il disegno aiuta a evidenziare la situazione geometrica deforme che ne deriva.

D'altra parte, gli *Elementi* seguono di appena mezzo secolo il primo sviluppo della logica che conosciamo, e cioè la sillogistica trattata da Aristotele negli *Analitici primi e secondi* [Ar2]. Dunque, ai tempi di Euclide la logica muoveva, per così dire, i primi passi. La stessa logica, e perfino la sillogistica, si sarebbero poi evolute. Quanto a una teoria compiuta della dimostrazione, che stabilisca i metodi possibili di deduzione e ne misuri la potenza e i limiti, essa prende a evolversi solo nel Novecento, con Hilbert, Gentzen e molti altri, dunque due millenni abbondanti dopo Euclide. E ancora: è stato osservato che, dal punto di vista logico, le proposizioni degli *Elementi* hanno struttura relativamente elementare; gli oggetti di cui producono la costruzione sono spesso descritti da semplici congiunzioni di condizioni “basiche”, cioè atomiche o negazioni. Insomma, la logica di Euclide è ancora molto parziale e comprensibilmente imperfetta.

Passiamo ai postulati. Viene giustamente rilevato come alcuni tra essi, segnatamente il quinto e il secondo, sono tutto che meno che verificabili a occhio. L'intuizione non soccorre a loro riguardo, e infatti nel corso dei secoli si è lungamente dibattuto sulla loro affidabilità, con gli esiti che conosciamo. Si è però osservato che una qualche visualizzazione aiuta a percepirla, magari solo per discuterne e dubitarne. Un po' come il Demiurgo di Platone, che disegna l'universo a imitazione di un modello ideale superiore da lui contemplato, e lo fa operando nel modo migliore che gli riesce, ma con strumenti ed esiti accessibili agli esseri umani. Fuor di metafora: la visione aiuta la comprensione anche per i postulati. Questi ultimi, poi, hanno la funzione di sorreggere l'intero sistema euclideo, ma senza quelle pretese di coerenza e completezza che solo con l'approccio di Hilbert si instaurarono e caratterizzano la concezione e l'impostazione della moderna assiomatica.

<sup>(9)</sup> Riprendiamo molte delle considerazioni svolte in articoli, come [Giaq] e [Mi], che saranno presentati tra poche righe.

Il sussidio delle figure risulta quindi basilare tanto nelle premesse quanto nel successivo sviluppo degli *Elementi*. Ma in questa ottica l'omissione di un principio della continuità circolare nella prova della prima proposizione, di per sé necessaria e imposta dal rigore, risulta meno grave, anzi giustificata. È il disegno a suggerire l'esistenza del punto C. Inoltre, negli *Elementi* la formulazione del quinto postulato e la definizione di rette parallele, che abbiamo ricordato in precedenza, confermano come Euclide accolga tacitamente il punto di vista aristotelico e intenda una retta e una curva come continui.

A intraprendere uno studio accurato del ragionamento per immagini di Euclide e a sviluppare una teoria sistematica dei diagrammi è stato Kenneth Manders, storico e filosofo della scienza, soprattutto nell'articolo [Man]. Ulteriori riflessioni e contributi all'argomento, sempre emerse nell'ambito filosofico, si trovano in un successivo lavoro di Marcus Giaquinto [Giaq], che sostiene un approccio diagrammatico alla geometria e specificamente a Euclide, ma espone forti riserve verso un suo analogo impiego in analisi, per esempio a riguardo del teorema del valore intermedio di Bolzano.

A realizzare sistemi automatici di sviluppo diagrammatico delle teorie di Euclide sono stati invece, tra gli altri, Miller [Mi] e Avigad, Dean, Mumma [AvDM]. Riferiamo brevemente del primo approccio: tra l'altro, il titolo di [Mi], alludendo ai rivali di Euclide nel ventesimo secolo, echeggia volutamente il libro di Dogdson = Carroll del 1895. L'articolo in questione presenta un programma CDEG *Computerized Diagrammatic Euclidean Geometry*, il cui scopo è ben descritto dal suo stesso nome. L'autore muove dalla premessa che un buon metodo di dimostrazione informale assistita dai diagrammi non può mai discostarsi dalle risultanze di un serio approccio formale, e deve trovarvi conferma: una garanzia per i matematici formalisti. Propone poi nelle pagine iniziali un diagramma esteso, potremmo dire una prova senza parole, della prima proposizione di Euclide, che in verità non ci sembra troppo sintetico e illuminante. Ma poi [Mi], oltre a riproporre per completezza la prova originaria degli *Elementi* e a discutere il principio della continuità circolare, riprende questo diagramma e illustra la relativa dimostrazione all'interno di CDEG.

L'approccio di [AvDM] ha caratteristiche analoghe a [Mi].

Insomma, da questi recenti sviluppi c'è da desumere che la prima proposizione di Euclide non abbia ancora esaurito la sua attrattività. Al contrario, la costruzione apparentemente innocente del triangolo equilatero è tuttora oggetto di dibattiti, approfondimenti e discussione in informatica e filosofia, come pure nelle scienze della comunicazione e del linguaggio.

## BIBLIOGRAFIA

- [Ar1] ARISTOTELE, *Fisica*, a cura di Roberto Radice, Bompiani, Milano, 2011
- [Ar2] ARISTOTELE, *Organon: Categorie, De Interpretazione, Analitici Primi, Analitici Secondi, Topici, Confutazioni Sofistiche*, a cura di Maurizio Migliori, Bompiani, Milano, 2016
- [ArDLMNR] FERDINANDO ARZARELLO, CRISTIANO DANÉ, LAURA LOVERA, MIRANDA MOSCA, NICOLETTA NOLLI, ANTONELLA RONCO, *Dalla geometria di Euclide alla geometria dell'Universo. Geometria su sfera, cilindro, cono, pseudosfera*, Springer Italia, Milano, 2012
- [As] Association for the Improvement of Mathematical Teaching, *Syllabus of Plane Geometry*, Macmillan, London, 1876, <https://archive.org/details/syllabusplanege00teacgoog/mode/2up>
- [AvDM] JEREMY AVIGAD – EDWARD DEAN – JOHN MUMMA, A Formal System for Euclid's Elements, *The Review of Symbolic Logic* 2 (2009), 700-768
- [BaE] JON BARWISE, JOHN ETCEHEMENDY, Visual Information and valid reasoning, in: Gerard Allwein – Jon Barwise (eds.), *Logical Reasoning with Diagrams*, Oxford University Press, Oxford, 1996, pp. 3-26
- [BeNW] MICHAEL BEESON, JULIEN NARBOUX, FREEK WIEDIJK, Proof-checking Euclid, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 85 (2019), 213-257
- [BetBr] ENRICO BETTI, FRANCESCO BRIOSCHI, *Gli elementi d'Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei*, Firenze, Successori Le Monnier, 1868, [https://it.wikisource.org/wiki/Gli\\_Elementi\\_d%27Euclide](https://it.wikisource.org/wiki/Gli_Elementi_d%27Euclide)
- [Bl] ETHAN D. BLOCH, *The Real Numbers ad Real Analysis*, Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London, 2011
- [Bol] BERNARD BOLZANO, Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign there lies at least one real root of the equation, in: William B. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. 1, Oxford University Press, Oxford, 1996, pp. 225-248
- [Bor] JORGE LUIS BORGES, *Tutte le opere*, Volume primo, Mondadori, Milano, 1984
- [BS] ROBERT E. BRADLEY, C. EDWARD SANDIFER, *Cauchy's Cours d'analyse. An Annotated Translation*, Springer, Dordrecht-Heidelberg-London-New York, 2009
- [Caj] FLORIAN CAJORI, Attempts Made During the Eighteenth and Nineteenth Centuries to Reform the Teaching of Geometry, *American Mathematical Monthly* 17 (1910), pp. 181-201, <https://archive.org/details/jstor-2973645/page/n1/mode/2up>
- [Car] LEWIS CARROLL, What the Tortoise Said to Achilles, *Mind* 4 (14) (1895), 278-280

- [Co] SAMUEL T. COLERIGE, A mathematical problem, *The Mathematical Intelligencer* 7 (1985), pp. 73-74. Si veda anche [https://en.wikisource.org/wiki/A\\_Mathematical\\_Problem](https://en.wikisource.org/wiki/A_Mathematical_Problem)
- [Ded] RICHARD DEDEKIND, *Essays on the Theory of Numbers. I: Continuity and Irrational Numbers. II: The Nature and Meaning of Numbers*, Dover, New York, 1963. Si veda anche: *Scritti sui fondamenti della matematica*, Bibliopolis, Napoli, 1982
- [DeM] AUGUSTUS DE MORGAN, Short Supplementary Remarks on the first Six Books of Euclid's Elements, *The Companion of the Almanach*, Charles Knight, London, 1849, pp. 5-20, [https://archive.org/details/sim\\_british-almanac-companion\\_1849/page/n1/mode/2up](https://archive.org/details/sim_british-almanac-companion_1849/page/n1/mode/2up)
- [DeR] VINCENZO DE RISI, Did Euclid Prove *Elements* I, 1? The Early Modern Debate on Intersection and Continuity, in: Philip Beeley – Yelda Nasifoglu – Benjamin Wardhaugh, *Reading Mathematics in Early Modern Europe*, Routledge, New York, 2020, pp. 12-32
- [Di] CHARLES DICKENS, *Racconti di Natale*, Mondadori, Milano, 1990
- [Do] CHARLES DODGSON, *Euclid and his Modern Rivals*, Macmillan, London, 1885, <https://archive.org/details/euclidandhismod00dodggoog>
- [EA] FEDERIGO ENRIQUES – UGO AMALDI, *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, Zanichelli, Bologna, 1957
- [Eu] EUCLIDE, *Gli Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, Torino, 1988
- [Fa] AURELIANO FAIFOFER, *Elementi di Geometria ad uso degli istituti tecnici (primo biennio) e dei licei*, Tipografia Emiliana, Venezia, 1890
- [Giac1] LIVIA GIACARDI, Gli elementi di Euclide come libro di testo. Il dibattito di metà Ottocento in Italia, in: Elisa Gallo – Livia Giacardi – Clara Silvia Roero, *Conferenze e seminari, 1994-95*, Associazione Subalpina Mathesis, Seminario di Storia delle Matematiche T. Viola, Torino, 1995, pp. 175-188
- [Giac2] LIVIA GIACARDI, From Euclid as Textbook to the Giovanni Gentile Reform (1867-1923): Problems, Methods and Debates in Mathematics Teaching in Italy, *Paedagogica Historica* 42 (2006), pp. 587-613
- [Giaq] MARCUS GIAQUINTO, Crossing Curves: A Limit to the Use of Diagrams in Proofs, *Philosophia Mathematica* 19 (2011), pp. 281-307
- [Gra] JUDITH V. GRADINER, Cauchy and Bolzano: Tradition and Transformation in the History of Mathematics, in: Everett Mendelsohn (ed.), *Transformation and Tradition in the Sciences: Essays in Honour of I. Bernard Cohen*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984, pp. 105-124
- [Gre] MARVIN J. GREENBERG, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry. Development and History*, W. H. Freeman and Company, New York, 1993
- [Ha] ROBIN HARTSHORNE, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 2000
- [He] THOMAS HEATH, *The Thirteen Books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with Introduction and Commentary*, Dover Publications, New York, 1956 [https://archive.org/details/euclid\\_heath\\_2nd\\_ed/1\\_euclid\\_heath\\_2nd\\_ed/](https://archive.org/details/euclid_heath_2nd_ed/1_euclid_heath_2nd_ed/) [https://archive.org/details/euclid\\_heath\\_2nd\\_ed/2\\_euclid\\_heath\\_2nd\\_ed/](https://archive.org/details/euclid_heath_2nd_ed/2_euclid_heath_2nd_ed/) [https://archive.org/details/euclid\\_heath\\_2nd\\_ed/3\\_euclid\\_heath\\_2nd\\_ed/](https://archive.org/details/euclid_heath_2nd_ed/3_euclid_heath_2nd_ed/)
- [HeD] CHRISTIAN HERLIN – Conrad Dasypodius, *Analyseis geometricae sex librorum Euclidis*, Rihel, Strasburgo, 1566.
- [Hi] DAVID HILBERT, *Fondamenti della geometria*, FrancoAngeli, Milano, 2022
- [Hu] EDWARD V. HUNTINGTON, Complete sets of postulates for the theory of real quantities, *Transactions American Mathematical Society* 4 (1903), pp. 358-370
- [It] JEAN ITARD, «L'introduction à la géométrie» de Pascal, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* 15 (1962), *Pascal et les mathématiques*, pp. 269-286, [https://www.persee.fr/doc/rhs\\_0048-7996\\_1962\\_num\\_15\\_3\\_4428](https://www.persee.fr/doc/rhs_0048-7996_1962_num_15_3_4428)
- [Lei] GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ, *Scritti filosofici. Volume II: Nuovi saggi sull'intelletto umano*, a cura di Massimo Mugnai ed Enrico Pasini, UTET, Torino, 2000
- [Leo] LEONARDO DA VINCI, *Trattato della pittura*, Newton-Compton, Roma, 2019
- [Man] KENNETH MANDERS, The Euclidean diagram, in: Paolo Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford, 2008, pp. 80-133
- [Mas] LORENZO MASCHERONI, *La geometria del compasso*, Eredi di Pietro Galeazzi, Pavia, 1979, <https://matematicaitaliana.sns.it/media/volumi/5/La%20geometria%20del%20compasso.pdf>
- [MC] BRIAN MCCARTIN, *Mysteries of the Equilateral Triangle*, Hikary Ltd, Rousse Bulgaria, 2010
- [Mi] NATHANIEL MILLER, *Euclid and His Twentieth Century Rivals: Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry*, Center for the Study of Language and Communication, Stanford, 2007
- [Pad] ALESSANDRO PADOA, *Che cos'è la matematica, Estratto dai n. 9-10-11-12 (Anno 1912) dell'anno XI del Bollettino di Matematica*, Cuppini, Bologna, 1912, <https://archive.org/details/PadoaCheCosELaMatematica>
- [Pal] B. PASCAL, *Lo spirito della geometria e altri scritti sul "metodo"*, Morcelliana, Brescia, 2017
- [Pas] MORITZ PASCH, *Vorlesungen über Neuere Geometrie*, Kessinger Publishing, Whitefish Montana, 2010
- [Pr] PROCLO, *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, a cura di Maria Timpanaro Cardini, Giardini, Pisa, 1978
- [Ri] RINALDO MARCUCCI RICCIARELLI, *L'Euclide deve essere bandito dalle scuole classiche*, Boncompagni, Perugia, 1871, [https://archive.org/details/bub\\_gb\\_Pg-bAdCfSQcC/page/n31/mode/2up](https://archive.org/details/bub_gb_Pg-bAdCfSQcC/page/n31/mode/2up)
- [Ru] BERTRAND RUSSELL, The teaching of Euclid, *The Mathematical Gazette* 2 (33) (1902), 165-167, [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Russell\\_Euclid/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Russell_Euclid/)
- [RuPS] LUCIO RUSSO – GIUSEPPINA PIRRO – EMANUELA SALSICCIA, *Euclide: il I libro degli Elementi. Una nuova lettura*, Carocci, Roma, 2017
- [SaN] GIAMPAOLO SANCHINI – MARIA CLARA NUCCI, "L'Euclide deve essere bandito dalle scuole classiche". Lettere Perugine (1871-1873), *Atti XII Convegno Società Italiana di Storia delle Matematiche*, Brescia, 2012, pp. 58-59
- [Se] FRANCESCO SEVERI, Ipotesi e realtà nelle scienze geometriche, *Scientia* 8 (1910), pp. 3-32. Estratto pubblicato da Zanichelli, Bologna, 1910. Si veda anche il sito [https://it.wikisource.org/wiki/Scientia\\_-\\_Vol.\\_VIII/Ipotesi\\_e\\_realt%C3%A0\\_nelle\\_scienze\\_geometriche#Euclide](https://it.wikisource.org/wiki/Scientia_-_Vol._VIII/Ipotesi_e_realt%C3%A0_nelle_scienze_geometriche#Euclide)
- [We] HERMANN WEYL, *The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis*, Dover Publications, New York, 1994. Edizione italiana: *Il continuo. Indagini critiche sui fondamenti dell'analisi*, Bibliopolis, Napoli, 2007
- [Wi1] JAMES M. WILSON, Euclid as a Textbook of Elementary Geometry, *Educational Times* 21 (1868), pp. 125-128. Traduzione in italiano di Raffaele Rubini: Euclide come testo di geometria elementare, *Giornale di Matematiche* 6 (1868), pp. 361-368
- [Wi2] JAMES M. WILSON, *Elementary Geometry*, Macmillan, London 1869, <https://archive.org/details/elementarygeome01wilsgoog/mode/2up>
- [Ze] PAOLO ZELLINI, *Discreto e continuo. Storia di un errore*, Adelphi, Milano, 2022



Antonio Fontana

**Antonio Fontana** è docente di Matematica e Fisica presso il Liceo A. Genovesi di Napoli. Nel 2023 ha conseguito il dottorato di ricerca in *Computer Science and Mathematics* presso l'Università di Camerino. È autore di numerose pubblicazioni su riviste del settore riguardanti la didattica e la comunicazione della matematica.



Carlo Toffalori

**Carlo Toffalori** è stato professore di Logica Matematica presso l'Università di Camerino. Dal 2005 al 2017 è stato presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni. Dal 2012 al 2021 ha fatto parte della Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana. Le sue ricerche riguardano principalmente teoria dei modelli e algebra, ma i suoi interessi si allargano a divulgazione e comunicazione della matematica. In questo campo ha pubblicato vari libri. Cura da qualche anno la rubrica di matematica e letteratura del mensile *Prisma*.