
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MICHELA MASCHIETTO

Ma come hanno fatto [i matematici] a pensare a queste cose? Mostre e laboratori con le macchine matematiche

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 9
(2024), n.2-3, p. 253–271.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_2-3_253_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_2-3_253_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Ma come hanno fatto [i matematici] a pensare a queste cose?

Mostre e laboratori con le macchine matematiche

MICHELA MASCHIETTO

Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia

E-mail: michela.maschietto@unimore.it

Sommario: In questo articolo si presentano la Collezione Macchine Matematiche, composta da strumenti per la geometria, e le relative attività svolte presso l'Università di Modena e Reggio Emilia. Sono descritte la mostra tuttora allestita e le sessioni di laboratorio di matematica offerte alle classi di scuola secondaria. Queste attività offrono spunti di discussione sull'apprendimento della matematica in contesti diversi.

Abstract: This article presents the Collection of Mathematical Machines, consisting of instruments for geometry, and the related activities carried out at the University of Modena e Reggio Emilia. The ongoing exhibition and the mathematics laboratory sessions offered to secondary school classes are described. These activities provide opportunities for discussing the learning of mathematics in different contexts.

1. – Introduzione

Nel 2008 fu pubblicato il volume “*Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom*” (Barbeau & Taylor, 2009) relativo al sedicesimo studio ICMI⁽¹⁾, volto a raccogliere le iniziative, e i corrispondenti studi e ricerche, che si potevano caratterizzare come sfide per studenti e insegnanti. Il termine ‘sfida’ è stato inteso in senso ampio, con riferimento non solo ad attività proposte nel contesto scolastico ma anche ad attività extrascolastiche, dalle gare di matematica ai musei scientifici.

Il Capitolo 2 (Kenderov et al., 2009) presenta una cospicua rassegna di attività sfidanti che hanno luogo al di fuori della scuola. Tra queste, sono presenti le mostre di matematica allestite in contesti diversi che sono classificate in tre tipologie:

- 1) mostre per illustrare idee o processi matematici; sono indirizzate al grande pubblico e progettate principalmente da matematici;
- 2) mostre per illustrare metodologie per l'insegnamento; si rivolgono al grande pubblico, anche se si indirizzano principalmente a insegnanti ed educatori;
- 3) mostre per illustrare il prodotto dell'innovazione didattica; sono mirate al grande pubblico e in particolar modo a genitori.

Sono poi individuate due possibili scelte nell'allestimento di una mostra: concentrarsi su un tema preciso oppure esplorare molte idee matematiche. Viene infine evidenziato l'interesse crescente in queste iniziative, che toccano la sfera più ampia della diffusione della cultura matematica, e in generale scientifica.

Il Capitolo 5 (Bartolini Bussi et al., 2009) si concentra maggiormente sugli studenti e sulle opportunità in cui questi sono coinvolti in attività al di fuori dell'ambiente scolastico, incoraggiati a collaborare e a essere creativi nell'affrontare la risoluzione di

Accettato: 9 maggio 2024.

⁽¹⁾ ICMI è l'acronimo di *International Commission on Mathematical Instruction*.

problemi. I nove casi discussi nel capitolo aprono a questioni sulla valutazione di tali attività, in termini di apprendimento della matematica e di accesso a una maggiore comprensione dei concetti matematici in gioco, e sui riferimenti teorici (provenienti principalmente dalla ricerca in didattica della matematica) rispetto ai quali progettare e analizzare tali attività.

Da questo studio ICMI, l'interesse per le attività che superano i confini della scuola è notevolmente accresciuto, e ha catturato sempre più l'interesse dei ricercatori per le forme di apprendimento extra-scolastico e per le interazioni tra istituzioni scolastiche e non scolastiche. L'assunto condiviso è che l'apprendimento avviene in diversi contesti, in modalità e forme diverse. Nella letteratura educativa, viene discussa la distinzione tra educazione formale, non-formale e apprendimento informale (Rogers, 2004). La riflessione verte principalmente sulla caratterizzazione dell'educazione (o apprendimento) non-formale. Infatti, mentre vi è consenso sulle definizioni di educazione formale (relativa a modelli di educazione organizzati e istituzionalizzati) e di apprendimento informale (esso descrive l'apprendimento quotidiano che le persone sperimentano ogni giorno nella loro vita; non è strutturato ed è senza scopo dichiarato), la definizione del termine non-formale risulta meno nitida e chiara. Si fa riferimento a un continuum tra i due estremi ben definiti, formale e informale: il non-formale starebbe nel 'centro' con contorni sfumati rispetto ai precedenti. Nella loro rassegna sulle ricerche su questi temi, Johnson & Majewska (2022) hanno messo in evidenza come la letteratura esistente riguardi maggiormente l'educazione formale e l'apprendimento informale, mentre poco è pubblicato su metodologie per identificare l'educazione/apprendimento non-formale.

Questo articolo presenta le attività svolte con particolari artefatti, chiamati 'macchine matematiche'. Per chiarire cosa si intende per 'macchina matematica', riportiamo la definizione data da Marcello Pergola, progettista e costruttore della cospicua collezione di macchine matematiche:

“una macchina matematica (in un contesto geometrico) ha come scopo fondamentale (indipendentemente dall'uso che poi si farà della macchina) risolvere questo problema: obbligare un punto, o un segmento, o una figura qualsiasi (sostenuti da un

opportuno supporto materiale che li renda visibili) a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni seguendo con esattezza una legge astrattamente, matematicamente determinata,, (citazione in Bartolini Bussi & Maschietto, 2006, p. XI).

Le macchine matematiche sono presenti nello studio ICMI sopra menzionato. Rispetto a quanto contenuto nel Capitolo 2, le mostre di macchine matematiche sono portate come esempio della seconda tipologia di mostra e del primo tipo di scelta, cioè mostre su un tema preciso. Nel Capitolo 5, uno dei nove casi studio è proprio il laboratorio di matematica con le macchine matematiche.

In questo contributo saranno approfondite sia l'attività espositiva che quella laboratoriale, evidenziando il carattere sfidante di queste attività ma anche i punti critici della loro gestione e condividendo riflessioni per sviluppi futuri.

L'articolo è suddiviso in cinque sezioni. Dopo aver presentato la collocazione istituzionale della collezione di macchine matematiche e la sua origine, si entra nel dettaglio della collezione stessa, per poi passare alle attività con le classi e infine con le scuole.

2. – Lo stato attuale

La collezione *Macchine Matematiche* fa ora parte del patrimonio del Sistema dei Musei e Orto Botanico dell'Università di Modena e Reggio Emilia (UniMORE).

Le macchine matematiche sono conservate in due luoghi dell'Ateneo nella sede di Modena, presso la sala espositiva in centro città (via Camatta) e presso il Dipartimento di Fisica, Informatica e Matematica (FIM). Solo la prima sede è accessibile per le visite e i laboratori per le classi, configurandosi come museo per la matematica. In passato, tutte le attività con le classi si svolgevano al Dipartimento FIM, mentre una parte della collezione era conservata in un'altra sede universitaria.

La collezione *Macchine Matematiche* non è fruibile nei termini di museo a cui comunemente si pensa, cioè un luogo con aperture continuative al pubblico e alle scuole, ma in termini che saranno precisati nelle sezioni successive. Inoltre, a differenza di quanto accade solitamente nei musei, le attività sono sempre state condotte da ricercatori in didatti-

ca della matematica e da insegnanti dell'associazione Macchine Matematiche ETS⁽²⁾.

Le attività con le macchine matematiche sono gestite dal Laboratorio delle macchine matematiche (www.mmlab.unimore.it). L'apertura alle classi avvenne nel 2003 presso il Dipartimento di Matematica di UniMORE, a seguito della partecipazione al progetto europeo “*Maths Alive: Mathematics in everyday life*”; le prime macchine matematiche nacquero ben prima, nei locali del liceo scientifico “A. Tassoni” di Modena. L'iniziale ma sempre mantenuto interesse didattico si sposa con quello della diffusione della cultura matematica, oltre anche quindi i confini della scuola.

Il Laboratorio delle macchine matematiche, centro di ricerca del Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, si occupa della ricerca sull'uso delle macchine nell'insegnamento e apprendimento della matematica, dentro e fuori la scuola. L'autrice di questo articolo è la direttrice del Laboratorio e membro del Comitato Scientifico del Sistema dei Musei e Orto Botanico, oltre che essere la responsabile di tutte le attività con le macchine matematiche descritte qui di seguito.

3. – L'origine della collezione

Le macchine matematiche iniziarono a essere costruite da insegnanti del liceo scientifico “A. Tassoni” di Modena. Erano insegnanti (oltre a Marcello Pergola, ricordiamo Annalisa Martinez, Marco Turrini e Carla Zanolì⁽³⁾) che, non soddisfatti dei risultati ottenuti con i metodi didattici seguiti, iniziarono a progettare come cambiare la loro didattica, ispirandosi all'idea di laboratorio di matematica e al lavoro di Emma Castelnuovo. Così scrivono:

“Ci si era resi conto che non veniva dedicata sufficiente attenzione all'evoluzione storica dei concetti e delle teorie, correndo il rischio di trasmettere agli studenti un'immagine inadeguata della matematica, che poteva apparire come insieme di verità indipendenti dal tempo, dai mutamenti

economico-sociali. Inoltre, era molto basso il livello di partecipazione degli studenti alla scoperta e alla discussione delle proprietà e regole che poi dovevano utilizzare, anche perché mancava (o aveva ruolo marginale) la manipolazione di strumenti e l'impiego di materiali audiovisivi, con cui invece era possibile favorire l'apprendimento di alcuni concetti fondamentali, sottolineare l'importanza che il movimento e la trasformazione degli oggetti hanno in matematica: mostrare cioè lo sfondo operativo delle astrazioni.” (Pergola & Zanolì, 2010, p. 37).

Con la partecipazione al Nucleo di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia, si è alimentato l'interesse e lo studio degli strumenti per la matematica ed è stata avviata la costruzione delle macchine (Pergola et al., 2001, 2002). Nel corso degli anni, sono stati costruiti più di 200 strumenti. Per consentire il lavoro nelle classi, sono stati progettati e costruiti kit di conicografi e pantografi (Zanolì & Martignone, 2010). Sono queste le macchine usate nelle attività di laboratorio con le classi, attività che saranno presentate nelle sezioni successive.

4. – La collezione

Come è stato appena scritto, tutte le macchine sono ricostruzioni moderne, a partire da testi storici e per esigenze didattiche. Questa collezione si differenzia dalle collezioni storiche che sono conservate nei musei, soprattutto universitari, in Italia e nel mondo, per tre ragioni. La prima è che questa non è una collezione storica. La seconda ragione è che, in generale, gli strumenti delle collezioni museali riguardano principalmente la fisica, l'ottica e l'astronomia. Ad esempio, nel recente Symposium⁽⁴⁾ della *Scientific Instrument Commission* (svoltosi a Palermo nel 2023) gli strumenti oggetto di riflessioni educative non comprendevano strumenti storici per la matematica; i contributi sulla matematica (molto pochi rispetto al programma del Symposium) riguardavano strumenti ricostruiti con finalità didattiche (tra cui le macchine matematiche di UniMORE). La terza ragione è che gli strumenti matematici conservati nei

⁽²⁾ <https://www.machinematematiche.org/> (ultimo accesso aprile 2024).

⁽³⁾ Questi insegnanti sono i soci fondatori dell'associazione Macchine Matematiche ETS.

⁽⁴⁾ <https://scientific-instrument-commission.org/event/xlii-scientific-instrument-symposium/> (ultimo accesso aprile 2024).

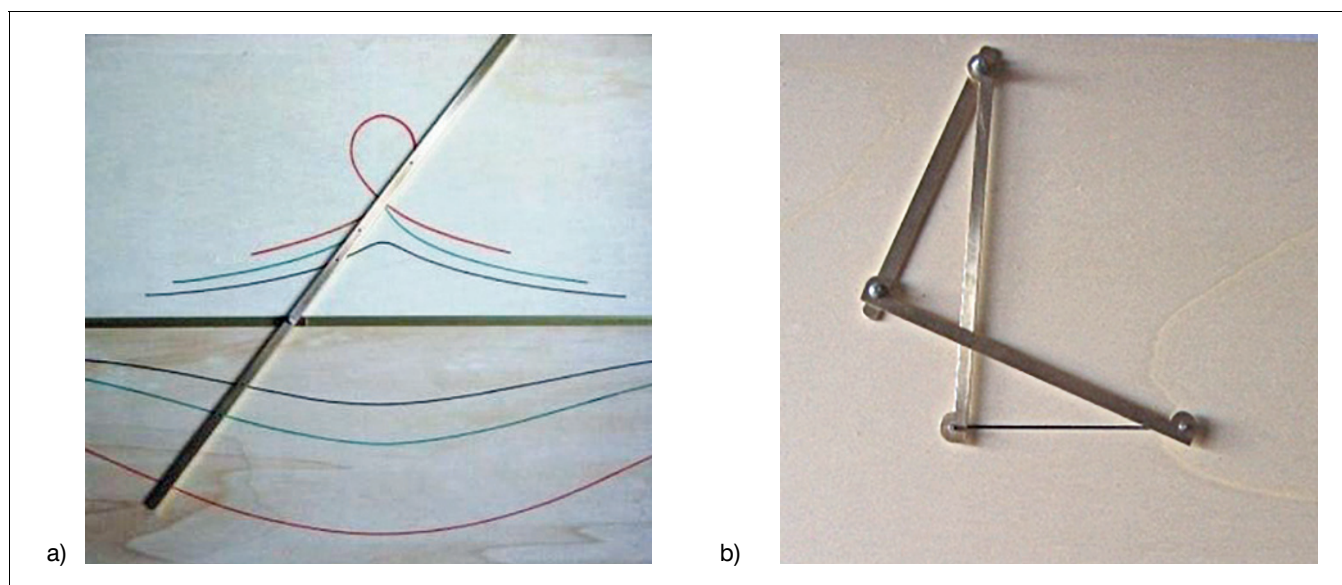


FIGURA 1 – a) concoide di Nicomede, b) ellissografo ad antiparallelogramma.

musei sono soprattutto strumenti da calcolo o di misura, mentre le macchine matematiche riguardano principalmente la geometria. Tra di essi, si pensi alla macchina calcolatrice costruita da Pascal (una ricostruzione è esposta al Museo Henri-Lecoq di Clermont Ferrand, che conserva però due versioni originali) e alle mostre di calcolatori (ad esempio, la mostra “Multipliez!”⁽⁵⁾), oppure ai planimetri.

Come anticipato, la collezione si differenzia anche dai musei per la matematica che sono presenti in vari Paesi (in Italia, si pensi al Giardino di Archimede⁽⁶⁾), in quanto tutte le nostre attività svolte vertono principalmente attorno alle macchine matematiche e non sono in generale proposti laboratori e mostre che non le coinvolgono.

La collezione comprende numerose macchine matematiche di natura diversa che evocano contenuti geometrici. La collezione non è interamente esposta; solo una parte è visibile in relazione alle attività che saranno descritte nella sezione successiva.

Qui di seguito presentiamo le varie tipologie di macchine della collezione.

4.1 – *Curvigrafi*

Alla collezione appartengono tracciatori di curve (curvigrafi) sia per le sezioni coniche (conicografi) che per altre curve piane.

La struttura dei curvigrafi si riconduce a due tipologie: uso di sistemi articolati o di biellismi e uso di fili. Nella prima tipologia (Fig. 1), la punta scrivente (tracciatore) è pilotata da un meccanismo (sistema articolato, biellismo, ecc.) che incorpora una proprietà caratteristica della curva da tracciare. Questa proprietà emerge come invariante rispetto ai movimenti (o deformazioni) del meccanismo durante il tracciamento della curva. Si pensi ad esempio al compasso. Nella seconda tipologia, la punta scrivente è guidata da un sistema di fili tenuti tesi dalla punta stessa i quali scorrono attorno a perni mobili o fissi, in alcuni casi con il sostegno di aste. In questa tipologia rientrano l'ellissografo del giardiniere, il parabolografo a filo teso (Fig. 2a) e l'iperbolografo a filo teso (Dondi & Maschietto, 2022). Vi è poi una terza struttura di curvigrafo che però non rientra tra le macchine matematiche: quella in cui si segue il profilo di un oggetto che già incorpora la curva da tracciare.

Tra tutti i curvigrafi, i vari tracciatori di coniche appaiono interessanti perché mostrano come una stessa curva possa essere ottenuta con strumenti diversi che incorporano proprietà/definizioni diverse. Consideriamo, come esempio, due macchine per

⁽⁵⁾ https://www.univ-brest.fr/digitalAssets/69/69737_affiche-marc.pdf (ultimo accesso aprile 2024).

⁽⁶⁾ <http://web.math.unifi.it/archimede/> (ultimo accesso aprile 2024).

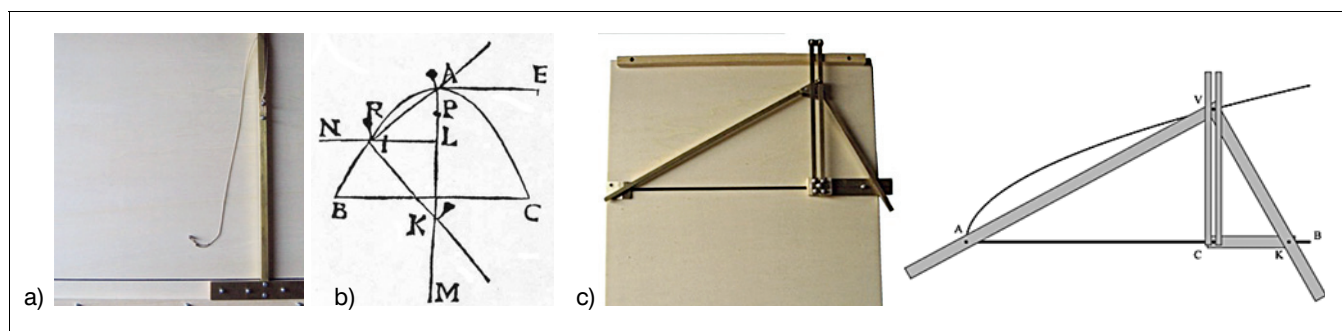


FIGURA 2 – a) parabolografo a filo teso, b) disegno dallo *Specchio Ustorio*, c) parabolografo di Cavalieri.

tracciare la parabola: il parabolografo di Cavalieri (1598-1647) e il parabolografo a filo teso.

Il parabolografo di Cavalieri (Fig. 2b) è descritto nel Capitolo XLVI “*Come si descriva la Parabola mediante gl’istrumenti sodi, composti di regoli, ch’è il secondo modo dell’invenzione piana vera*” dello *Specchio Ustorio* (Cavalieri, 1632). Questa macchina incorpora, come propria legge, il ‘sintomo’ della parabola (“orthotome”, Fig. 4b) secondo Menecmo⁽⁷⁾. Il sintomo corrisponde a una proporzione che lega i singoli punti della curva al cono da cui è ottenuta come sezione. Nella macchina di Cavalieri, il sintomo di Menecmo diventa operativo e permette di tracciare la conica per moto continuo. Essa è formata da due coppie di due aste unite perpendicolarmente (chiamate squadre; nel disegno della Fig. 2c a destra, gli angoli retti sono $\widehat{AVK}$ e $\widehat{VCK}$) e tra loro così collegate: il lato CK di lunghezza fissata k scorre nella scanalatura AB; l’asta AV passa per il punto fisso A nel piano di legno mentre l’altro lato della squadra AVK passa per il punto K; il punto V è vincolato a scorrere nell’asta perpendicolare a CK. Facendo scorrere CK, la mina posizionata in V traccia un arco di parabola di vertice A (Fig. 2c, destra). Per il teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo AVK, si ottiene $VC^2 = AC \cdot CK$, cioè $VC^2 = AC \cdot k$, corrispondente al sintomo della parabola; ponendo $AC = x$, $CV = y$, si ottiene l’equazione della curva $y^2 = kx$. In questa macchina, ogni legame della curva con il cono di cui è sezione è eliminato: il parametro (o lato retto) della parabola è fissato dalla distanza CK, cioè da due punti della struttura della macchina, e non più dalla

distanza del piano secante dal vertice del cono⁽⁷⁾.

Passiamo ora al parabolografo a filo teso, che ha una storia interessante. I conicografi a filo teso descritti da Descartes (1596-1650) nella *Dioptrique* (parte del *Discours de la méthode*, Descartes, 1637) sono quello per tracciare l’ellisse (richiamando il lavoro dei giardinieri) e quello per l’iperbole; non vi è alcun accenno al tracciatore per la parabola. Infatti, le proprietà dei fuochi (chiamati “punti di applicazione”), incorporate in questi tracciatori, sono enunciate da Apollonio di Perga (262 circa-190 a.C. circa) nel trattato sulle sezioni coniche solo per l’ellisse e l’iperbole. Fu Kepler (1571-1603) a proporre il tracciatore per la parabola. Nel Capitolo 4 del suo trattato *Ad Vitellionem paralipomena* (1604), dopo aver preso in considerazione i tracciatori a filo teso per ellisse e iperbole, scriveva⁽⁸⁾

“Queste operazioni sono del tutto elementari, non richiedono quegli ingegnosi strumenti per la cui costruzione qualcuno si attira l’ammirazione degli uomini: perciò a lungo mi son dispiaciuto perché non riuscivo a descrivere allo stesso modo anche la Parabola. Alla fine l’analogia mi ha rivelato che tracciare questa curva non è molto più difficile (e la teoria geometrica lo conferma)” (p. 96),

descrivendo poi il tracciatore per la parabola. Riferendosi proprio al lavoro di Kepler, Cavalieri descrive questo tipo di parabolografo nel Capitolo XLV dello *Specchio Ustorio*. La nostra macchina (Fig. 2a) è costituita da: un piano di legno a cui è fissata una guida che rappresenta la direzione della direttrice e un perno che rappresenta il fuoco; due aste collegate in modo da formare un angolo retto, dall’estremità di

⁽⁷⁾ <https://www.macchinematematiche.org/images/fonti-storiche/fascicolo01/fascicolo1.pdf> (ultimo accesso aprile 2024).

⁽⁸⁾ <https://www.macchinematematiche.org/images/fonti-storiche/fascicolo09/fascicolo9.pdf> (ultimo accesso aprile 2024).

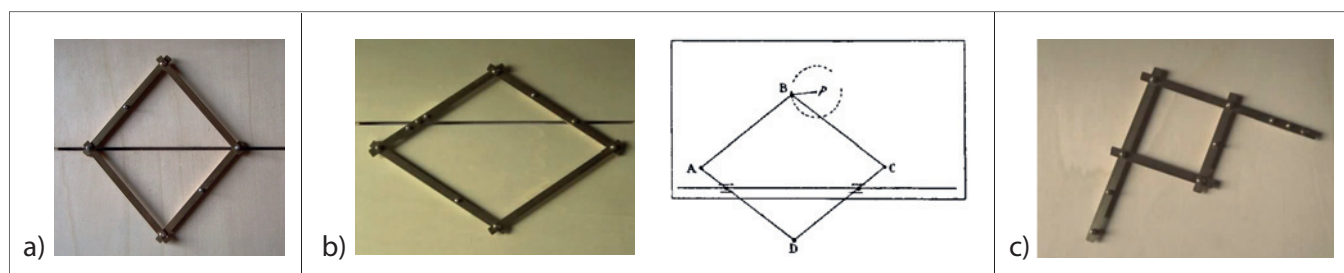


FIGURA 3 – a) biellismo per la simmetria assiale, b) biellismo per lo stiramento e disegno di Delaunay, c) pantografo di Scheiner.

un'asta esce un filo che si collega al perno. Mantenendo il filo sempre teso e accostato a tale asta con una matita e facendo scorrere l'altra asta sulla guida, si traccia un arco di parabola. Questo tracciatore venne successivamente richiamato da de l'Hôpital (1661-1704) nella definizione di parabola enunciata all'inizio del Libro I del suo *Traité analytique des sections coniques* (pubblicato postumo, de l'Hôpital, 1707).

4.2 – Pantografi e biellismi per le trasformazioni geometriche

Le macchine matematiche per le trasformazioni geometriche piane (Fig. 3) usano sistemi articolati o biellismi per stabilire una corrispondenza locale tra i punti di due regioni piane limitate e incorporano le medesime proprietà che caratterizzano la trasformazione. I sistemi articolati sono principalmente costituiti da quadrilateri, molto spesso da rombi. Ogni macchina presenta due fori (puntatore e tracciatore) che rappresentano i punti che si corrispondono nella trasformazione, nei quali possono essere inserite mine scriventi: è così possibile disegnare figure corrispondenti deformando il sistema articolato. I biellismi di Fig. 3a e Fig. 3b presentano un rombo articolato vincolato in modo diverso rispetto alla scanalatura del piano di legno: nella pri-

ma due vertici opposti del rombo sono vincolati a scorrere nella scanalatura e gli altri due fungono da puntatore e tracciatore; nella seconda i punti vincolati a scorrere nella scanalatura sono scelti su due aste consecutive alla stessa distanza dal puntatore. Questo piccolo cambiamento strutturale determina la realizzazione di due trasformazioni diverse: la simmetria assiale nel primo caso e una particolare affinità chiamata stiramento nel secondo caso. Il biellismo per lo stiramento è descritto da Delaunay (1895) come “projecteur” per ottenere l'ellisse a partire dalla circonferenza (Fig. 3b, destra).

4.3 – Modelli tridimensionali

Accanto alle macchine finora descritte che lavorano sul piano, sono stati costruiti strumenti che mostrano le relazioni tra piani nello spazio tridimensionale in riferimento ad alcune trasformazioni geometriche (ad esempio, la genesi spaziale dell'omotetia, Fig. 9b). Nel versante delle curve, invece, due macchine incorporano l'idea di sezione conica come sezione di un cono, generando per moto continuo un cono nello spazio e materializzando il piano secante: si tratta del compasso perfetto e della macchina per le lenti iperboliche (Fig. 4a) descritta da Descartes nella *Dioptrique*.

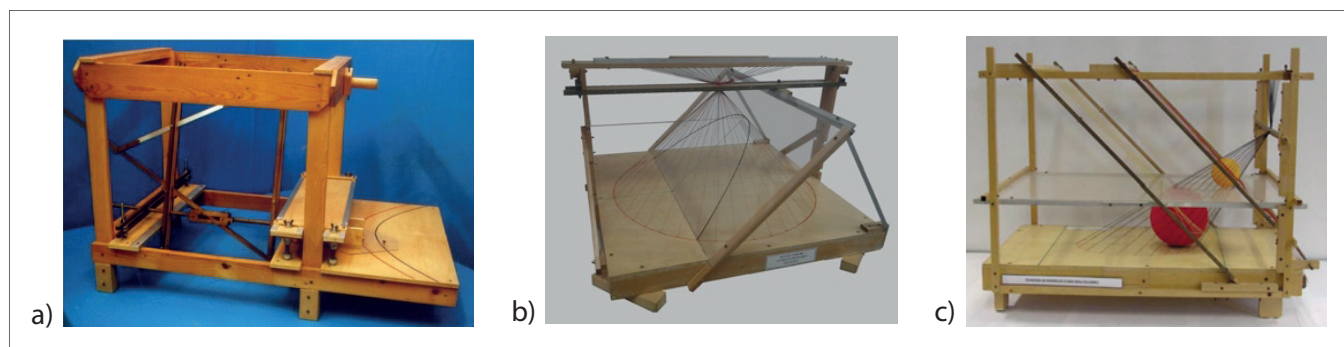


FIGURA 4 – a) macchina per le lenti iperboliche, b) modello di orthotome, c) teorema di Dandelin.

Oltre alle macchine matematiche dinamiche, la collezione contiene modelli statici realizzati con l'obiettivo di fornire una rappresentazione tangibile di alcuni concetti matematici. Vi sono modelli per le sezioni coniche (i coni delle teorie di Menecmo e Apollonio sono resi con fili tesi e i piani secanti con piani di plexiglass, Fig. 4b), modelli di proiezioni di coniche e altre curve, modelli di teoremi come quello di Dandelin (Fig. 4c) che mostra il legame tra la teoria delle sezioni coniche come curve solide ottenute dalla sezione di un cono e quella basata sulle loro definizioni metriche.

4.4 – Prospettografi, ombre e prospettiva

Una cospicua parte della collezione riguarda gli strumenti per la prospettiva. Questa parte ha avuto un notevole sviluppo nell'ambito della partecipazione al progetto europeo “*Maths Alive: Mathematics in everyday life*” che ha coinvolto alcuni musei europei per la matematica. Sono presenti prospettografi, a partire dal vetro di Dürer (Fig. 5), anamorfosi ottiche e catottriche, modelli che mostrano che lo stesso modello matematico può descrivere e controllare sia la formazione delle immagini prospettiche sia quella delle ombre e mettere in evidenza le relazioni tra prospettiva e trasformazioni geometriche (Bartolini e Maschietto, 2006; Maschietto, 2009).

I diversi prospettografi permettono di mostrare da un lato l'evoluzione degli artefatti stessi in

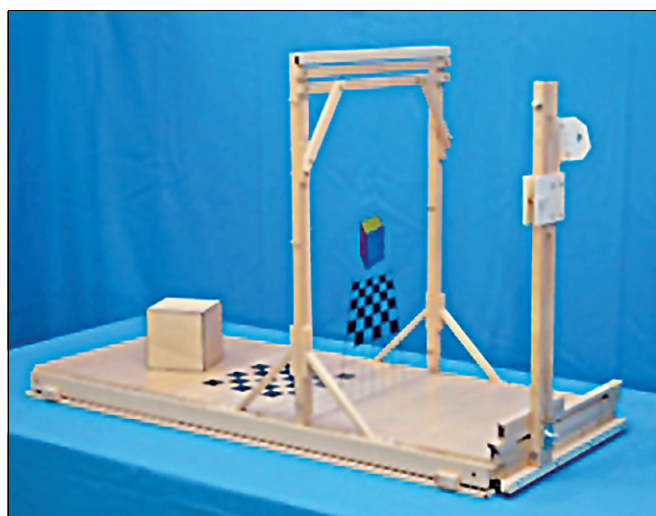
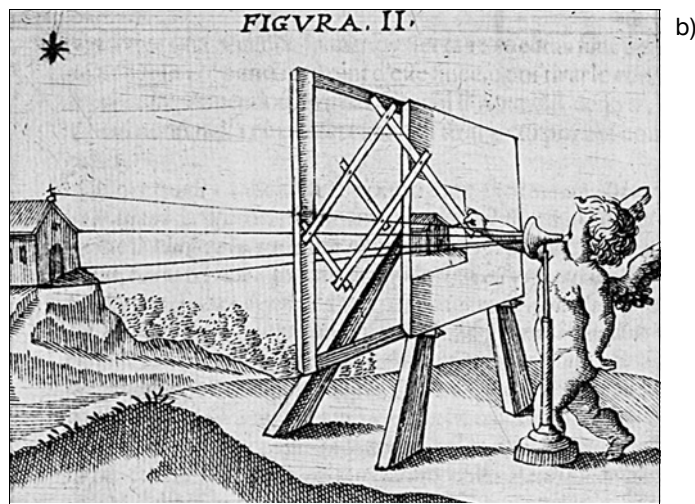
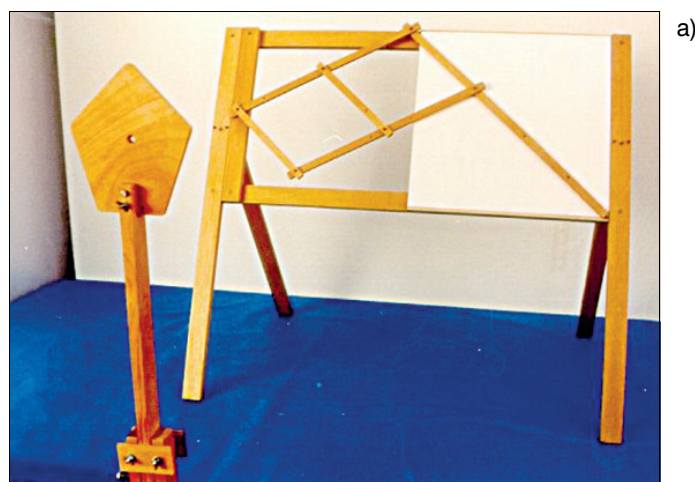


FIGURA 5 – Vetro di Dürer.



b)



a)

FIGURA 6 – a) disegno nel trattato di Scheiner, b) prospettografo.

relazione a esigenze pratiche e teoriche, dall'altro come concetti matematici appaiono nella veste di mezzi per risolvere problemi prima di essere formalizzati. Due esempi chiave sono il prospettografo di Scheiner (Fig. 6) e quello di Barozzi (Fig. 7).

Il prospettografo di Scheiner (1573-1650) è descritto nel trattato *Pantographice seu ars delineandi* (1631, tradotto in italiano da Troili 1653) e rispondeva all'esigenza di disegnare in prospettiva gli oggetti lontani; ha anche altre notevoli applicazioni annunciate già nel titolo (“*PRATTICA DEL PARALLELOGRAMMO Nella quale s'insegna una nuov'Arte di Disegnare qual si voglia cosa veduta sì Piana, come di Rilievo, sì vicina, come lontana, in qualunque data proportione, prestamente, facilmente, infallibilmente, senza guardare la mano, che opera*”, p. 7).

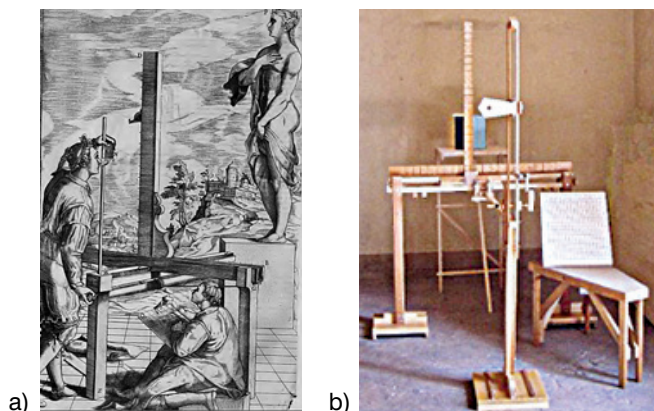


FIGURA 7 – a) disegno nel trattato di Barozzi-Danti, b) prospettografo di Barozzi

Nell'introduzione, Scheiner accenna alla genesi dell'invenzione: dato che nel 1603 un pittore suo amico gli aveva raccontato di aver realizzato uno strumento per disegnare senza tuttavia fornirgli i dettagli, Scheiner decide di costruirsene uno da sé. Il prospettografo è costituito da un piano di legno diviso in due parti: la parte di sinistra (Fig. 6) è una cornice rettangolare; la parte di destra è un piano di legno che sorregge il foglio sul quale viene tracciato il disegno; sul lato sinistro della cornice è montato un pantografo (per l'omotetia, Fig. 3c) sorretto da un perno. Il pittore guarda attraverso l'oculare l'oggetto da disegnare collocato oltre la cornice rettangolare, fa percorrere al puntatore del pantografo (corrispondente a un foro sull'asta del pantografo) il contorno dell'oggetto, e contemporaneamente il tracciatore dello strumento (in cui è posizionata la punta scrivente) esegue una copia ingrandita di ciò che apparirebbe su un foglio posto sulla cornice rettangolare. Così Koenigs (1897) scrive dell'invenzione di Scheiner:

“[...] ogni secolo tiene tra le mani senza averne coscienza le scoperte dei secoli futuri, e la storia delle cose anticipa molto spesso quella delle idee. Quando, nel 1631, P. SCHEINER pubblicò per la prima volta la descrizione del suo pantografo, certamente non conosceva l'idea generale che il suo piccolo strumento conteneva allo stato nascente; si può anzi affermare che non poteva conoscerla, perché questa idea è legata alla nozione astratta di trasformazione delle figure, nozione che appartiene al nostro secolo e fornisce una impronta unitaria a tutti i progressi compiuti”⁽⁹⁾ (p. 243).

⁽⁹⁾ Traduzione a cura dell'autrice.

Il prospettografo di Barozzi (1507-1573) descritto da Danti (1536-1586) nell'Annotazione prima al Capitolo III della Prima regola del trattato *Le due regole della Prospettiva Pratica di M^o Iacomo Barozzi da Vignola* (Barozzi e Danti, 1583) è costituito da due aste graduate (Fig. 7, l'orizzontale è fissa, la verticale è mobile) che individuano il piano del quadro virtuale. Attraverso l'oculare, l'artista mira il punto da disegnare: con un sistema di fili e carrucole sposta l'asta verticale (e il traguardo scorrevole su quest'ultima) fino a sfiorare il raggio visivo; detta poi le coordinate del punto, lette sulle aste graduate, all'assistente, che lo disegna sul quadro reale, dotato di griglia, posto su un supporto (Fig. 7a).

4.5 – Strumenti per la soluzione di problemi

I problemi classici della matematica greca sono problemi di costruzione (Kline, 1996; Courant e Robbins, 2000), in cui è richiesto di trovare una determinata costruzione geometrica utilizzando solo la riga e il compasso, coerentemente con i primi tre postulati degli *Elementi* di Euclide. Tuttavia, vi sono problemi di costruzione non risolvibili con il solo ricorso a riga e compasso, quali la trisezione dell'angolo, la duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio. Come sottolinea Gherzi (1951), per quanto riguarda il problema della trisezione dell'angolo, l'impossibilità teorica di una certa costruzione non ha però impedito la ricerca e la costruzione di strumenti che hanno fornito soluzioni approssimate al problema considerato:

“[...] il problema può risolversi graficamente ricorrendo alle coniche, o ad altre curve, che tutte si possono tracciare con istrumenti speciali in sostituzione del comune compasso da cerchi” (p. 446).

Macchine di questo tipo sono il compasso di Nicomede e i trisettori, come il trisetttore di Descartes (Fig. 8a), di Pascal (Fig. 8b), a doppia squadra e altri ancora (Lugli et al., 2021).

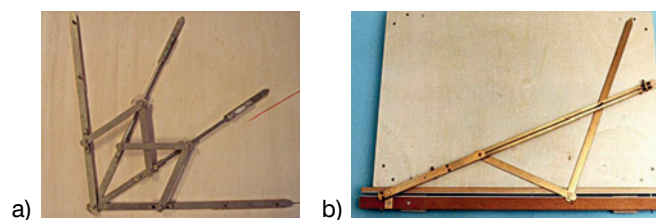


FIGURA 8 – a) trisetttore di Descartes, b) trisetttore di Pascal

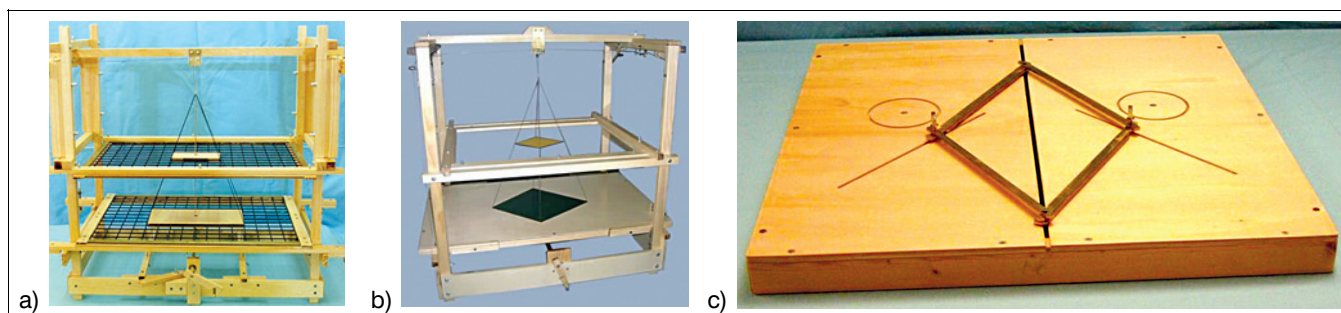


FIGURA 9 – a) genesi spaziale dell'omotetia, b) genesi spaziale dell'omotetia, c) biellismo per la simmetria assiale

4.6 – Macchine per ciechi

Nell'ambito di un progetto di ricerca in collaborazione con l'Istituto Regionale per ciechi "Garibaldi" di Reggio Emilia, finanziato dall'Ufficio Scolastico dell'Emilia-Romagna, sono stati costruite alcune macchine per l'esplorazione tattile. Il progetto aveva l'obiettivo di studiare se le macchine matematiche potessero sostenere la costruzione di conoscenze e competenze geometriche per uno studente con minorazioni visive proprio grazie alla possibilità di manipolarle. È stata così costruita una piccola collezione di macchine relative alla genesi tridimensionale di alcune trasformazioni geometriche piane (traslazione, omotetia Fig. 9a), alla realizzazione di isometrie (Fig. 9c), omotetie e affinità e al tracciamento di coniche mediante sistemi articolati e biellismi (Vangelisti, 2007). Rispetto ai modelli di genesi tridimensionali (Fig. 9b), nelle nuove macchine i piani di plexiglas e di legno sono stati sostituiti con piani quadrettati o rigati che permettono alla mano di esplorare sia la faccia superiore, sia quella inferiore dei piani stessi e dei poligoni su di essi, costruiti in legno (per il confronto, Fig. 9a e 9b); i fili (mantenuti in tensione da pesi) sono stati sostituiti da elastici, che rimangono più tesi e sono meglio percepiti in quanto hanno diametro maggiore dei fili. Per quanto riguarda invece le macchine matematiche per le trasformazioni e i curvigrati, le modifiche riguardano le figure disegnate: sono realizzate con scanalature nel legno che permettono di essere seguite con le dita (Fig. 9c, confronto con Fig. 3a).

4.7 – Teorema di Pitagora

Sul teorema di Pitagora vi sono due modelli, che hanno permesso la realizzazione di un percorso

didattico nella scuola secondaria di primo grado (Maschietto, 2018). Il primo artefatto è costituito da una cornice quadrata e da quattro triangoli rettangoli e si riconduce a una dimostrazione senza parole del teorema stesso (Rufus, 1975). Il secondo artefatto (Fig. 10) è stato realizzato a partire dalla descrizione riportata in (Il Giardino di Archimede, 2001), legata alla dimostrazione attribuita a Leonardo da Vinci.

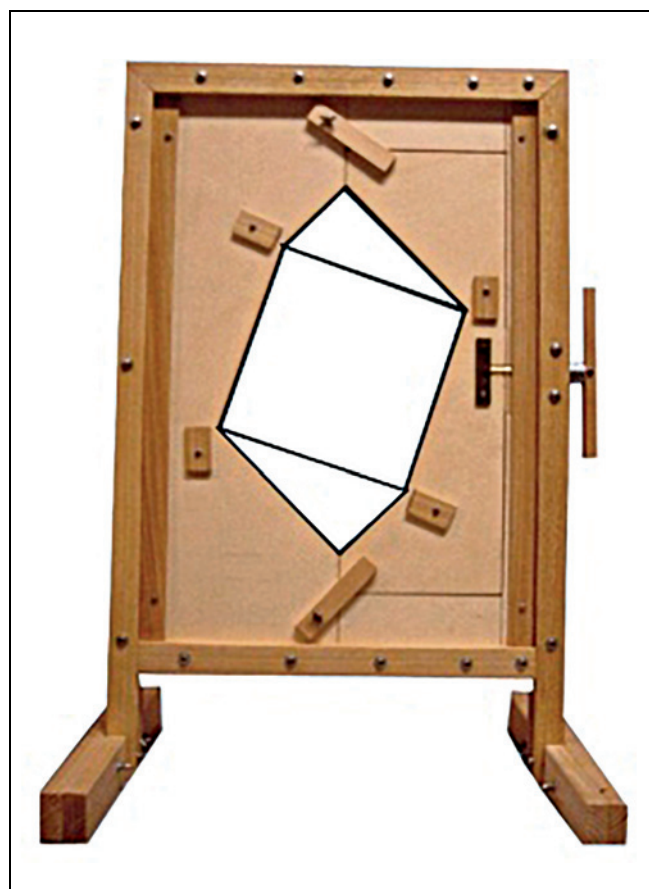


FIGURA 10 – Macchina di Leonardo

5. – Le attività museali

Come è stato già scritto, le macchine matematiche sono state costruite per essere utilizzate in classe nella didattica della matematica e sono state oggetto di numerose ricerche e progetti didattici (Bartolini Bussi e Maschietto, 2006). L'eleganza dei modelli e degli strumenti, nonché la loro numerosità, li ha sin da subito resi adatti ad essere esposti al pubblico, come beni culturali di natura scientifica, per contribuire alla diffusione delle idee e dei metodi della scienza.

In questa sezione si presentano le attività svolte con le macchine matematiche nell'ottica della divulgazione e dell'insegnamento-apprendimento della matematica, limitandoci a quanto svolto e si svolge nel contesto extrascolastico. L'obiettivo è di contribuire alla discussione sull'apprendimento non-formale e sulle relazioni con le altre forme di apprendimento.

Come anticipato, le mostre di macchine matematiche sono un esempio di mostra su un tema specifico che mirano a illustrare lo sviluppo delle idee matematiche con un interesse didattico.

5.1 – Le mostre

Nel corso degli anni sono state allestite varie mostre tematiche sia in Italia che all'estero, sempre in collaborazione con l'associazione Macchine Matematiche ETS.

La prima mostra di macchine matematiche è stata allestita a Modena nel 1992. Rimandiamo al

Capitolo 9 Oltre la scuola in (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006) per un resoconto dell'attività espositiva fino alla pubblicazione del testo. La numerosità e la varietà di macchine matematiche, come emerge dalla sezione precedente, ha permesso di costruire diversi percorsi ("Apparenza e realtà", "Geometria a tu per tu", "Rette e coniche"), esposti in mostre nelle scuole secondarie e non solo. Questi percorsi sono presentati nei cataloghi accessibili nel sito dell'associazione Macchine Matematiche ETS.

Tra le mostre fuori sede, la mostra allestita a Cremona nel 2008 sulla prospettiva ha favorito l'intreccio tra matematica, arte e laboratori didattici e la collaborazione tra diversi attori, quali la scuola, il museo, i ricercatori e i costruttori di macchine. I prospettografi sono stati esposti al Museo Civico e affiancati da quadri del museo stesso; durante il periodo di apertura della mostra, ragazzi del liceo scientifico "Aselli", coordinati dall'insegnante Nicoletta Nolli, hanno condotto laboratori con macchine di loro riproduzione per spiegare alcuni aspetti della prospettiva. La mostra è stata corredata da un catalogo su cd-rom realizzato dagli stessi ragazzi, contenente non solo le schede dei prospettografi, ma anche i video dei laboratori proposti.

Nella sede di via Camatta a Modena sono state allestite due mostre.

La prima mostra metteva in campo la prospettiva. È stata valorizzata in occasione del Festival della Filosofia del 2017, il cui tema erano le arti, come "La bottega della prospettiva". Essa proponeva un percorso di visita sullo sviluppo della prospettiva arti-



a)

FIGURA 11 – La sala espositiva



b)

colato in tre sezioni (Prospettografi, Anamorfosi, Ombre e prospettiva). Vi era anche la possibilità di provare a disegnare con un vetro di Dürer o a realizzare disegni di anamorfosi catottriche per specchio cilindrico.

La seconda “Macchine, meccanica e matematica”⁽¹⁰⁾ è stata proposta in occasione del Festival della Filosofia del 2020 (Fig. 11a), il cui tema erano le macchine. Questo allestimento è attualmente presente e visitabile (Fig. 11b).

Questa mostra intende illustrare lo stretto rapporto, da sempre esistente, tra macchine, meccanica e matematica. Il percorso inizia con la matematica greca che aveva come riferimento gli *Elementi* di Euclide con i suoi strumenti, riga e compasso, e considerava la meccanica separata dalla geometria: le soluzioni di problemi ottenute per via meccanica, come la trisezione dell’angolo, non erano accettate in geometria. Si passa poi al Quattrocento, in cui si fa strada la difesa delle arti meccaniche: la nascita della *perspectiva artificialis* e lo sviluppo dei prospettografi ne sono un esempio. In particolare, sono presenti il vetro di Dürer, i prospettografo di Scheiner e Barozzi descritti in precedenza (§ 4.4). Si riporta l’idea di macchina matematica secondo Cavalieri, intesa come raffigurazione concreta, materializzazione di una particolare proprietà. Il riferimento è al Capitolo XLI dello *Specchio ustorio*: Cavalieri, dopo aver descritto dettagliatamente le proprietà delle coniche, sostiene che “*non ci potranno [le proprietà delle coniche] arrecare le utilità da noi accennate, se non anco non sapessimo descriverle, e farle in materia*” (p. 172) e riferisce poi di due modi per tracciare le coniche riconducibili a due tipi di strumenti, quelli di “*invention solida*” e quelli di “*invention piana*” (“*quando che noi con qualche strumento fondato sopra alcuna loro proprietà, le descriveremo nella superficie piana, che potiamo chiamare invention piana*”, p.173). Il parabolografo descritto in precedenza (§ 4.1, Fig. 2b, 2c) è portato come esempio del secondo tipo di strumenti. Il successivo riferimento a Descartes permette di enfatizzare come, con il suo

contributo, anche le curve tracciate con moto continuo da meccanismi di vario tipo sono accettate nel discorso teorico. Si sottolinea quindi come le macchine possono essere intese come strumento concettuale per classificare le curve. Tramite alcune guide rettilinee, è posto il problema del tracciamento della retta (Kempe, 1877). Il percorso di visita termina evocando la teoria dei sistemi articolati attraverso alcuni pantografi per le trasformazioni geometriche, le macchine di Delaunay per l’ellisse (Fig. 3b) e per le sezioni del toro.

Durante il Festival della Filosofia del 2020, a questa mostra era affiancato il laboratorio per bambini e genitori “Dai bastoncini di Nepero alla calcolatrice”, che proponeva un breve percorso sugli strumenti per il calcolo: dai primi regoli per calcolare (erano distribuiti i bastoncini di Nepero con i quali svolgere alcune moltiplicazioni) alle calcolatrici meccaniche che iniziarono a diffondersi in Europa verso la seconda metà del Seicento. Per queste ultime, il riferimento principale era la Pascalina di Pascal: ai partecipanti è stata distribuita la versione moderna della Pascalina usata nelle classi, la pascalina Zero+1 (Maschietto e Savioli, 2014). Dopo l’esplorazione e uso della pascalina, si proponevano tramite alcuni pannelli i contributi di Leibniz, di Babbage con un riferimento ai telai Jacquard per terminare con le moderne calcolatrici.

A parte l’apertura per il Festival della Filosofia, la mostra “Macchine, meccanica e matematica” è ora visitabile in occasione delle Notti europee dei musei e delle Notti della ricerca. In tutte queste occasioni, sono organizzate visite guidate aperte a tutti. Solitamente, affianchiamo alla mostra anche attività ludico-matematiche varie per bambini/ragazzi e genitori per coinvolgerli su altri aspetti della matematica e far fare matematica al di fuori della scuola.

Un punto cruciale per l’attività espositiva riguarda la fruibilità della mostra, su cui portiamo alcuni spunti di riflessione. Per tutti gli allestimenti di macchine matematiche, sono sempre stati predisposti un catalogo e pannelli espositivi, sia introduttivi delle sezioni quando presenti sia descrittivi delle singole macchine. E sono sempre state previste e condotte visite guidate. Negli anni passati, con l’allestimento della mostra sulla prospettiva, i visitatori potevano realizzare il loro percorso di visita

⁽¹⁰⁾ Il catalogo è disponibile sul sito <https://www.macchinematematiche.org/macchine-meccanica-e-matematica.html> (ultimo accesso aprile 2024).

anche senza la nostra guida, a partire dalla lettura dei pannelli. Negli ultimi anni è invece cresciuta la richiesta di seguire una visita guidata, nonostante il materiale introduttivo distribuito all'entrata e i pannelli sempre presenti accanto a ogni macchina. Gli aspetti su cui abbiamo iniziato a riflettere riguardano l'accessibilità al contenuto matematico della mostra e, nello specifico, dei singoli modelli, la necessità di una narrazione che coinvolga il visitatore e la preferenza per un medium orale piuttosto che scritto. Ciò ha implicazioni importanti proprio in relazione al tipo di supporto che viene ora offerto per le visite. In riferimento a quanto riportato dallo studio ICMI, ogni visita guidata è una sfida per chi la conduce in quanto occorre decidere in quale registro si comunica con i visitatori, quali macchine presentare e cosa dire affinché il visitatore comprenda o almeno colleghi quanto ascolta a ciò che sa. Questo porta a interrogarsi sul livello di conoscenze iniziali che dovrebbe possedere un visitatore per comprendere gli elementi alla base delle macchine esposte, su come valutare il percorso di visita in modo da evitare il rischio di proporre qualcosa che possa rafforzare una immagine della matematica astratta e poco comprensibile. Strettamente legata a questo punto, è apparsa sempre più forte la necessità di una narrazione che coinvolga il visitatore e che sappia fornire gli elementi per comprendere ciò che si sta presentando. L'eterogeneità del pubblico nelle aperture alla cittadinanza rende ancor più sfidante questa narrazione. Un altro punto di riflessione riguarda, quindi, lo studio di sottopercorsi di visita a seconda della tipologia di pubblico.

Nelle aperture alla mostra contiamo gli ingressi e raccogliamo sempre le impressioni e valutazioni dei visitatori, nella forma di pensieri scritti nel 'quaderno dei visitatori' e di 'smile' da inserire in apposite scatole; abbiamo provato anche con moduli online, ma i riscontri sono stati pochissimi. I commenti scritti sul quaderno sono sempre molto positivi e incoraggianti. Un elemento costante che si ritrova è la richiesta di pianificare una maggiore fruibilità della mostra in termini di aperture della sede. Riportiamo qui di seguito alcuni commenti lasciati sul nostro quaderno:

- da parte di una bambina: *“mi è piaciuto molto è stato un bel viaggio istruttivo”*;

- da parte di uno studente liceale: *“molto interessante, un po' difficile per certi concetti ma sicuramente efficace per l'apprendimento delle coniche”*;
- da parte di altri visitatori:
 - *“tutto molto interessante e spiegato in modo chiaro, professionale ma divulgativo. Grazie. Da promuovere e sostenere queste iniziative”*;
 - *“Bellissimo sarebbe bello che ogni scuola lo utilizzasse”*;
 - *“Se lo avessi visitato prima avrei capito meglio la geometria”*.

5.2 – Attività per le scuole (che si vorrebbe far diventare sempre più attività con le scuole)

Dal 2003, il Laboratorio delle macchine matematiche gestisce sessioni di laboratorio di matematica per le classi di scuola secondaria di secondo grado. L'attività è stata interrotta durante il periodo pandemico, ma è poi ripresa in una nuova veste. Infatti, rispetto a quanto accadeva prima, i laboratori non si svolgono più presso il Dipartimento FIM, ma nell'altra sede. Questo cambiamento ha portato a definire un nuovo formato. Accanto allo svolgimento del laboratorio come accadeva in passato, è offerta la possibilità di visitare la mostra tuttora allestita. La struttura di laboratorio che verrà descritta qui di seguito risulta quindi arricchita da una fase iniziale in cui si raccontano gli strumenti ammessi nella geometria greca e termina con un viaggio storico sui rapporti tra matematica e meccanica grazie alla visita guidata. Questo ha permesso di inserire quanto svolto nel laboratorio in un percorso storico più ampio. Da un altro punto di vista, questa nuova veste trasforma la visita delle classi in una visita a un museo della matematica (o per la matematica).

5.2.1 – Laboratori per la scuola secondaria di secondo grado

I temi dei laboratori riguardano le trasformazioni geometriche e le sezioni coniche. L'attività con le macchine matematiche può essere svolta come approfondimento del tema già trattato in classe, ma anche come introduzione ai concetti matematici presenti nei percorsi proposti. Infatti, ciò che si chiede nelle attività di gruppo non è solo scoprire o 'indovinare' quale curva viene tracciata o quale trasformazione è realizzata, ma soprattutto giustificare

perché una particolare macchina matematica permette di tracciare una particolare curva o di realizzare una particolare trasformazione geometrica. È questa la componente più importante, dal nostro punto di vista: favorire tramite la manipolazione e l'esplorazione di strumenti fisici la produzione di congetture e di argomentazioni. Ovviamente, il livello di approfondimento dipende dalla classe e non si esaurisce nella sessione stessa.

I laboratori sono solitamente prenotati all'inizio dell'anno scolastico sulla base del calendario pubblicato sul sito del Laboratorio. In tutti gli anni di attività abbiamo accolto classi in visita che provengono principalmente da scuole di città situate al di fuori della regione Emilia-Romagna, mentre molto poche sono state le classi di scuole della provincia di Modena. Su questo aspetto, relativo al legame con il territorio, siamo particolarmente sensibili e lo riprenderemo nei commenti conclusivi.

Per il percorso sulle sezioni coniche è accresciuto il numero di richieste da quando nelle Indicazioni Nazionali per i licei viene riportato che *“Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria. [...] Studierà alcuni esempi significativi di luogo geometrico”*⁽¹⁾. Ecco alcuni numeri recenti: nell'anno scolastico 2022/23, le classi che hanno seguito tale percorso sono state 10 su 14 che hanno prenotato un laboratorio, mentre nell'anno scolastico 2023/24 vi sono state 13 classi sul tema delle sezioni coniche su 16 totali. Il lavoro sui conicografi permette di realizzare l'indicazione del documento ministeriale nella veste di problema autentico per gli studenti; inoltre, esso rappresenta un tema matematicamente e storicamente rilevante (Bartolini Bussi, 2005). Dal punto di vista dei contenuti matematici affrontati dagli studenti della scuola secondaria, è interessante segnalare che le sezioni coniche risultano essere un ambito di studio caratteristico della scuola italiana. Infatti, in paesi a noi vicini, come Francia e Germania, le sezioni

coniche in quanto tali non sono più oggetto di insegnamento.

Ogni sessione di laboratorio è gestita da una persona esperta, che chiamiamo animatore. Una sessione di laboratorio si compone di tre fasi, che tengono conto di diverse intenzioni ed esigenze.

Prima fase – Introduzione al tema

La prima fase risponde soprattutto all'intenzione di offrire riferimenti storici in modo da situare i concetti nella storia della matematica e vederne lo sviluppo.

Nel percorso sulle sezioni coniche, si introducono alcuni elementi dello sviluppo storico della teoria delle coniche, a partire da Menecmo e Apollonio, con il ricorso a modelli di coni (cfr. § 4.3, Fig. 4b) e da animazioni realizzate con software di geometria dinamica. Si passa poi a considerare strumenti come la macchina per le lenti iperboliche di Descartes (Fig. 4a). Nel percorso sulle trasformazioni, si parte da un discorso generale sulle macchine matematiche prendendo spunto dalla mostra e si passa poi alle trasformazioni con la presentazione di un particolare pantografo, con cui si precisano alcuni termini come puntatore, tracciatore, gradi di libertà, e si fornisce un esempio di esplorazione per il lavoro di gruppo.

In questa introduzione, sono proposti quegli elementi di geometria nello spazio che in un approccio scolastico, diciamo tradizionale, alle coniche e alle trasformazioni sono solo evocati o rappresentati graficamente e, quindi, spesso lasciati nella sfera degli esperimenti mentali degli allievi. Proprio per sostenere la visualizzazione geometrica degli studenti, alla presentazione di una particolare macchina è spesso affiancata la sua animazione realizzata con software di geometria dinamica (ma non solo). Questo permette di mostrare gli elementi generati nello spazio durante il movimento o di mostrare variazioni della macchina.

Seconda fase – Lavoro di gruppo

La seconda fase della sessione corrisponde a un vero lavoro sulle macchine matematiche, in cui gli studenti sono suddivisi in gruppi: un lavoro di manipolazione e di esplorazione per far emergere le proprietà delle curve tracciate o le trasformazioni realizzate dalla macchina.

⁽¹⁾ https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/decreto_indicazioni_nazionali.pdf (ultimo accesso aprile 2024).

Ad ogni gruppo di allievi viene fornita una macchina matematica e una scheda per l'esplorazione della macchina stessa. Le domande della scheda riguardano la struttura della macchina, le relazioni tra le varie componenti e ciò che essa realizza, e, in ultimo, le proprietà invarianti rispetto al movimento/deformazione della stessa. Nel caso dei conicografi (cfr. § 4.1), agli allievi si chiede di enunciare la proprietà della curva descritta dal punto tracciatore, di individuare alcune eventuali altre proprietà della conica e, come domanda facoltativa, di determinarne l'equazione della curva. Sono solitamente distribuiti i tre strumenti a filo e l'ellissografo ad antiparallellogramma (Fig. 1b); il parabolografo di Cavalieri (Fig. 2c) in base alle indicazioni ricevute dall'insegnante.

Nel caso dei pantografi/biellismi (cfr. § 4.2), alcune domande della scheda chiedono di dare una definizione della trasformazione realizzata (localmente) dal sistema articolato, di esplicitare alcune proprietà della trasformazione e di determinare la forma delle regioni piane messe in corrispondenza dalla macchina. Le macchine matematiche su cui si lavora sono quelle per la simmetria assiale (Fig. 3a) e centrale, per l'omotetia (Fig. 3c) e per lo stiramento (Fig. 3b); per alcune classi si aggiunge anche il pantografo per la rotazione.

Le schede che guidano l'esplorazione delle macchine sono cruciali per favorire il coinvolgimento degli studenti e per sostenere il loro lavoro matematico. L'ipotesi iniziale era che le schede dovessero permettere un lavoro il più possibile autonomo per gli allievi; le osservazioni delle sessioni hanno invece messo in evidenza che questa autonomia non è sempre possibile e che è fondamentale la mediazione dell'animatore. La revisione delle schede è svolta per esplicitare maggiormente le richieste e per sostenere la scrittura delle risposte alle domande. Ad esempio, la recente osservazione di sessioni di laboratorio ha evidenziato come molti studenti sembrino non conoscere il significato di espressioni come 'confrontare grandezze' o non avere procedure per farlo oltre a quella di misurare. Nelle schede non si richiede di scrivere dimostrazioni, ma solo la definizione della conica o della trasformazione relativa alla macchina esplorata. Le dimostrazioni richiedono processi complessi, come la ricerca in didattica della matematica sottolinea (Hanna, Jahnke e Pulte, 2010), che non trovano tempo nella

durata di una sessione di laboratorio. Inoltre, dato che metterebbero fortemente in gioco le conoscenze e competenze degli studenti, si correrebbe il rischio di avere risposte corrette troppo guidate e quindi poco significative per gli studenti. Per questo ci si limita a sollecitare argomentazioni in un mix tra linguaggio naturale e linguaggio matematico. Le schede su cui ogni gruppo lavora possono essere ritirate dal docente per un successivo lavoro in classe.

Terza fase – Presentazione del lavoro di gruppo

Dato che di norma una classe viene una sola volta e le macchine assegnate ai vari gruppi sono diverse l'una dall'altra, si rende allora necessaria una fase, la terza, di condivisione del lavoro svolto, nella quale l'animatore accompagna la presentazione delle varie macchine da parte degli studenti e stabilisce un legame tra loro. Questa terza fase corrisponde anche a un'altra esigenza: quella di far conoscere all'insegnante e a tutta la classe il lavoro svolto dai vari gruppi, per un successivo reinvestimento e approfondimento. Si tratta quindi di una fase di istituzionalizzazione importante.

Questa terza fase risulta sempre piuttosto delicata. Anche se gli allievi non sono abituati al lavoro di gruppo, solitamente si mettono in gioco bene nella seconda fase. La richiesta di presentazione di quanto svolto trova invece maggiori resistenze, riconducibili forse in parte a fattori emotivi ma non solo. Malgrado l'invito a seguire la struttura delle domande della scheda, gli studenti tendono a dire subito cosa fa la macchina; inoltre, si riscontra spesso una certa povertà di linguaggio e, in generale, di capacità espositiva. L'animatore svolge qui un ruolo cruciale di guida alla narrazione dell'esplorazione della macchina.

La complessa articolazione tra le tre fasi si basa su una delicata gestione del tempo di ognuna di esse rispetto a quello concesso all'intera sessione, che varia da un'ora e mezza a due ore. Le tre fasi di una sessione di laboratorio mostrano il coinvolgimento di tre soggetti (animatore, insegnanti e allievi) con ruoli diversi. Nella prima fase, l'animatore è la voce della storia e dei matematici tramite gli strumenti, nella seconda fase gestisce il lavoro dei gruppi, nella terza fase è colui che guida la presentazione degli allievi e valida le risposte alle schede. Allo stesso modo, gli allievi assumono ruoli diversi: visitatori,

manipolatori e relatori. L'insegnante può seguire e partecipare al lavoro di gruppo, senza avere tuttavia la gestione del tempo didattico.

5.2.2 – Laboratori per la scuola secondaria di primo grado

Da quando abbiamo iniziato a proporre le sessioni di laboratorio sopra descritte, abbiamo accolto quasi esclusivamente classi della scuola secondaria di secondo grado. A partire dall'anno scolastico 2022/23, negli Itinerari ScuolaCittà del Multicentro Educativo MEMO del Comune di Modena è stato inserito il laboratorio sulle trasformazioni geometriche "Esploriamo le trasformazioni geometriche" (Fig. 12) principalmente rivolto alle scuole secondarie di primo grado del comune di Modena (Battilani & Maschietto, 2023). In precedenza, per questo livello scolastico, le macchine matematiche erano state usate solo in sperimentazioni didattiche a scuola (Bettini, Facchetti & Maschietto, 2012; Concu, 2011, 2013) e in laboratori condotti da insegnanti che le avevano in prestito al Laboratorio. Nell'anno scolastico 2023/24, le classi che hanno svolto questo percorso di visita sono state 7, nel precedente furono 4; tutti i laboratori hanno coinvolto classi seconde.

La proposta del laboratorio per la scuola secondaria di primo grado ha posto una serie di questioni di natura didattica. La prima questione riguardava quali macchine proporre, il che si riconduce a scegliere su quali trasformazioni far lavorare gli stu-

denti. La seconda questione riguardava la struttura e le domande della scheda di esplorazione e, quindi, quale lavoro matematico sollecitare negli studenti. La terza questione riguardava l'adattabilità della struttura del laboratorio così come presentata nella sottosezione precedente a classi di un altro livello scolastico.

Alla prima domanda si è risposto chiedendo direttamente agli insegnanti che prenotano la visita quali trasformazioni vogliono far incontrare ai loro studenti. Nell'anno scolastico 2022/23 abbiamo proposto la simmetria assiale, la simmetria centrale e l'omotetia a quattro classi; invece, per l'anno scolastico 2023/24, abbiamo avuto diverse richieste di far lavorare sulla sola simmetria assiale.

La seconda questione si è rivelata alquanto complessa, trasformandosi in una questione di ricerca. Le schede proposte agli studenti di scuola secondaria di secondo grado sono state modificate, cercando tuttavia di mantenere la stessa tipologia di domande (struttura della macchina, uso della macchina per disegnare, proprietà delle figure corrispondenti), e riviste da una sessione all'altra (Battilani e Maschietto, 2023). I punti cruciali emersi nelle prime sessioni sono stati le conoscenze pregresse degli studenti a cui essi possono riferirsi per comprendere e spiegare cosa fa la macchina esplorata e la comprensione delle consegne scritte nella scheda. Per alcune di queste ultime, abbiamo assunto che l'animatore dovesse intervenire per spiegare quanto richiesto. Questo aspetto linguistico è risultato essere più rilevante rispetto agli studenti della scuola secondaria di secondo grado. La versione definitiva, a cui si è giunti dopo le sperimentazioni del primo anno, prevede due schede: la prima ("Come è fatta la macchina?") ha come obiettivo identificare la struttura della macchina, le proprietà del quadrilatero articolato presente e i comportamenti dei vari punti/perni e termina con la richiesta di disegnare la macchina; la seconda ("Che cosa fa la macchina?") si focalizza sul disegno di figure corrispondenti e la ricerca di invarianti; il tutto per giungere a identificare la trasformazione realizzata dalla macchina.

La struttura della sessione, corrispondente alla terza questione, è stata parzialmente rivista. In fase di progettazione, è stata presa in considerazione da un lato l'eterogeneità delle conoscenze degli studenti sul tema del percorso, dall'altro



FIGURA 12 – Allestimento per il laboratorio sulle trasformazioni

l'esigenza di far svolgere un autentico lavoro matematico agli studenti e attuare una buona devoluzione del compito. Ad esempio, per richiamare le trasformazioni sono stati predisposti cartelloni rappresentazioni di figure corrispondenti in isometria e omotetia; essi fungono anche da riferimento per identificare la trasformazione realizzata dalla macchina esplorata.

Come per le classi di scuola secondaria di secondo grado, la sessione termina con la visita guidata alla mostra allestita. Tenuto conto di quanto detto, questa visita ha richiesto l'individuazione di un percorso specifico, cioè di macchine, e di una narrazione che potessero sollecitare la curiosità di questi studenti e non facessero apparire la matematica come qualcosa di poco comprensibile. Questo aspetto alimenta la riflessione sulle visite guidate (e sulle sfide che propongono), che è stata enunciata nella sezione sull'attività espositiva.

Per i laboratori svolti è stato somministrato un questionario valutativo dell'esperienza agli studenti qualche tempo dopo la visita. Riportiamo alcuni commenti degli studenti:

- *“Mi è piaciuto il fatto di poter sperimentare toccando le macchine.”*
- *“Mi è piaciuto il lavoro di gruppo e l'uso di strumenti che non conoscevo.”*
- *“È stato molto bello lavorare con macchine che sono state inventate prima del nostro tempo e che sono molto efficaci.”*
- *“Mi ha interessato molto lo sviluppo della geometria e della matematica. Mi ha affascinato come l'uomo si sia impegnato a rendere visibili le sue teorie.”*
- *“È stato molto divertente, informativo e anche interessante. Spero di tornare.”*

Questi commenti mettono in evidenza elementi cruciali che sono messi in gioco nelle sessioni di laboratorio: la parte sperimentale per 'toccare la matematica', il lavoro di gruppo, la scoperta di strumenti costruiti in altre epoche e la matematica come prodotto dell'uomo.

6. – Attività con le scuole

Sul tema delle macchine matematiche, e in generale dell'uso di strumenti materiali e digitali nella di-

dattica della matematica, sono stati svolti due progetti di diffusione della cultura scientifica su bandi ministeriali in collaborazione con scuole della provincia di Modena.

Il primo progetto, “La bottega rinascimentale nella scuola di oggi: storia, strumenti e laboratorio di matematica”⁽¹²⁾ ha coinvolto l'istituto comprensivo “G. Marconi” di Castelfranco Emilia e la scuola secondaria di primo grado “G. Ferraris” di Modena. Sono state progettate e condotte sperimentazioni per gli allievi dalla classe seconda primaria alla classe seconda della secondaria di primo grado. I temi trattati riguardavano la simmetria con le macchine matematiche, il teorema di Pitagora, le costruzioni con riga e compasso e le figure piane. Nell'ambito del progetto sono stati costruiti kit di pantografi per le trasformazioni geometriche da parte di alcuni studenti della scuola “G. Ferraris”, grazie alla disponibilità di una falegnameria (Barbieri et al., 2017).

Il secondo progetto “Il laboratorio scientifico nell'articolazione tra artefatti materiali e digitali, tra didattica in presenza e attività a distanza”⁽¹³⁾ è stato proposto da tre istituti comprensivi (“G. Marconi” e “G. Guinizzelli” di Castelfranco Emilia, “Istituto comprensivo 1” di Bomporto-Bastiglia); esso era maggiormente centrato sull'articolazione tra strumenti materiali e digitali. Gli insegnanti dei tre istituti hanno collaborato nella progettazione delle attività sperimentate nelle rispettive classi, dalla prima primaria alla seconda della scuola secondaria di primo grado. I temi riguardavano le conoscenze spaziali, la scrittura dei numeri con la pascalina Zero+1 e la e-pascalina (Maschietto & Soury-Lavergne, 2017), area e perimetro. Gli studenti della scuola secondaria hanno replicato l'ellissografo a filo teso nel percorso su area e perimetro e costruito nuove macchine (Scorcioni et al., 2023).

In entrambi i progetti, è stato organizzato un evento finale su tre giorni, composto da un seminario di presentazione delle sperimentazioni didattiche condotte nelle varie classi, una giornata di formazione per insegnanti di scuola primaria e secondaria di

⁽¹²⁾ <https://bottegamatematica.wordpress.com/> (ultimo accesso aprile 2024)

⁽¹³⁾ <https://sites.google.com/view/diffusioneeculturamodena2020/home-page> (ultimo accesso aprile 2024)

primo grado e una “giornata della matematica” in cui le scuole erano aperte ai genitori e alla cittadinanza per mostrare quanto svolto nel progetto e far sperimentare gli artefatti usati dagli alunni. Quest’ultima attività rientra nella terza tipologia di mostra citata all’inizio dell’articolo.

7. – Commenti conclusivi

Questo articolo presenta le varie attività che coinvolgono la collezione Macchine Matematiche, indirizzate alle scuole e al grande pubblico.

La ricerca educativa ha messo in evidenza che l’apprendimento avviene in diversi contesti con diverse modalità, portando così l’attenzione sulle forme di apprendimento extrascolastico e sulle interazioni tra istituzioni scolastiche e non scolastiche. Le attività descritte in questo articolo si svolgono principalmente in contesti extrascolastici, ma spesso in interazione con le istituzioni scolastiche.

A partire dalla posizione di Johnson e Majewska (2022) secondo cui l’educazione non-formale e l’apprendimento informale sono concetti complessi ma potenti, l’analisi dell’attività di laboratorio avviata in (Maschietto & Martignone, 2008) può essere approfondita e fornire elementi per mettere in luce proprio queste complessità e potenzialità. I laboratori intendono offrire un diverso contesto di apprendimento e favorire l’incontro con il lavoro matematico con la proposta di problemi autentici, come scoprire cosa fa una macchina. Per questo occorre che gli studenti siano messi nella condizione di mettersi in gioco. La progettazione e lo svolgimento dei laboratori per la scuola secondaria di primo grado ha posto in modo forte la questione di come tenere in conto l’eterogeneità delle conoscenze degli studenti, sia nell’introduzione al tema del laboratorio, sia nelle richieste formulate nelle schede. Un’attenzione particolare deve quindi essere portata agli aspetti linguistici e alla comprensione del testo, non soltanto in termini di lessico matematico.

Sul versante delle mostre, nel corso delle visite guidate sono emerse diverse questioni, legate a come favorire e sostenere la loro fruibilità. La prima questione riguarda l’accessibilità al contenuto matematico della mostra e, nello specifico, dei singoli modelli. Essa si può riformulare in termini di come

tenere in conto l’eterogeneità delle conoscenze matematiche, come per i laboratori ma questa volta rispetto a un pubblico su cui non si hanno informazioni. Questa porta alla seconda questione, cioè se e come potrebbe realizzarsi lo studio di sottopercorsi di visita a seconda della tipologia di pubblico. La terza questione riguarda la comunicazione in una mostra, legata cioè a quale scelta di medium, orale, scritto, animazioni digitali o altro.

Lo studio delle esperienze proposte dai musei in termini di studio di ambiente di apprendimento informale da parte di ricercatori in didattica della matematica ha portato a identificare ciò che è stato chiamato ‘*emerging learning*’. Questo concetto porta l’attenzione sull’apprendimento che non è direttamente sollecitato e valutato nella scuola ma che viene costruito anche nelle attività scolastiche e che può emergere quando lo studente è posto in nuove situazioni (Nemirovsky, 2018). Potrebbe essere questa un’altra pista di ricerca per l’analisi dei processi in atto nelle attività di laboratorio e nelle visite guidate alle macchine matematiche.

Un ultimo aspetto che ci interessa molto, e a cui si è già accennato in precedenza, è il collegamento tra quanto svolto nelle sessioni di laboratorio (e quindi in generale tra quanto proposto con le macchine matematiche) e quanto svolto (o si potrebbe svolgere) in classe. La provenienza delle classi in visita ha reso in passato difficile sollecitare e alimentare questo collegamento. La partecipazione agli itinerari ScuolaCittà del centro MEMO potrebbe fornire l’occasione per considerare il laboratorio come una componente di scuola diffusa nel territorio.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARBEAU, E. J & TAYLOR, P.J. (2009) (Eds.). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*. Springer.
- [2] BARBIERI, S., MASCHIETTO, M., MAZZAMURRO, M. S., SCORCIONI, F. & SERRAVALLO, R. (2017). Costruire e usare macchine matematiche in laboratorio. In O. Robutti, C. Sabena e M. Mosca (Eds.), *Insegnare e imparare matematica e fisica: Insegnanti e studenti per una didattica inclusiva, Atti del VI Convegno Di.Fi.Ma. 2015* (pp. 201-206). Ledizioni.
- [3] BAROZZI, I. & DANTI, E. (1583). *Le due regole della prospettiva pratica di M. Iacomo Barozzi da Vignola, Con i Commentari del R. P. M. Egnatio Danti dell’Ordine de Predicatori Matematico dello Studio di Bologna*, Roma.

- [4] BARTOLINI BUSSI, M.G. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39-60). Springer.
- [5] BARTOLINI BUSSI, M. G., GADE, S., JANVIER, M., KAHANE, J.-P., MASCHIETTO, M., MATSKO, V. & OUVRIER-BUFFET, C. (2009). Chapter 5. Mathematics in context: focusing on students. In P. Taylor & E. Barbeau (Eds.), *Challenging Mathematics in and beyond the classroom, The 16th ICMI Study* (pp. 171-203). Springer.
- [6] BARTOLINI BUSSI, M.G. & MASCHIETTO, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana UMI Convergenze. Springer.
- [7] BATTILANI, B. & MASCHIETTO, M. (2023). Le trasformazioni geometriche con le macchine matematiche: sessione di laboratorio al museo per la scuola secondaria di primo grado. In M. Asenova & B. D'Amore B. (Eds.), *Riflettere sulla Didattica della Matematica per Insegnare: Ricerche ed Esperienze* (pp. 115-116). Bonomo editore.
- [8] BETTINI, G. FACCHETTI, C. & MASCHIETTO, M. (2012). Costruzione di significati nel laboratorio di matematica: attività con la macchina matematica per la simmetria assiale. In O. Robutti, M. Mosca (Eds.) *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DiFiMa2011, Il curriculum di matematica e di fisica nella scuola del III millennio: infanzia, primaria, secondaria di primo e secondo grado* (pp. 193-204). Kim Williams Books.
- [9] CAVALIERI, B. (1632). *Lo specchio ustorio*. Clemente Ferroni.
- [10] CONCU, M. (2011). Pantografi per alcune trasformazioni geometriche del piano: simmetria assiale, omotetia e stiramento. Parte 1: Simmetria assiale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34(A)/4, 469-478.
- [11] CONCU, M. (2013). Pantografi per alcune trasformazioni geometriche del piano: simmetria assiale, omotetia e stiramento. Parte 2: Omotetia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36(A)/ 2, 157-167
- [12] COURANT, R., e ROBBINS, H. (2000). *Che cos'è la matematica?* Bollati Boringhieri.
- [13] DELAUNAY, M. N. (1895). Sur quelques nouveaux mécanismes: projeteur, ellipsographe, ellipsoidographe et hyperbolographe. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Tome XIX, 240-245.
- [14] DE L'HÔPITAL, G.F.A. (1707). *Théorie analytique des sections coniques*. Moutard.
- [15] DESCARTES, R. (1637). *Discours de la méthode*. Imprimerie de Jan Maire.
- [16] DONDI, V. & MASCHIETTO, M. (2022). Un percorso laboratoriale sulle sezioni coniche con le macchine matematiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 45(B)/4, 307-336.
- [17] GHERSI, I. (1951). *Matematica dilettevole e curiosa*. Quarta edizione. Hoepli.
- [18] HANNA, G., JAHNKE, H.N. & PULTE, H. (2010) (Eds.). *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Springer.
- [19] Il Giardino di Archimede (2001). *Pitagora e il suo teorema*. Edizioni Polistampa.
- [20] JOHNSON, M. & MAJEWSKA, D. (2022). *Formal, non-formal, and informal learning: What are they, and how can we research them?* Cambridge University Press & Assessment Research Report.
- [21] KEMPE, A. B. (1877). *How to Draw a straight Line?* Macmillan & c. (reprinted by NCTM: 1977).
- [22] KENDEROV, P., REJALI, A., BARTOLINI BUSSI, M. G., PANDELIEVA, V., RICHTER, K., MASCHIETTO, M., KADIJEVICH, D. & TAYLOR, P. (2009). Chapter 2. Presentation of Challenges beyond the Classroom – Sources and Organisational Issues. In P. Taylor & E. Barbeau (Eds.), *Challenging Mathematics in and beyond the classroom, the 16th ICMI Study* (pp. 53-96). Springer.
- [23] KLINE, M. (1996). *Storia del pensiero matematico. Volume I*. Einaudi.
- [24] KOENIGS, G. (1897). *Lecons de cinématique*. Librairie Scientifique Hermann.
- [25] LUGLI, A., ARABINI, E., MASCHIETTO, M. & VANGELISTI, S. (2021). Modelli fisici per la matematica: trisettori. *Progetto Alice*, 22(66), 513-538.
- [26] MASCHIETTO, M. (2009). Strumenti per la prospettiva dal Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena. In R. Sinisgalli (Ed.), *Atti del convegno L'Arte della Matematica nella prospettiva* (pp. 65-85). Casa Editrice Cartei & Bianchi.
- [27] MASCHIETTO, M. (2018). Chapter 11. Classical and Digital Technologies for the Pythagorean Theorem. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, C. Vale (Eds.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education- ICME-13 Monographs* (pp. 203-225), Springer.
- [28] MASCHIETTO, M. & MARTIGNONE, F. (2008). Activities with the mathematical machines: Pantographs and curve drawers. In E. Barbin, N. Stehlikova, & C. Tzanakis (Eds.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the fifth European Summer University* (pp. 285-296). Vydavatel'sky.
- [29] MASCHIETTO, M. & SAVIOLI, K. (2014). *Numeri in movimento. Attività per apprendere l'aritmetica con la pascalina*. Collana Artefatti intelligenti. Erickson.
- [30] MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE, S. (2017). The duo "pascaline and e-pascaline": an example of using material and digital artefacts at primary school. In E. Faggiano, F. Ferrara, & A. Montone (Eds.), *Innovation and technology Enhancing Mathematics Education* (p. 137-160). Springer.
- [31] NEMIROVSKY, R. (2018). Chapter 23. Pedagogies of Emergent Learning. In G. Kaiser et al. (eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* (pp. 401-421). Springer.
- [32] PERGOLA, M. & ZANOLI, C. (2010). Capitolo 3. L'Associazione Macchine Matematiche. In USR E-R, ANSAS e IRRE E-R, Regione Emilia-Romagna, F. Martignone (Eds.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna* (vol. 2, pp. 37-39). Tecnodid Editrice.
- [33] PERGOLA, M., ZANOLI, C., MARTINEZ, A. & TURRINI, M. (2001). Modelli fisici per la matematica: sulle sezioni del cilindro retto. *Progetto Alice*, II-1, 143-150.
- [34] PERGOLA, M., ZANOLI, C., MARTINEZ, A. & TURRINI, M. (2002). Modelli fisici per la matematica: parallelogrammi, antiparallelogrammi e deltoidi articolati. *Progetto Alice*, III-8, 323-346.

- [35] ROGERS, A. (2004). Looking again at non-formal and informal education – towards a new paradigm, *The encyclopedia of pedagogy and informal education*, www.infed.org/biblio/non_formal_paradigm.htm.
- [36] RUFUS, I. (1975). Two Mathematical Papers without Words. *Mathematics Magazine*, 48(4), 198.
- [37] SCHEINER, C. (1631). *Pantographice, seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum, mechanical, mobile*. (Trad. ital a cura di Troili, G., 1653).
- [38] SCORCIONI, F., BARBIERI, S., RIZZO, M., BORGESE, D., FORNABAIO, V., BARONI, M., BUSATI, T. & MARCHETTO, P. (2023). Area e perimetro: dagli artefatti materiali a quelli digitali e viceversa. In M. Asenova & B. D'Amore B. (Eds.), *Riflettere sulla Didattica della Matematica per Insegnare: Ricerche ed Esperienze* (pp. 129-130). Bonomo editore.
- [39] VANGELISTI, S. (2007). Geometria tra le mani: macchine matematiche per non vedenti. In R. Imperiale, B. Piochi & P. Sandri (Eds.), *Atti del Convegno n.15 "Matematica e difficoltà: i nodi dei linguaggi"*. (pp. 93-99). Pitagora editrice.
- [40] ZANOLI, C. & MARTIGNONE, F. (2010). Capitolo 5. Le macchine del progetto MMLab-ER. In USR E-R, ANSAS e IRRE E-R, Regione Emilia-Romagna, F. Martignone (Eds.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna* (vol. 2, pp. 56-72). Tecnodid Editrice.



Michela Maschietto

Michela Maschietto è professoressa associata di Matematiche Complementari presso il Dipartimento di Educazione e Scienze Umane dell'Università di Modena e Reggio Emilia; è direttrice del Laboratorio delle macchine matematiche. I suoi interessi di ricerca riguardano la didattica della matematica, con particolare attenzione all'uso di strumenti materiali e digitali, e la formazione degli insegnanti.