
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RICCARDO ROSSO

Quadri da un'esposizione: la collezione di modelli geometrici dell'Università di Pavia

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 9 (2024), n.2-3, p. 215–232.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_2-3_215_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_2-3_215_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Quadri da un'esposizione: la collezione di modelli geometrici dell'Università di Pavia

RICCARDO ROSSO

Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università degli Studi di Pavia

E-mail: riccardo.rosso@unipv.it

Sommario: *Presento una selezione dei modelli geometrici conservati all'Università di Pavia tracciandone la storia e l'intreccio con la didattica e l'attività di ricerca svolte da alcuni docenti attivi nella sede.*

Abstract: *I show a selection of the geometric models kept at the University of Pavia, tracing their history and connections with the teaching and research activities of some professors who were active in Pavia.*

1. – La nascita della collezione

A metà degli anni '70 del XIX secolo prese forma il progetto di annessare alla Facoltà di Scienze dell'Università di Pavia una Scuola Normale, sull'esempio di quella di Pisa. Attorno a questo progetto si coagulò un nucleo di matematici di primo livello. Oltre a Felice Casorati (1835-1890) – già presente a Pavia dove svolse l'intera carriera – furono chiamati Eugenio Beltrami (1835-1900) ed Eugenio Bertini (1846-1933) rispettivamente sulle cattedre di Fisica Matematica e Geometria Superiore, necessarie per il completamento del secondo biennio del corso di studi in matematica e quindi all'avvio della Scuola. Anche se la Scuola Normale fu equiparata dopo oltre un decennio di ambiguità alle Scuole di Magistero sorte nel frattempo in diverse sedi universitarie, la sua istituzione e il grande interesse dei matematici per la riuscita del progetto garantirono, ad esempio, la creazione di una biblioteca espressamente dedicata alla matematica e lo stanziamento di fondi destinati all'acquisto dei modelli da utilizzare come ausilio didattico, soprattutto per i corsi di geometria.

Sulle collezioni dei modelli geometrici vi è un'ampia letteratura. Mi limito a segnalare la recente

raccolta di lavori [Friedman, Krauthausen, 2022] che contiene molte informazioni sulle varie iniziative sorte in proposito nel XIX secolo e la tesi [Polo-Blanco, 2007], centrata sul contenuto matematico pertinente ad alcune classi di modelli. Per quanto riguarda le collezioni presenti in Italia, ricordo l'ampio articolo [Palladino, Palladino, 2009]. Restringendo l'attenzione alla collezione conservata a Pavia, la descrizione più completa è contenuta nel lavoro di Palladino [1997] che è servito come ispirazione per la realizzazione della pagina web che ospita una galleria fotografica di quasi tutti i modelli. Infine, una descrizione completa dell'esemplare più importante della collezione, la celebre *cuffia* di Beltrami, è disponibile in [Capélo, Ferrari, 1982], lavoro che è stato di riferimento per diverse pubblicazioni tra cui segnalo [Boi, Giacardi, Tazzioli, 1998], volume centrato sull'importante carteggio tra Beltrami ed il matematico francese Jules Hoüel circa le geometrie non euclidee.

La collezione pavese contiene molti dei modelli realizzati dalla ditta di Ludwig Brill a Darmstadt a partire dal 1877, anno nel quale quest'ultimo rilevò la libreria e stamperia paterna. La ditta fu poi acquistata da Martin Schilling, che trasferì l'attività a Halle an der Saale nel 1899 e, in seguito, a Lipsia. Il catalogo Schilling del 1911 conta oltre quattrocento modelli pertinenti non solo la geometria ma un po'

Accettato: 30 luglio 2024.

tutti i rami della matematica pura ed applicata, con particolare riguardo alla fisica-matematica. Ludwig Brill era fratello maggiore di Alexander Brill (1842-1935), matematico che ebbe come docente di meccanica Alfred Clebsch quando questi insegnava alla Technische Hochschule di Karlsruhe e che fu collega di Felix Klein a Monaco dal 1875. Qui, Brill, Walther Dyck e Klein contribuirono con i loro allievi alla progettazione di molti modelli riguardanti soprattutto superficie dalle interessanti proprietà. Sull'importanza attribuita da Klein ai modelli è sufficiente riportare le parole pronunciate in una conferenza tenuta a Chicago nel 1893 durante un congresso di matematica svoltosi a margine della Fiera Colombiana e dedicata a illustrare gli sviluppi della matematica in Germania nel secolo che si avviava al termine [Klein, 1894, pp. 108-109]

In conclusion a few words should here be said concerning the modern development of university instruction. The principal effort has been to reduce the difficulty of mathematical study by improving the seminary arrangements and equipments. (...) Collections of mathematical models and courses in drawing are calculated to disarm, in part at least, the hostility directed against the excessive abstractness of the university instruction.

Furono molti in effetti i giovani studenti che gravitavano in un modo o nell'altro attorno a Klein a dedicare tempo ed energie per la realizzazione dei modelli che spesso erano una sorta di *spin off* delle tesi di dottorato. Per esempio, nel periodo trascorso da Klein a Monaco e che coincide con l'avvio delle riproduzioni su ampia scala realizzate da Brill, Carl Rodenberg realizzò una serie di modelli di superficie del terz'ordine basata sulla classificazione fornita in un lavoro pubblicato sui *Mathematische Annalen*, della cui conduzione Klein era allora responsabile [Rodenberg, 1878]. Nello stesso periodo Karl Rohn, che era passato dagli studi in ingegneria a quelli in matematica grazie anche all'influenza di Brill, si occupò dello studio delle superficie di Kummer [Rohn, 1881] realizzandone modelli in gesso e contribuì alla costruzione di una serie di modelli di superficie rigate del quart'ordine, ottenuti con fili fissati ad un telaio in ottone.

Per evitare il più possibile ripetizioni con quanto già presente nella letteratura ho deciso di presentare un'antologia dei modelli conservati a Pavia, so-

fermandomi su quelli che sono meno noti ma non per questo poco interessanti, così come sui modelli che in qualche modo sono legati all'attività di alcuni docenti che esercitarono il loro magistero a Pavia. Per brevità, non ho inserito l'integrafo di Pascal, per il quale rimando a [Palladino, 1997].⁽¹⁾

2. – Un punto di partenza

Il primo gruppo di modelli per i quali vi è ancora traccia della richiesta di acquisto è composto da⁽²⁾

tre modelli di Kummer sui sistemi di raggi, presentati nel 1860 alla R[eale]. Acc[ademia]. di Berlino e costruiti da W[ilhelm]. Ap[el], meccanico della Università di Göttingen.

La richiesta, avanzata da Bertini il 31 dicembre 1882 fu approvata il successivo 17 gennaio e comportò una spesa non trascurabile di 385 Lire.⁽³⁾ Questi modelli sono copie realizzate sulla base degli originali presentati da Kummer per illustrare alcuni concetti sviluppati in un importante lavoro pubblicato poco prima e dedicato allo studio della geometria differenziale dei sistemi di congruenze rettilinee generali, nei quali le rette non sono vincolate ad essere ortogonali ad una superficie generatrice assegnata [Kummer, 1860].⁽⁴⁾ La commercializzazione delle copie del modello di Kummer fu annunciata nel settembre 1882 con un opuscolo che tra l'altro riproduceva il testo di una breve comunicazione in cui Kummer aveva spiegato le caratteristiche dei tre modelli che descrivono le possibili tipologie di fasci

⁽¹⁾ È possibile avere un'idea della consistenza della collezione pavese visitando il sito <https://matematica.unipv.it/collezione-dei-modelli-matematici/> realizzato a partire dal lavoro di Valeria Olivati nel 2001 ed in fase di ristrutturazione e completamento, con la collaborazione di Marco Marabelli. Si tenga presente a questo proposito che la suddivisione in categorie non corrisponde a quella dei cataloghi curati da Dyck [1892-93] e Schilling [1911].

⁽²⁾ Il documento contenente la richiesta di acquisto è conservato presso l'Archivio Storico dell'Università di Pavia.

⁽³⁾ Ricordiamo che all'epoca lo stipendio di un professore ordinario era di 5000 Lire annue.

⁽⁴⁾ Una chiara esposizione della teoria di Kummer si trova in [Bianchi, 1902, Cap. X].

rettilinei infinitamente sottili (*unendlich dünner Strahlenbüschel*). I raggi studiati da Kummer emanano da una superficie generatrice $\mathcal{S}_0$, parametrizzata da coordinate gaussiane (u, v) ed hanno una direzione individuata da un vettore unitario $\mathbf{w} = \mathbf{w}(u, v)$. Kummer studiò la struttura locale delle congruenze prendendo un raggio r_0 di riferimento e determinando su di esso cinque punti particolari. La coppia che ci interessa è costituita dai *fuochi* (*Brennpunkte*) del raggio r_0 che Kummer determina calcolando la distanza tra r_0 e tutti i raggi vicini della congruenza che tagliano $\mathcal{S}_0$ in punti di coordinate $(u + du, v + dv) \equiv (u + du, v + tdu)$, con $t = \frac{dv}{du}$. La

distanza tra r_0 ed uno qualsiasi dei raggi vicini è in generale del primo ordine in du tranne al più per due valori di t , τ_1 e τ_2 , cui corrispondono i valori ρ_1 e ρ_2 dell'ascissa lungo il raggio r_0 e quindi due punti F_1 ed F_2 di r_0 che sono detti fuochi perché si riducono ai fuochi di $\mathcal{S}_0$ quando la congruenza rettilinea è formata dalle sue normali. L'esistenza di F_1 ed F_2 dipende dalla realtà delle radici di un'equazione di secondo grado e questo permette di distinguere i fasci rettilinei sottili in due famiglie, a seconda che esistano o meno i fuochi. Tornando al modello (Fig. 1), esso riproduce un fascio sottile di raggi che si appoggiano ad una circonferenza di centro O posta sulla base che rappresenta una sezione della

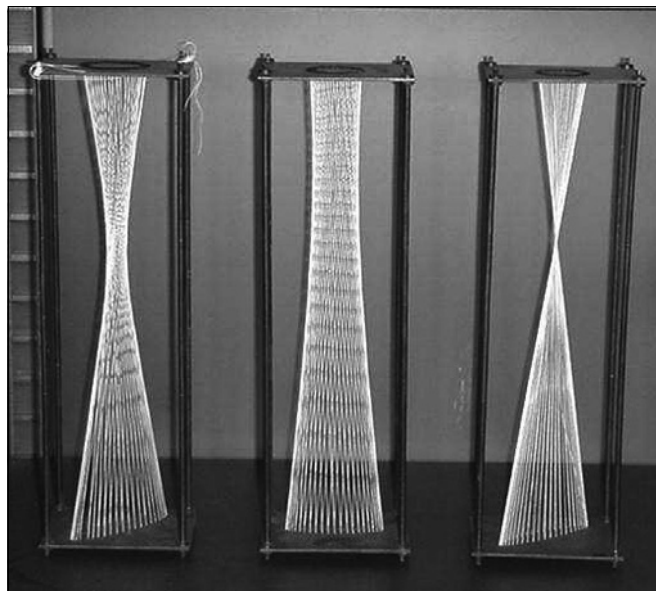


FIGURA 1 – Le tre tipologie di fasci rettilinei infinitamente sottili descritte da Kummer e che poggiano su una circonferenza visibile nella base superiore.

congruenza, ortogonale al raggio passante per O che gioca a sua volta il ruolo di r_0 ed è rappresentato da un filo di seta rosso. I raggi passanti per i punti della circonferenza di base delimitano una superficie rigata del quart'ordine le cui sezioni con piani ortogonali ad r_0 sono ellissi, in generale. Vi sono due sezioni che degenerano in segmenti rettilinei, quando i fuochi sono reali. I piani focali, contenenti cioè r_0 e una delle rette che costituiscono le sezioni degeneri, possono essere ortogonali tra loro (I modello) o formare un angolo acuto (II modello). Il terzo modello corrisponde ad una congruenza in cui non esistono su r_0 punti focali. Questa costruzione può essere ripetuta punto per punto di $\mathcal{S}_0$. Nella nota esplicativa Kummer [1860b] osservava, senza però fornire una dimostrazione, che i tre modelli di fasci infinitamente sottili non solo erano i tre soli possibili dal punto di vista matematico ma che a ciascuno di essi corrispondeva una realizzazione fisica quando i fasci rettilinei erano concepiti come raggi luminosi che si propagano all'interno di un mezzo otticamente omogeneo [Rowe, 2022, pp. 184-185].

2.1 – La geometria dei bassorilievi

Tra i primi corsi di geometria che gli studenti di fine Ottocento affrontavano vi era quello di *Geometria Descrittiva* (con Elementi di Disegno) ed il modello di cui diamo una descrizione si riferisce ai contenuti di questo corso. L'aspetto interessante, descritto nel catalogo Schilling [1911, pp. 116-117], è che esso riguarda la prospettiva in rilievo (*Reliefspektive*) o prospettiva lineare di semplici solidi: un cilindro cavo, un cubo sormontato da una sfera ed un cono (Fig. 4). Questa variante della prospettiva fu introdotta dall'architetto tedesco Johann Adam Breysig nel 1798 e nel 1860 Noël-Germain Poudra pubblicò un volume dedicato ad illustrarne i principi che poi confluiranno nei testi di geometria descrittiva come, ad esempio, [Müller, Kruppa, 1936, pp. 361-366]. Poudra [1860, p. 1], che si era dedicato all'argomento ispirato da un'osservazione di Poncelet, definisce così il nuovo genere di prospettiva:

Abbiamo numerosi trattati sulla prospettiva dei dipinti ma non ne esiste alcuno che tratti questo genere di prospettiva applicabile alle altre arti figurative. Poiché le costruzioni di quest'ultimo tipo hanno

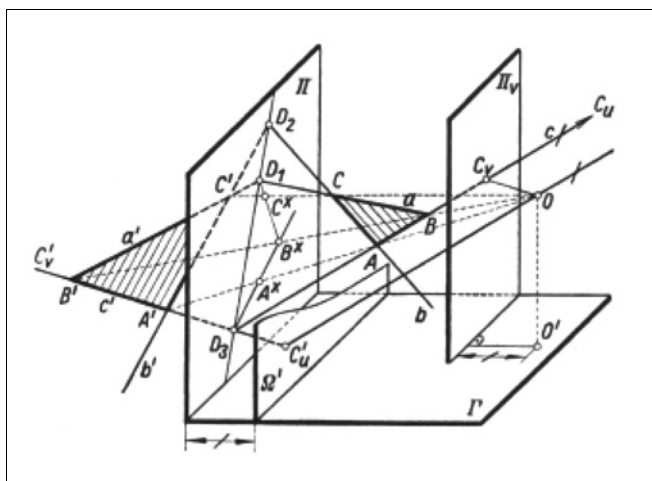


FIGURA 2 – Gli elementi di una prospettiva nello spazio necessari per comprendere la prospettiva in rilievo. La figura è tratta da [Müller, Kruppa, 1936, p. 263].

in genere tre dimensioni, la scienza che le riguarda, analoga alla prospettiva piana, è detta *prospettiva in rilievo*.⁽⁵⁾

Nello spazio, una prospettiva è una trasformazione individuata da un punto fisso O e da un piano Π che non lo contenga (Fig. 2). Ad ogni punto $A \neq O$ dello spazio si associa un punto A' sulla retta OA e tale che, detta A^x l'intersezione di OA con Π , il birapporto $(AA'OA^x)$ abbia un valore costante δ . Una prospettiva manda una retta r che non contenga O in una retta r' che la interseca in un punto di Π ; similmente un piano π non passante per O ha per corrispondente un piano π' che non passa per O ma lo interseca lungo una retta di Π . Le rette ed i piani passanti per O corrispondono a sé stessi. Ai piani paralleli a Π corrispondono piani ancora paralleli a Π ed il piano corrispondente al piano all'infinito costituisce il piano di fuga.

Se un oggetto come il parallelepipedo di base $ABCD$ sormontato da una piramide di vertice S (Fig. 3) subisce una prospettiva di centro O , in modo da trasformarsi nel solido $A^rB^rC^rD^rS^r$, un

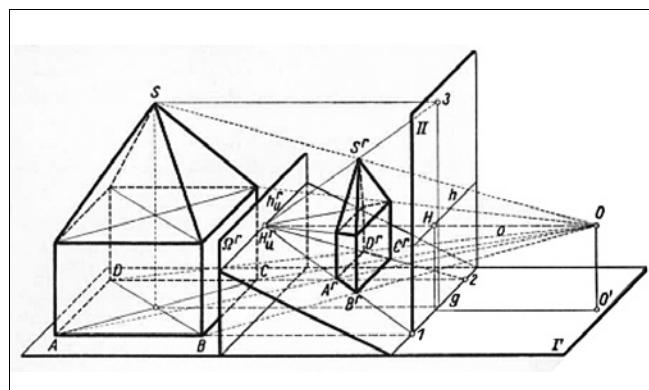


FIGURA 3 – Il solido $ABCD S$ e la sua immagine $A^rB^rC^rD^rS^r$ sotto l'azione di una prospettiva sono visti come simili da un osservatore collocato nel centro O della prospettiva. La figura è tratta da [Müller, Kruppa, 1936, p. 264].

osservatore collocato in O vede l'immagine come simile all'originale. Perché sia possibile ottenere questo effetto occorre che il piano Π sia interposto tra O ed il piano di fuga.

La prospettiva in rilievo ha costituito anche il fondamento geometrico per la realizzazione dei fondali teatrali.



FIGURA 4 – Prospettiva in rilievo di alcuni solidi elementari: una sfera, un cubo, un cono ed un cilindro cavo. Il punto di vista è collocato di fronte al modello, sul prolungamento dell'asse di rotazione della rappresentazione della sfera a 56 cm. di distanza dallo spigolo anteriore su cui poggia il modello e per il quale passa il piano di collineazione Π mentre il piano di fuga è a 28 cm dietro Π .

3. – Quadriche per tutti i gusti

I *pop-up* in cartoncino hanno ravvivato per molto tempo i libri per l'infanzia ma erano utilizzati anche come ausilio didattico nella geometria. La collezione di Pavia contiene modelli di alcune quadriche realizzati intrecciando opportunamente dei dischi in

⁽⁵⁾ On possède de nombreux traités sur la perspective des tableaux, mais il n'en existe aucun qui traite de cette espèce de perspective applicable aux autres ouvrages d'imitation. Comme les constructions de ce dernier genre ont généralement trois dimensions, on appelle *perspective-relief*, la science analogue à la perspective plane, qui les concerne.

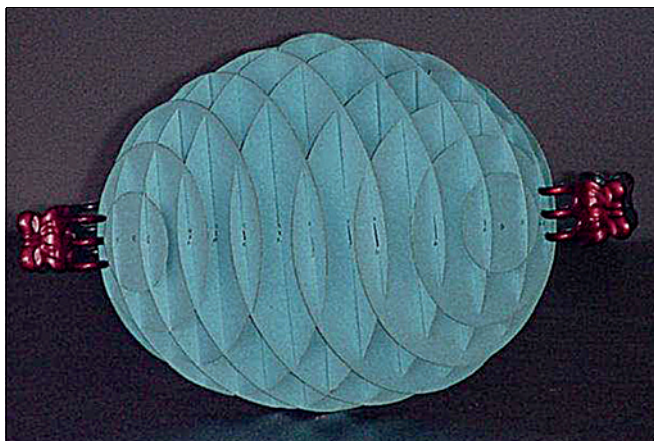


FIGURA 5 – Pop-up in cartoncino che può rappresentare un'intera famiglia di ellissoidi, esplorabile tendendo o contraendo il cartoncino alle estremità.

cartoncino (Fig. 5). Con la loro mobilità questi modelli non soltanto creavano un sicuro effetto sorpresa ma permettevano di visualizzare una *famiglia* di superficie le cui caratteristiche possono essere gradualmente mutate: così, ad esempio, è possibile passare da un ellissoide prolato ad uno oblato tirando o premendo una sfera ai poli.

Tra i modelli in gesso dedicati alle quadriche, non può mancare il cono circolare retto nel quale, rimosse le tre parti separate da scanalature, è possibile visualizzare i vari tipi di sezioni coniche.⁽⁶⁾ Altri modelli di quadriche evidenziano ciascuno una famiglia di curve notevoli che vi appartengono: dalle sezioni circolari per un ellissoide a tre assi distinti⁽⁷⁾ alle famiglie di rette che generano un iperboloide ad una falda⁽⁸⁾ o un paraboloide iperbolico.⁽⁹⁾ Una resa ancora più efficace della struttura delle quadriche rigate si ha nei *Fadenmodelle*, modelli con fili di seta che rappresentano generatrici e direttrici delle superficie e che sono fissati ad un pesante telaio in ottone: nella collezione sono presenti l'iperboloide ad una falda ed il paraboloide iperbolico nella versione "moderna" con fili di nylon fatta realizzare da Luigi Campedelli negli

⁽⁶⁾ L'immagine è visibile all'indirizzo:
<https://mate.unipv.it/modelli/cat-I/fI-19.html>

⁽⁷⁾ Si veda all'indirizzo:
<https://mate.unipv.it/modelli/cat-I/fI-9.html>

⁽⁸⁾ Si veda all'indirizzo:
<https://mate.unipv.it/modelli/cat-I/fI-1.html>

⁽⁹⁾ Si veda all'indirizzo:
<https://mate.unipv.it/modelli/cat-I/fI-4.html>

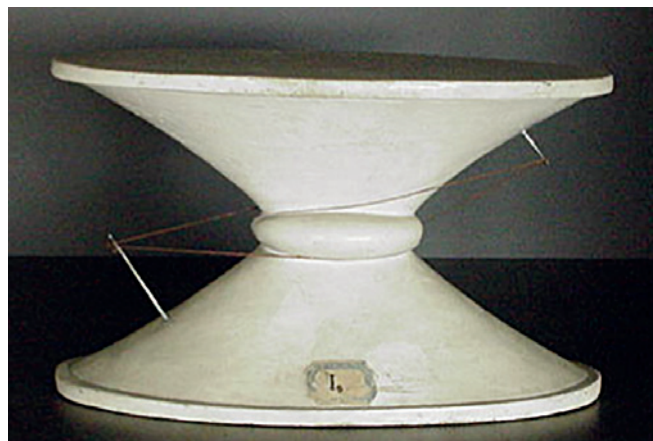


FIGURA 6 – Costruzione dell'ellissoide a partire da una coppia di quadriche confocali. La costruzione è dovuta ad Otto Staude.

anni '50 del secolo scorso. Campedelli si era servito degli originali conservati a Pavia come modelli per le realizzazioni in materiali meno delicati.⁽¹⁰⁾

Spendiamo qualche parola in più per il modello rappresentato in Fig. 6 che presenta la costruzione dell'ellissoide *con il filo*. Per capire di cosa si tratti, ricordiamo anzitutto come, a partire dalla prima metà dell'Ottocento, vi fu un rinnovato interesse verso le coniche, ad esempio grazie ai lavori di Jean-Victor Poncelet e Michel Chasles. Come riflesso, seguirono molte ricerche volte a generalizzare per le quadriche almeno parte dei risultati ottenuti. Le proprietà focali, ad esempio, furono studiate in dettaglio e Otto Staude [1882] pubblicò una costruzione con i fili (*Faden-construction*) di un ellissoide che generalizzava quella di Charles Graves per ottenere ellissi confocali ad un'ellisse data $\mathcal{E}_0$ che, a sua volta, poteva essere ottenuta con la nota "costruzione del giardiniere".

Nelle note alla traduzione in inglese di alcuni lavori di Chasles, Graves [1841, p. 77] ottenne questo teorema

If from any point in the outer of two biconfocal conics, two tangent arcs be drawn to the inner curve, the sum of these two arcs and of the concave part of the circumference of the conic included between them will be constant.

⁽¹⁰⁾ Si possono visitare gli indirizzi <https://mate.unipv.it/modelli/cat-XIII/fXIII-b.html> (iperboloide ad una falda) e <https://mate.unipv.it/modelli/cat-XIII/fXIII-a.html> (paraboloide iperbolico).

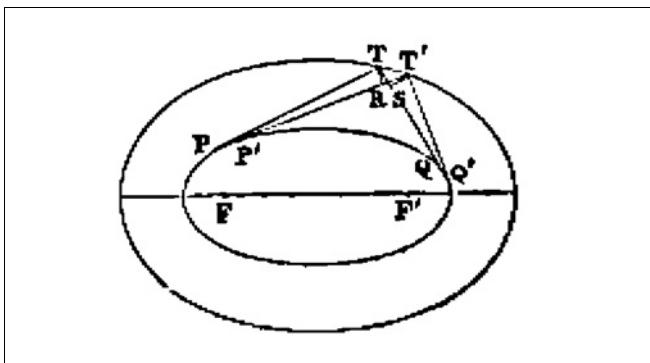


FIGURA 7 – Illustrazione del teorema di Graves. La figura è tratta da [Salmon, 1869, p. 358].

Riferendosi alla Figura 7, il teorema di Graves permette di concludere che $PT + QT - \ell(\widehat{PQ})$ è costante, dove $\widehat{PQ}$ è l'arco dell'ellisse interna che si trova sopra il segmento PQ . Immaginando di avvolgere attorno all'ellisse interna un filo flessibile ed inestendibile di lunghezza maggiore del suo perimetro e di mantenere teso il filo, il punto P descrive un'ellisse confocale alla prima. Nel 1843 Chasles e James Mac Cullagh ottennero un risultato analogo per l'iperbole. Per passare alle quadriche, disponia-

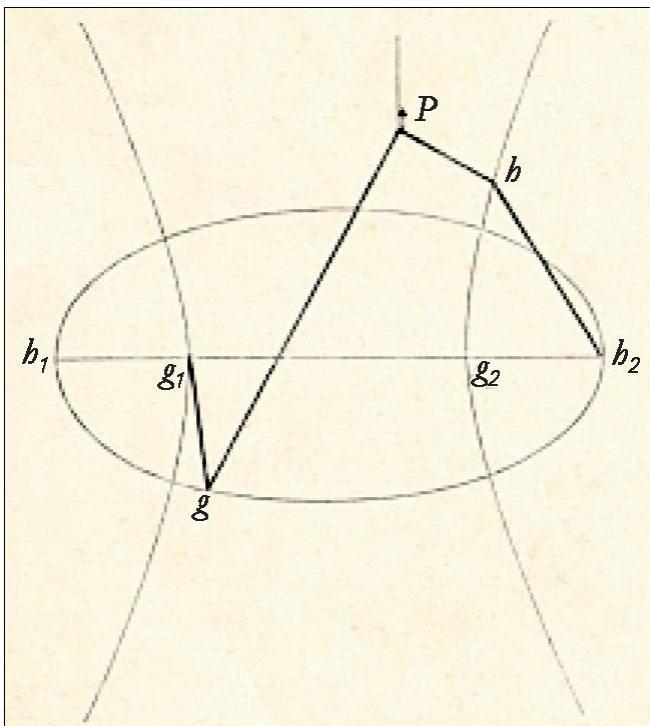


FIGURA 8 – Un filo fissato alle estremità nei fuochi g_1 di un'ellisse ed h_2 di un'iperbole mantenuto teso in P e vincolato a passare per un punto g dell'ellisse ed uno h dell'iperbole si dispone in modo che P giaccia su un ellissoide.

mo un'ellisse ed un'iperbole in piani ortogonali, in modo che i fuochi dell'una coincidano con i vertici dell'altra. In questa configurazione, Staude (Fig. 8) fissa gli estremi di un filo flessibile ed inestendibile al fuoco g_1 dell'ellisse ed al fuoco h_2 dell'iperbole, vincolandolo a passare per un punto g dell'ellisse ed uno h dell'iperbole. Quando il filo è teso grazie ad una forza applicata in un punto P , in modo da assumere la forma di una spezzata, P appartiene ad un ellissoide.

Infine, il modello della Fig. 6 è basato su questo teorema [Staude, 1882, p. 170]:

Quando un filo chiuso inestendibile avvolto attorno alla combinazione di due superficie confocali, un ellissoide λ_0 ed un iperboloide ad una falda μ_0 , sarà teso da un punto mobile P in modo da toccare ciascuna delle due parti in cui l'iperboloide è diviso dall'ellissoide (vuoi in un punto o lungo un intero arco), allora il punto P descrive un ellissoide confocale alle superficie date.⁽¹¹⁾

Oltre alla coppia di superficie confocali generatrici, il modello presenta due fili di colori diversi – almeno nella descrizione originale – che illustrano i casi in cui il contatto con l'iperboloide è puntuale oppure lungo un arco.

La descrizione di questo modello fu inserita nel volume di Hilbert e Cohn-Vossen *Anschauliche Geometrie* [1932, pp. 17-22] e la costruzione di Staude, la cui validità era dimostrata con il ricorso ad integrali iperellittici, fu ottenuta in modo sintetico da un altro collaboratore alla realizzazione dei modelli, Sebastian Finsterwalder [1885] che è considerato uno dei pionieri nella fotogrammetria aerea, di cui curò la voce nell'ultimo volume della *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*.

4. – Fasci di quadriche e curve nello spazio

Trasferitosi a Pavia da Pisa nel 1880, Bertini assunse tra l'altro l'incarico dell'insegnamento di Geometria Superiore, inteso come naturale continuazione del

⁽¹¹⁾ Wenn ein geschlossener unausdehnbar Faden, der um die Combination zweier gegebenen confocaler Flächen, eines Ellipsoides λ_0 und eines einschaligen Hyperboloides μ_0 , herumgeschlungen ist, durch einem beweglichen Punkt P derart gespannt wird, dass er beständig jeden der beiden durch das Ellipsoid getrennten Theile des Hyperboloides berührt, so beschreibt der Punkt P ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoides.

corso di Geometria Proiettiva che era tenuto da Ferdinando Aschieri. Tra gli argomenti trattati nel corso dell'anno accademico 1882-83 vi fu lo studio delle quartiche gobbe, curve algebriche ottenute come intersezione completa di due quadriche, che era stato il tema oggetto di uno dei primi lavori di Bertini [1872] e a cui si ricollega il modello riportato in Figura 9, messo in commercio nel 1884. Per comprenderlo, ricordiamo che, assegnate due quadriche di equazioni in coordinate proiettive (x_1, x_2, x_3, x_4)

$$(1) \quad \sum_{i,k=1}^4 a_{ik}x_i x_k = 0 \quad \sum_{i,k=1}^4 b_{ik}x_i x_k = 0,$$

dove le matrici di elementi a_{ik} e b_{ik} sono simmetriche, la famiglia ad un parametro λ

$$\sum_{i,k=1}^4 a_{ik}x_i x_k + \lambda \sum_{i,k=1}^4 b_{ik}x_i x_k = 0$$

rappresenta il *fascio* generato dalle (1). La curva comune alle quadriche (1) – detta *curva base* del fascio – è una curva di quart'ordine che era detta quartica gobba, di prima specie nel caso in cui essa fosse irriducibile. Tra le quadriche del fascio vi sono quelle corrispondenti alle soluzioni dell'equazione di quarto grado in λ

$$(2) \quad \det(A - \lambda B) = 0,$$

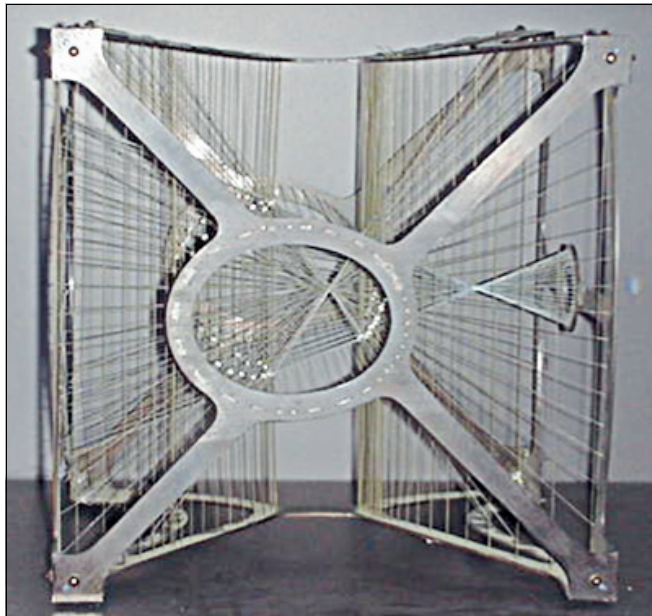


FIGURA 9 – La quadrica gobba ottenuta come intersezione di coni quadrici reali, due dei quali degenerati in cilindri, è materializzata dalle perline visibili dietro il telaio in ottone.

dove A e B sono le matrici simmetriche associate alle forme quadratiche a_{ik} e b_{ik} . Le quadriche così ottenute sono dei *coni* e, siccome la quartica gobba di prima specie è comune a *tutte* le quadriche del fascio, essa si può vedere come intersezione di una coppia di questi coni. A tal proposito, si possono presentare diversi casi, a seconda che le soluzioni di (2) siano tutte reali, due reali e due immaginarie o tutte immaginarie. Nei primi due casi, sarà dunque sempre possibile vedere la quartica gobba come intersezione di almeno due coni reali ed è a questa circostanza che si lega il modello in Fig. 9 che descrive il caso in cui (2) ha tutte le soluzioni reali.

La curva base del fascio è individuata dalle perline fissate alle generatrici dei coni scelti per rappresentarla. Il modello fu messo in commercio con quelli che rappresentano gli altri casi possibili in base alla natura delle radici di (2) ma esso è il solo a far parte della collezione pavese.

Sempre nelle lezioni di Geometria Superiore del 1882-83 Bertini, dopo aver trovato il genere ($p = 1$) e le caratteristiche di Cayley di una quartica gobba, dimostrava che i coni del fascio (1) ne costituiscono la *svilupppabile bitangente*, il luogo delle rette tangenti ad essa in due punti distinti.

Le superficie sviluppabili costituiscono il tema di un'altra categoria di modelli di cui quello in Fig. 10 si segnala per l'elegante costruzione geometrica che ne è alla base [Odenhal, Stachel, Glaeser, 2020, pp. 219-220]. Consideriamo le circonferenze $\mathcal{C}_1$ e

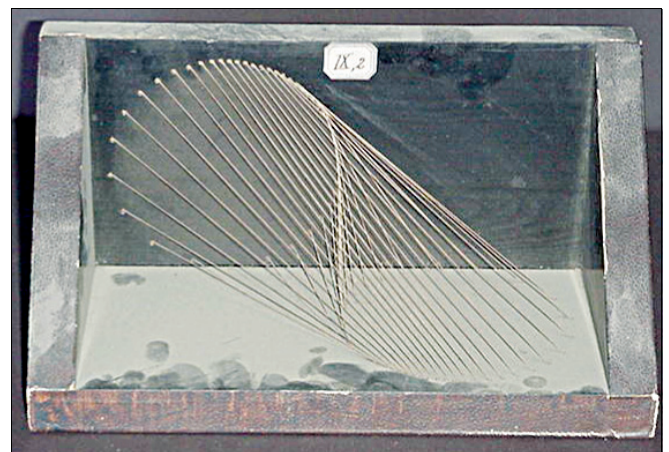


FIGURA 10 – Superficie sviluppabile bitangente costruita a partire da due circonferenze disposte in piani ortogonali e dotate di una tangente comune.

$\mathcal{C}_2$ poste rispettivamente nei piani ortogonali $y = 0$ e $z = 0$, di equazioni

$$\begin{cases} y = 0, & (x - a)^2 + z^2 - 2az = 0 \\ z = 0 & (x + a)^2 + z^2 - 2az = 0 \end{cases}$$

che hanno l'asse delle x come retta tangente comune τ . Si tracci la tangente t_1 alla circonferenza $\mathcal{C}_1$ in un suo punto qualsiasi P e sia Q la sua intersezione con τ . Da Q si tracci la tangente a $\mathcal{C}_2$ distinta da τ e sia R il punto di tangenza. I punti P , Q ed R individuano un piano tangente ad *entrambe* le circonferenze e la retta PR è una loro tangente comune. L'involuppo di questi piani è la superficie sviluppabile rappresentata dal modello.

5. – Le superficie del terzo ordine

Le superficie del terzo ordine costituiscono una pagina ricchissima nella storia della geometria del XIX secolo. Ciò che più attirò l'attenzione degli studiosi fu che, mentre le quadriche o non contengono rette o sono superficie rigate, per le superficie cubiche si presenta la situazione intermedia perché possono contenere un numero finito di rette, come osservato per primo da Arthur Cayley. Il numero di queste rette, 27, fu determinato da George Salmon. Dopo gli importanti studi del matematico svizzero Jacob Steiner e le ricerche di Luigi Cremona e Rudolph Sturm, Clebsch studiò la *superficie diagonale*, contenente 27 rette reali ed avente S_5 come gruppo di simmetria (Fig. 11). Christian Wiener costruì per primo un modello di superficie del terzo ordine con tutte le rette reali, descritto in un lavoro di Cayley [1873]. Il problema di comprendere la forma di queste superficie catturò l'attenzione di Klein sin da quando, durante la prima permanenza a Göttingen, era stato a diretto contatto con Clebsch. Per la sua simmetria, la superficie diagonale ebbe infatti un ruolo importante nelle sue prime ricerche sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado. Come detto nell'introduzione, un allievo di Klein, Carl Rodenberg produsse la serie completa di modelli che Klein mostrò in occasione della Fiera Colombiana di Chicago. Nella parte dedicata alla teoria delle superficie del corso di Geometria Superiore tenuto da Bertini nel 1882-83, le superficie cubiche trovano ampio spazio e poco dopo Bertini [1883-84] vi dedicò un'articolata

memoria, centrata sulla proprietà di possedere 45 piani tritangenti di cui egli studiò le configurazioni, basandosi sui lavori di Cremona e Sturm.

Morto Casorati nel 1890, giunse a Pavia Ernesto Pascal (1865-1940) che aveva trascorso un periodo di perfezionamento a Göttingen, dove era tornato Klein. Nel 1891-92 Pascal tenne un corso dedicato alla teoria dei gruppi di sostituzioni che gli fornì l'occasione per completare alcuni studi, di chiara impronta kleiniana, sulle connessioni tra la teoria dei gruppi e le configurazioni delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie cubica [Pascal, 1892a, b].

6. – La superficie romana di Steiner

Fu Steiner a parlare di questa particolare superficie del quart'ordine come della *sua superficie romana*, secondo quanto riportato da Weierstrass in una nota



FIGURA 11 – Modello della superficie diagonale di Clebsch su cui si scorgono le 27 rette reali.

inserita nel secondo volume delle opere del matematico svizzero. Tra il 1843 ed il 1844 Steiner, con altri matematici dell'università di Berlino come Borchard, Dirichlet e Jacobi, intraprese un viaggio in Italia [Verra 2024]. Al gruppo si unì Ludwig Schläfli, un altro matematico svizzero che ebbe in seguito rapporti epistolari con Beltrami e Casorati. Schläfli svolse anche il ruolo di interprete durante il viaggio, data l'ottima conoscenza della lingua italiana. Weierstrass ricorda anche come Steiner non pubblicò nulla su questa superficie il cui studio ricevette un impulso nel 1863 ad opera di Kummer che non solo ne mise in luce diverse proprietà ma ne fece realizzare anche un modello in gesso che rappresenta il prototipo di quello che sarà messo in commercio da Brill (Fig. 12). In coordinate cartesiane ortogonali, l'equazione della superficie riprodotta da [Kummer, 1863b] è

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2cxyz = 0,$$

con c costante.

Arrivato a Pavia nel 1876, Beltrami dovette tenere un ciclo di *Conferenze di Geometria Superiore* – otto in tutto – destinate agli allievi della Scuola Normale, di cui possediamo solo il registro con gli argomenti trattati. La sesta conferenza fu dedicata allo *Studio speciale della superficie di Steiner (superficie romana)*, in cui si soffermò su alcune delle principali proprietà, come il fatto che il piano tangente in un suo punto la tagli lungo una coppia di coniche. L'interesse di Beltrami per la superficie di Steiner non era occasionale in quanto vi ritornò più volte nel corso della carriera. In

particolare, egli dedicò una sezione della lunga memoria [Beltrami, 1879] ad applicare proprio alla superficie di Steiner i metodi analitici sviluppati nel lavoro. Egli ottenne in particolare le curve asintotiche, il cui piano osculatore in un punto coincide con il piano tangente alla superficie nello stesso punto. Si tratta di curve del quart'ordine che sono evidenziate nel modello, oltre alle tre rette doppie che si incontrano nell'origine che rappresenta un punto triplo della superficie. Oltre a Beltrami, ricordiamo che anche Francesco Gerbaldi, che insegnò Geometria a Pavia per diversi anni, dedicò un'ampia memoria alla superficie di Steiner [Gerbaldi, 1881].

7. – Dalle coniche alle ciclidi

Il motivo che spinse Charles Dupin a studiare questa classe di superficie e a dar loro il nome di ciclidi è esposto nelle *Applications de la Géométrie* [Dupin, 1822, p. 201]

Ci apprestiamo a dimostrare, anzitutto, l'esistenza di una famiglia di superficie la cui proprietà caratteristica è di avere solo dei cerchi come linee di massima e minima curvatura: è per questo motivo che chiameremo *ciclidi queste superficie*.⁽¹²⁾

Dopo aver osservato che la sfera, il cilindro ed il cono possono essere considerati dei casi degeneri di ciclidi, Dupin svolse una serie di argomenti per giustificare quale fosse la costruzione generale per ottenerle [Dupin, 1822, p. 206]

Basterà, per definire queste superficie ciclidi, vincolare una sfera dal raggio variabile ad essere sempre tangente a tre sfere fisse qualsiasi.⁽¹³⁾

Grazie a questa proprietà è possibile dimostrare che la superficie focale delle *ciclidi* di Dupin si riduce ad una coppia di coniche disposte in piani ortogonali ed aventi una i fuochi nei vertici dell'altra. Le coniche



FIGURA 12 – Due viste del modello della superficie romana di Steiner.

⁽¹²⁾ Nous allons prouver, premièrement, qu'il existe une famille de surfaces dont la propriété caractéristique est de n'avoir que des cercles pour lignes de plus grande et de moindre courbure: c'est pourquoi nous appellerons *cyclides* ces surfaces.

⁽¹³⁾ Il suffira, pour définir ces surfaces cyclides, d'assujettir une sphère, variable de rayon, à toucher constamment trois sphères fixes quelconques.

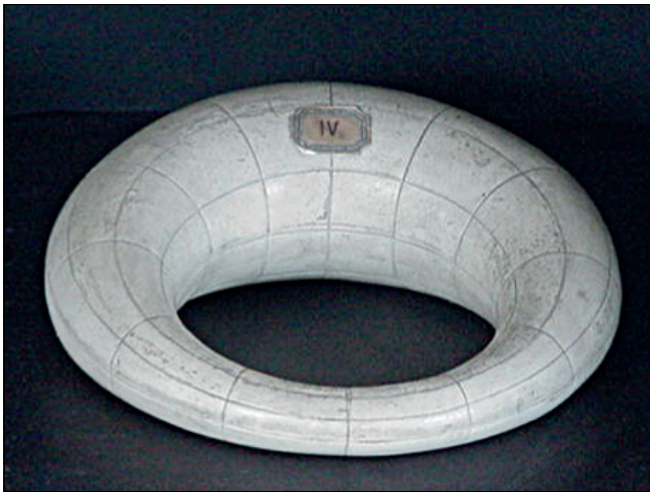


FIGURA 13 – Modello di ciclide di Dupin ad anello.

possono essere un'ellisse e un'iperbole oppure due parabole ed in quest'ultimo caso si parla di cicli di parabole. È proprio grazie a questa proprietà che le cicli di Dupin hanno trovato applicazione nella descrizione di certe tessiture di equilibrio tipiche dei cristalli liquidi smettici, a partire da un lavoro di Georges Friedel del 1922 [Stewart, 2004]. Le cicli di Dupin rappresentano un esempio di superficie *canale*, involuppo di una sfera di raggio fisso o variabile con il centro mobile lungo una curva assegnata che, in questo caso, è una conica.⁽¹⁴⁾ Una ciclide di Dupin è trasformata da un'inversione sferica in un'altra ciclide di Dupin e se si parte da un toro, una particolare ciclide di Dupin, si possono ottenere cicli di Dupin ad anello (Fig. 13), a fuso o a corno, a seconda che il toro sia generato da un cerchio il cui raggio è minore, uguale o maggiore di quello della circonferenza lungo cui si muove il suo centro.

8. – Tra fisica e geometria: la superficie delle onde di Fresnel

Con una serie di memorie pubblicate a partire dal 1816, Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) contribuì in modo decisivo al tramonto della teoria corpusco-

lare della luce a vantaggio della teoria ondulatoria che, già avanzata da Huygens ed utilizzata da altri studiosi come Eulero, non era riuscita a ridimensionare l'influenza della teoria corpuscolare che aveva trovato in Newton un efficace sostenitore. Neppure le esperienze di Thomas Young sull'interferenza erano valse a convincere appieno della superiorità della teoria ondulatoria. Fresnel diede interpretazioni soddisfacenti di fenomeni luminosi che la teoria corpuscolare non riusciva a spiegare, come la diffrazione, la polarizzazione e, per quanto ci riguarda, la birifrangenza nei mezzi cristallini, otticamente anisotropi.⁽¹⁵⁾ Il fenomeno, già noto da tempo, consiste nella scomposizione di un fascio luminoso incidente la superficie di un mezzo cristallino in due fasci dei quali uno, detto *ordinario*, segue le leggi della rifrazione mentre l'altro se ne allontana e per questo è detto *straordinario*. La superficie d'onda di Fresnel si può costruire considerando onde piane passanti per un punto P ad un dato istante in tutte le possibili direzioni e determinandone le posizioni trascorso un tempo δt prefissato: l'involuppo di tutti i fronti d'onda al termine dell'intervallo δt è la superficie d'onda di Fresnel. In coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z) essa è una superficie del quart'ordine la cui equazione ha la forma

$$r^2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - a^2(b^2 + c^2)x^2 - b^2(c^2 + a^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0$$

dove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ mentre a, b, c sono tre costanti positive legate alle possibili velocità di propagazione di un'onda piana lungo le direzioni degli assi coordinati, sovrapposti agli assi principali dell'ellissoide di elasticità caratteristico del mezzo: se $a = b = c$ l'ellissoide è una sfera ed abbiamo un cristallo otticamente isotropo; se $a = b \neq c$ il cristallo è uniassico e l'ellissoide è di rotazione; infine, se $a > b > c$ il cristallo è biassico e l'ellissoide ha gli assi di lunghezze diverse. La superficie d'onda si compone di due falde. Il caso più interessante corrisponde al cristallo biassico dove le sezioni della superficie

⁽¹⁴⁾ A margine, notiamo che a Pavia si trova un altro esempio di superficie canale: il *serpentino*, involuppo di una famiglia di sfere di raggio costante con il centro mobile su di un'elica cilindrica [Bouasse, 1911, p. 474]: si veda all'indirizzo <https://mate.unipv.it/modelli/cat-VI/fVI-29.html>

⁽¹⁵⁾ Si veda, ad esempio, [Ronchi, 1983, Cap. VII] per ulteriori ragguagli sulle vicende personali e scientifiche di Fresnel. Per un resoconto esaustivo, il testo di riferimento è [Buchwald, 1989].

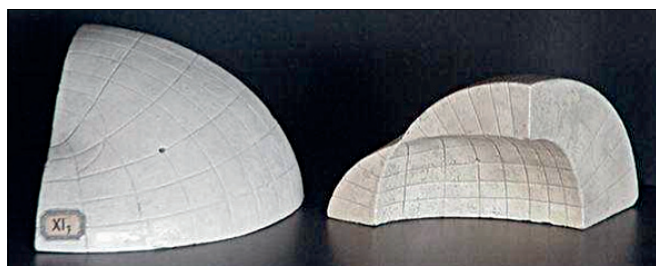


FIGURA 14 – Superficie di Fresnel relativa ad un cristallo biascico. Il modello si può aprire in modo da evidenziare le intersezioni tra le sezioni piane che determinano i quattro punti singolari della superficie.

d'onda con i piani coordinati sono una coppia di coniche: un'ellisse ed una circonferenza. In due dei piani coordinati queste coniche sono una interna all'altra ma nel piano (x, z) (per l'ordinamento scelto tra a, b e c) le coniche si intersecano in quattro punti che sono punti singolari per la superficie delle onde (Fig. 14). Un'analisi geometrica delle proprietà della superficie delle onde era spesso posta come parte integrante dello studio della propagazione delle onde piane in un mezzo cristallino.

Dopo la partenza da Pavia di Beltrami nel 1891, la cattedra di fisica matematica fu assegnata a Carlo Somigliana (1860-1955) che nel 1895-96 tenne un corso di elasticità nell'ultima parte del quale erano affrontate applicazioni all'acustica ed all'ottica: infatti, la teoria meccanica della luce studiava i fenomeni luminosi come dovuti a vibrazioni periodiche dell'etere. La Lezione 42^a del corso si apriva con questa affermazione [Somigliana, 1896, p. 337]:

Le relazioni che intercedono fra la normale alla onda ed i raggi corrispondenti si studiano con grande facilità con l'aiuto di una superficie che ora studieremo

e che è la superficie di Fresnel, la cui analisi occupò oltre due lezioni del corso.

9. – Superficie minime e a curvatura media costante

Al nome del fisico belga Joseph Plateau è legato il problema che consiste nel determinare le superficie minime dotate di un bordo assegnato. Plateau, che formulò leggi sperimentali che descrivono proprietà delle bolle di sapone, fu noto anche per un tragico incidente che lo portò a perdere gradualmente la vista dopo un esperimento di ottica nel quale osservò

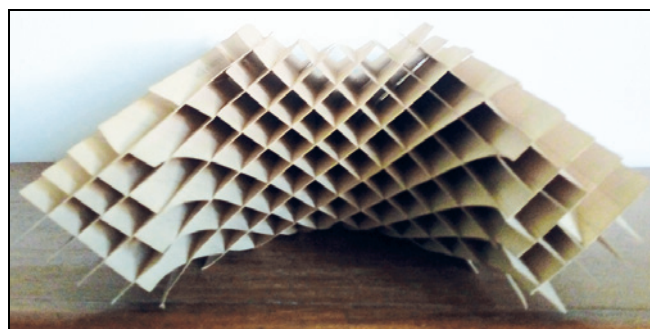


FIGURA 15 – Modello della quinta superficie di Scherk o superficie minimale di Scherk-Van der Mensbrugghe.

direttamente la luce del Sole per un tempo troppo lungo. Meno noto di Plateau ma importante per il nostro racconto fu un altro fisico belga: Gustave-Léonard van der Mensbrugghe (1835-1911) che collaborò con Plateau per più di 25 anni e ne divenne anche genero nel 1871. Van der Mensbrugghe insegnò fisica sperimentale all'università di Gand e dedicò allo studio della capillarità la maggior parte dei suoi quasi 200 lavori scientifici. Nel 1866 egli pubblicò un articolo [Van der Mensbrugghe, 1866] dove studiava una delle superficie minimali periodiche (Fig. 15) che Heinrich-Ferdinand Scherk aveva fatto conoscere nel 1835 [Scherk, 1835] e la cui equazione è

$$(3) \quad \sin Dz = \pm \sinh Dx \sinh Dy.$$

Scherk aveva presentato due delle superficie che portano il suo nome in un lavoro apparso nel 1832 che contiene la memoria con cui era stato premiato dalla Società Jablonowsky⁽¹⁶⁾ di Lipsia. Le altre tre superficie si trovano nel lavoro del 1835 e quella descritta dall'equazione (3) è detta talora quinta superficie di Scherk, visto che fu l'ultima ad essere presentata [Nitsche, 1989]. Oltre a studiarne le simmetrie, van der Mensbrugghe ne ottenne una realizzazione pratica grazie ad un opportuno telaio metallico in grado di soddisfare i principi che Plateau aveva stabilito per raggiungere lo scopo [Van der Mensbrugghe, 1866, pp. 561-562]:

Data una superficie a curvatura media nulla, si immagini di tracciare un contorno chiuso qualunque, soggetto solo a queste condizioni: 1° che delimiti una

⁽¹⁶⁾ Il principe polacco Joseph Aleksander Jablonowsky fondò la società scientifica che porta il suo nome nel 1769.

porzione finita della superficie e 2° che questa porzione non superi il limite di stabilità, se la superficie assegnata ne possiede: si pieghi un filo di ferro in modo che rappresenti esattamente il contorno chiuso in esame; ossidatelo leggermente ed immergetelo nella soluzione saponata e ritiratelo: lo troverete occupato da una lamina che rappresenta la porzione di superficie di cui si tratta. ⁽¹⁷⁾

Anche i telai necessari a realizzare i cinque tipi di superficie di Scherk furono inseriti nel catalogo Schilling.

Nella collezione si trovano anche esempi di superficie di rotazione a curvatura media costante, diversa da zero, che traggono origine da un breve lavoro del 1841 dove l'astronomo francese Charles Eugène Delaunay notò la presenza di un integrale ellittico di terza specie nell'espressione delle coordinate di un punto generico della curva generatrice in una opportuna parametrizzazione e fu per questo indotto a cercare se la curva non fosse una *specie di cicloide* (*une espèce de cycloïde*) generata da un punto P solidale ad una conica che rotola senza strisciare lungo una retta r fissa. L'intuizione di Delaunay [1841] si rivelò corretta perché egli dimostrò che, quando P coincide con il fuoco di un'ellisse o di una iperbole equilatera, la curva ottenuta, posta in rotazione lungo r , genera una superficie a curvatura media costante che è detta, rispettivamente *onduloïde* (Fig. 16) o *nodoïde*. Il risultato di Delaunay generalizza in effetti un teorema già noto per la parabola il cui fuoco, durante il puro rotolamento della parabola su una retta r , genera un arco di catenaria che a sua volta produce per rotazione completa attorno ad r una superficie a curvatura media nulla. In tempi recenti, le superficie di Delaunay hanno trovato applicazione nella teoria elastica delle membrane



FIGURA 16 – L'onduloïde, generato dalla rotazione completa della traiettoria descritta dal fuoco di un'ellisse che rotola senza strisciare su una guida rettilinea. I solchi rappresentano curve geodetiche.

lipidiche di cui possono rappresentare, sotto opportune condizioni, delle forme di equilibrio ottenute come punti stazionari del funzionale di Helfrich

$$\frac{k}{2} \int (2H + c_0)^2 dA + \Delta p \int dV + \lambda \int dA$$

nel quale k è una costante elastica, H la curvatura media della superficie che rappresenta la membrana lipidica, c_0 una costante detta curvatura spontanea della membrana, introdotta per descrivere membrane il cui stato indistorto non è piano, Δp è la differenza di pressione tra l'esterno e l'interno della membrana e λ

⁽¹⁷⁾ Une surface à courbure moyenne nulle étant donné, concevez-y tracé un contour fermé quelconque, astreint aux seules conditions 1° qu'il circonscrive une portion finie de la surface et 2° que cette portion n'excède pas la limite de stabilité, si la surface donnée a de telles limites: ployez un fil de fer de manière qu'il figure exactement le contour fermé en question; oxydez-le légèrement, plongez-le dans le liquide glycérique et retirez-le, vous le trouverez occupé par un lame représentant la portion de surface dont il s'agit.

uno sforzo di tensione: questi ultimi due parametri si possono vedere come dei moltiplicatori di Lagrange legati all'incomprimibilità ed all'instendibilità della membrana [Ou Yang, Liu, Xin, 1999].

10. – Le funzioni ellittiche tra teoria ed applicazioni

Le funzioni ellittiche hanno costituito l'oggetto di moltissime ricerche nel XIX secolo sia dal punto di vista teorico – soprattutto a partire dai lavori di Abel e Jacobi che hanno mostrato l'importanza di ambientarne lo studio in campo complesso – sia dal punto di vista delle applicazioni. Non sorprende allora che le funzioni ellittiche furono oggetto di diversi corsi di Analisi Superiore tenuti a Pavia: nei registri delle lezioni di Felice Casorati si ricava che spesso ne esponeva la teoria prendendo spunto soprattutto dai *Fundamenta Nova* di Jacobi. Dalla relazione sull'attività della Scuola Normale redatta da Bertini quando ne era direttore, sappiamo che nel 1887-88 Somigiana tenne un corso sulle funzioni ellittiche secondo l'approccio di Weierstrass. Ora, in quegli anni Casorati chiedeva agli studenti che da Pavia ottenevano un posto di perfezionamento in matematica a Berlino, di riportare in patria la versione aggiornata degli appunti di Weierstrass ed in particolare, grazie ad Alfredo Capelli, riuscì a far acquistare dalla Biblioteca Universitaria una traduzione in italiano delle lezioni sulle funzioni ellittiche che servì da spunto a Somigiana.

Anche Pascal dedicò almeno in parte il corso di Analisi superiore del 1894-95 alle funzioni ellittiche. Il modello in gesso riprodotto in Fig. 17 rappresenta



FIGURA 17 – Rappresentazione della funzione amplitudine ottenuta dall'inversione dell'integrale ellittico di prima specie.

la funzione “amplitudine” $\varphi = \varphi(u, k)$ ottenuta dall'inversione dell'integrale ellittico di prima specie

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

ed interpretando (k, u, φ) come coordinate cartesiane ortogonali di un punto dello spazio. I solchi sulla superficie rappresentano i profili di alcune curve $\varphi = \varphi(u, k)$ per valori fissati di $k \neq 1$. In particolare si distingue il profilo della retta $\varphi = u$ per $k = 0$. Quando $|k| < 1$ le curve a k costante sono periodiche con periodo a sua volta dipendente da k e per il loro tracciamento era possibile appoggiarsi alle tavole numeriche pubblicate da Legendre. Quando $|k| > 1$ la superficie è troncata perché si dovrebbe estendere all'infinito.

Per quanto riguarda le applicazioni delle funzioni ellittiche, la collezione conserva due modelli degni di nota: la catenaria sferica ed il pendolo sferico.

Nel 1865, a Berlino, Wilhem Biermann difese una tesi dedicata a risolvere alcuni problemi di meccanica che [Biermann, 1865, p. 5]

possono essere indagati con il solo utilizzo delle funzioni ellittiche.⁽¹⁸⁾

Questi problemi erano per Biermann anche un'occasione per mostrare l'utilità dei metodi di Weierstrass (*praeceptoris carissimi*), richiamati nella sezione iniziale della tesi. Biermann affrontò due problemi: determinare il profilo di equilibrio di un filo omogeneo pesante, adagiato su una superficie di rotazione, e studiare il moto di un punto sotto l'azione di una forza centrale di potenziale del tipo mr^{-k} , con $k = 3, 4, 6$. Rispetto al tradizionale problema della forma di equilibrio di una catenaria libera, entra in gioco la reazione vincolare, ipotizzata perpendicolare alla superficie di appoggio il cui asse di rotazione è diretto parallelamente alla forza peso.⁽¹⁹⁾ Ricavate le equazioni generali, Biermann

⁽¹⁸⁾ functionum ellipticarum sola ope penitus possint perspicui.

⁽¹⁹⁾ Biermann non fu il primo a studiare la catenaria sferica. Possiamo ad esempio citare il lavoro di Étienne Bobillier [1829-30].

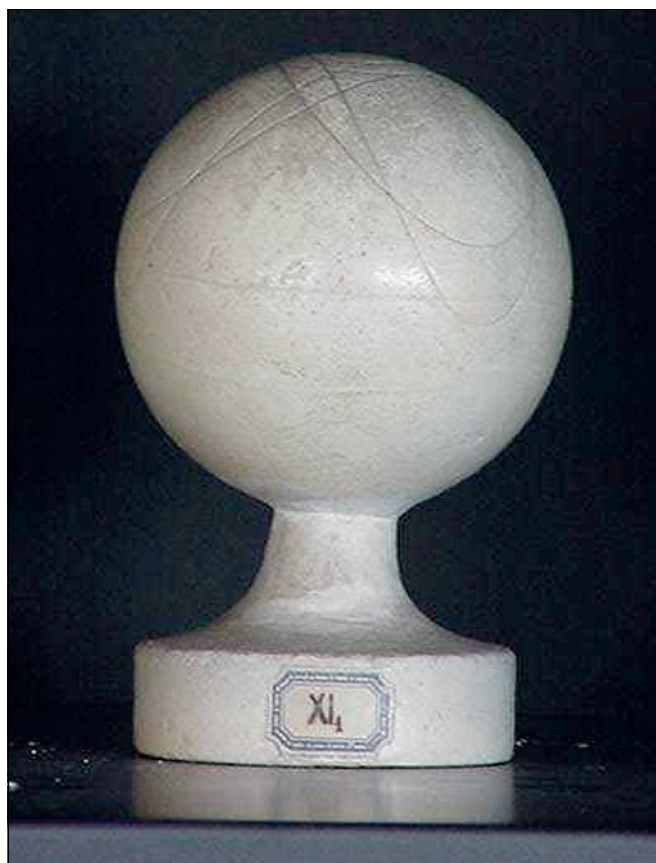


FIGURA 18 – Le scanalature visibili sulla superficie della sfera rappresentano profili equilibrio di fili pesanti appoggiati senza attrito.

le specializzò al caso di una superficie sferica di raggio a , ottenendo il legame differenziale

$$ds = \frac{(z+h)dz}{\sqrt{(1-z^2)(z+h)^2 - a^2}}$$

tra la lunghezza d'arco s della catenaria e la quota z , con h una costante di integrazione, ottenuta dalla proiezione delle equazioni indefinite di equilibrio lungo la tangente alla catenaria. Biermann trattò quindi separatamente i casi $h = 0$ ed $h \neq 0$, discutendo l'andamento qualitativo delle soluzioni. Sulla sfera rappresentata in Figura 18 sono segnate le tracce dei profili della catenaria. La seconda applicazione delle funzioni ellittiche riguarda il pendolo sferico. Il modello originalmente non fu accompagnato da un opuscolo esplicativo ma si rimandava per i chiarimenti alla tesi dello studente che lo aveva realizzato, Ludwig Schleiermacher, che difese la propria tesi di dottorato ad Erlangen nel 1878. Qui

Schleiermacher applicava le funzioni ultraellittiche⁽²⁰⁾ alla soluzione, con il metodo di Hamilton e Jacobi, delle equazioni di moto di un punto materiale libero di muoversi sotto l'azione della gravità sulla superficie di un ellissoide di rotazione il cui asse giace lungo la direzione della forza peso. Parametrizzato l'ellissoide

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1$$

ponendo

$$x = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - z^2} \cos \varphi \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - z^2} \sin \varphi$$

e ridotto il problema alle quadrature, la parte tecnicamente onerosa del lavoro di Schleiermacher è la trasformazione degli integrali che forniscono il tempo t e l'angolo φ in funzione della coordinata z lungo l'asse dell'ellissoide.

Nella sezione VIII della tesi Schleiermacher trattò il caso particolare del moto su una superficie sferica per il quale vi sono alcune semplificazioni nella struttura della soluzione, a cominciare dal fatto che le funzioni coinvolte sono ellittiche. Queste semplificazioni diventano particolarmente significative quando [Schleiermacher, 1878, p. 30]

il punto pesante si muove lungo una traiettoria che è tangente all'equatore della sfera⁽²¹⁾

o, nel modello, della *semisfera*. Schleiermacher si era chiesto, come già aveva fatto Lagrange [1815, p. 196], se la traiettoria potesse chiudersi. La soluzione esplicita in termini di funzioni ellittiche permetteva di rispondere negativamente alla domanda quando la velocità iniziale è finita. Come riportato nella descrizione aggiunta nel catalogo Schilling [1911, p. 162], la traiettoria riprodotta corrisponde ad un valore sufficientemente alto per la velocità iniziale da far sì che la traiettoria appaia sostanzial-

⁽²⁰⁾ Si tratta di un tipo particolare di funzioni iperellittiche nelle quali si inverte un integrale del tipo $\int_{z_0}^z \frac{a + bt^2}{\sqrt{p(t)}} dt$, con $p(t)$ un polinomio di quinto grado.

⁽²¹⁾ Sich der schwere Punkt auf einer Bahn bewegt, welche den Aequator der Kugel berührt.



FIGURA 19 – Traccia del moto descritto dal pendolo sferico nel caso in cui la velocità iniziale sia molto grande in modulo e diretta tangenzialmente all'equatore.

mente chiusa (Fig. 19). Inoltre Schleiermecher ha riprodotto nel modello anche il luogo dei punti più bassi raggiunti nel corso del moto, al variare della velocità iniziale.

10.1 – Il “bottoncino con tre fori”

Un breve cenno a questa superficie (Fig. 20) solo per ricordare che Luigi Brusotti, per lungo tempo do-



FIGURA 20 – Modello di superficie di genere $p = 3$ riprodotto in un articolo di Luigi Brusotti.

cente di geometria a Pavia, ne inserì una fotografia nell'articolo su *Poligoni e poliedri* scritto per l'Enciclopedia delle matematiche elementari [Brusotti, 1937, p. 295] per illustrare il concetto di genere p di una superficie nel caso specifico dei poliedri *bilateri*, cioè con superficie orientabile.

11. – Il modello di Beltrami

Anche se molto è stato scritto sulla cuffia di Beltrami, le cui fotografie sono apparse più volte sia in articoli di rivista che in monografie, non è possibile passarla sotto silenzio.⁽²²⁾ Come è noto si tratta di un pezzo unico che rappresenta una superficie pseudosferica che serve da modello per una porzione del piano iperbolico. Beltrami la realizzò nel 1869, all'indomani della pubblicazione del *Saggio* [Beltrami, 1868] inviandola a Luigi Cremona con il quale aveva avuto scambi di idee sulla geometria non euclidea durante la comune permanenza a Bologna. La lettera di accompagnamento, oltre a presentare i dettagli tecnici della costruzione, contiene minuziose istruzioni su come trattare il delicato manufatto e mostra come Beltrami avesse in animo di far realizzare altri modelli usando materiali più robusti [Boi, Giacardi, Tazzioli, 1998, pp. 201-203]. Il modello aveva agli occhi di Beltrami una duplice funzione: verificare “sensibilmente” i risultati ottenuti nel *Saggio* e fornire spunti per ottenere risultati da dimostrare con rigore in un secondo momento [Beltrami, 1872].

Cremona non tenne con sé il modello di Beltrami quando si trasferì a Roma per assumere la guida della Scuola di Applicazione per Ingegneri. Esso giunse a Felice Casorati che lo mostrò in pubblico il 16 novembre del 1873, in occasione del discorso di inaugurazione per l'inizio dell'anno accademico. Fu proprio in questa circostanza che il modello ricevette il nome di *cuffia* da parte di alcuni goliardi sulle colonne di un foglio satirico, *La Canaglia*, dove fu ospitata la parodia dissacrante del discorso di Casorati:

L'università *ticinese* (...) si è aperta, o almeno è stata dichiarata aperta alla presenza dei membri in-

⁽²²⁾ Si vedano le immagini all'indirizzo:
<https://mate.unipv.it/modelli/cat-XIV/fXIV-1.html>

vitati, i quali sedevano al posto d'onore, nella Aula Magna, seminata di curiosi e vuota di gentil sesso. Il facondo professore Casorati lesse un lungo discorso di cui diamo le parti più salienti:

Inclito pubblico e valorosa guarnigione. L'ignoto, voi lo sapete, è un x , il quale sommato colla radice cubica di y , può dare una quantità infinitesima k , che moltiplicata in r , dà per risultato a z . (...)

Signori! Quando $a b c d e f g h i l m n o p q r s t u v z$ stanno da sole, voi avete delle quantità, alle quali manca la potenzialità di x y w k. Ma fra l'unità dello zero e il vuoto di un ripieno corre una proporzione o h diviso due, che vale a misurare il numero delle forze consistenti in una sfera quadrata, ossia nel circolo che ha per punto metrico una circonferenza misurata 16. (...) Osservate lo spazio di questo 16 – Esso è largo sufficientemente, perché vi possa penetrare una leva q , la quale agisca con forza repellente contro il fondo della figura.

Così resta spiegato il fenomeno della cuffia di mia nonna (*il prof. Casorati fa vedere agli astanti la cuffia in questione*) che applicata colla potenza m quattro sul capo calvo di un raffreddato, elide l' y degli sternuti e rimette l' x della tosse (*Segni d'approvazione delle sedie vuote*).

Insomma, un brano di satira di costume di second'ordine ma tanto è bastato per passare alla storia. Superfluo dire che il discorso di Casorati [1873] era più profondo, trattandosi di una conferenza dedicata ai fondamenti della geometria e, in particolare, alle idee portanti di Gauss e Riemann nello studio delle superficie.

12. – Conclusioni

Come le opere d'arte, i modelli geometrici hanno una storia che permette di apprezzare la ricchezza delle teorie che ne stanno alla base, il lavoro di chi li ha realizzati, l'attenzione pedagogica di chi se ne è servito come ausilio per facilitare l'apprendimento. Sono valori sempre validi che rendono le collezioni presenti in molti Dipartimenti una risorsa da attualizzare, coniugandola con gli strumenti che la tecnologia mette oggi a nostra disposizione.

BIBLIOGRAFIA

[Beltrami, 1868]

E. BELTRAMI: *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*. Giornale di Matematiche, **6**, 284-312. In: E. Beltrami: *Opere Matematiche*, vol. I, Hoepli, Milano, (1902), pp. 374-405.

[Beltrami, 1872]

E. BELTRAMI: *Teorema di geometria pseudosferica*. Giornale di Matematiche, **10**, 53. In: E. Beltrami: *Opere Matematiche*, vol. II, Hoepli, Milano, (1904), pp. 392-393.

[Beltrami, 1879]

E. BELTRAMI: *Ricerche di geometria analitica*. Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, **10** (S. III), 233-312. In E. Beltrami: *Opere Matematiche*, Tomo III, Hoepli, Milano, 1911, pp. 168-234.

[Bertini, 1872]

E. BERTINI: *Sulla curva gobba di 4° ordine e 2ª specie*. Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, **5** (S. III), 622-638.

[Bertini, 1883-84]

E. BERTINI: *Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3° ordine*. Annali di Matematica pura ed applicata, **12**, S. II, 301-346.

[Bianchi, 1902]

L. BIANCHI: *Lezioni di Geometria Differenziale*, Vol. I. Spoerri, Pisa.

[Biermann, 1865]

W. BIERMANN: *Problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta*. Schulze, Berlin.

[Bobillier, 1829-30]

E. BOBILLIER: *De l'équilibre de la chaînette sur une surface courbe*. Annales de Mathématiques pures et appliquées, **20**, 153-175.

[Boi, Giacardi, Tazzioli, 1998]

L. BOI, L. GIACARDI, R. TAZZIOLI: *La Découverte de la Géométrie non Euclidienne sur la pseudosphère. Les Lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881)*. Blanchard, Paris.

[Bouasse, 1911]

H. BOUASSE: *Cours de mathématiques générales*. Delagrave, Paris.

[Brusotti, 1937]

L. BRUSOTTI: *Poligoni e Poliedri*. In: Enciclopedia delle matematiche Elementari, vol. II, parte I. L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli, curatori. Hoepli, Milano, pp. 255-322.

[Buchwald, 1989]

J. Z. BUCHWALD: *The rise of the wave theory of light*. The University of Chicago Press, Chicago.

[Capélo, Ferrari, 1982]

A.C. CAPÉLO, M. FERRARI: *La "cuffia" di Beltrami: storia e descrizione*. Bollettino di storia delle scienze matematiche, **2**, 233-247.

[Casorati, 1873]

F. CASORATI: *Discorso per l'inaugurazione degli studi universitari a Pavia il 16 novembre 1873*. In: F. Casorati: *Opere*, Vol. I. Cremonese, Roma, 1951, pp. 33-51.

[Cayley, 1873]

A. CAYLEY: *On Dr. Wiener's model of a cubic surface with 27 real lines; and on the construction of a double-sixer*. Cambridge Philosophical Transactions, Vol. VIII, **12**, 366-383. In: *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge University Press, Cambridge, 1895, pp. 366-384.

[Delaunay, 1841]

C. DELAUNAY: *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*. Journal de mathématiques pures et appliquées, **6**, 309-315.

- [Dupin, 1822]
C. DUPIN: *Applications de géométrie et de mécanique à la marine, aux ponts et chaussées, etc.* Bachelier, Paris.
- [Dyck, 1892-93]
W. DYCK: *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* (1892). Nachtrag (1893). München, Wolf & Sohn.
- [Finsterwalder, 1885]
S. FINSTERWALDER: *Ueber die Fadenconstruction des Ellipsoïdes.* Mathematische Annalen, **25**, 546-556.
- [Friedman, Krauthausen, 2022]
F. M. RIEDMAN, K. KRAUTHAUSEN (Eds.): *Model and Mathematics: From the 19th to the 21st Century.* Birkhäuser, Chun, Switzerland.
- [Gerbaldi, 1881]
F. GERBALDI: *La superficie di Steiner studiata sulla sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche.* Viglardi, Torino.
- [Graves, 1841]
C. GRAVES: *Two Geometrical Memoirs on the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics by M. Chasles.* Grant and Bolton, Dublin.
- [Hilbert, Cohn-Vossen, 1932]
D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN: *Anschauliche Geometrie.* Springer, Berlin.
- [Klein, 1894]
F. KLEIN: *Lectures on Mathematics.* MacMillan, New York.
- [Kummer, 1860]
E. E. KUMMER: *Allgemeine Theorie der gradliniger Strahlensysteme.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **57**, 189-230.
- [Kummer, 1863A]
E. E. KUMMER: *Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen.* Monatsberichte der Königlich-Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 324-336.
- [Kummer, 1863B]
E. E. KUMMER: *Gypsmodell der Steinerschen Fläche.* Monatsberichte der Königlich-Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 539.
- [Lagrange, 1815]
J.-L. LAGRANGE: *Mécanique analytique.* Tome Second. Courcier, Paris.
- [Müller, Kruppa, 1936]
E. MÜLLER, E. KRUPPA: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* Vierte Auflage. Teubner, Leipzig und Berlin.
- [Nitsche, 1989]
J.J.C. NITSCHKE: *Minimal Surfaces.* Volume I. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- [Odenhal, Stachel, Glaeser, 2020]
B. ODENHAL, H. STACHEL, G. GLAESER: *The Universe of Quadrics.* Springer, Berlin.
- [Ou Yang, Liu, Xin, 1999]
Z.C. OU-YANG, J.-X. LIU, Y.-Z. XIN: *Geometric Methods in the Elastic Theory of Membranes and Liquid Crystals Phases.* World Scientific, Singapore.
- [Palladino, 1997]
F. PALLADINO (con la collaborazione di A. De Sio e P. De Vivo): *Uno specimen dei giacimenti italiani di modelli e strumenti matematici. Il Nachlass dell'Università di Pavia.* Memorie dell'Istituto Lombardo-Accademia di Scienze e Lettere. Classe di Scienze Matematiche e Naturali, **29**, 315-374.
- [Palladino, Palladino, 2009]
F. PALLADINO, N. PALLADINO: *I modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle matematiche superiori pure ed applicate.* Ratio Mathematica, **19**, 31-88.
- [Pascal, 1892a]
E. PASCAL: *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni.* Annali di Matematica pura ed Applicata, **20**, 163-226.
- [Pascal, 1892b]
E. PASCAL: *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine e sui gruppi ad esso isomorfi. (Memoria 2ª).* Annali di Matematica pura ed Applicata, **20**, 269-332.
- [Polo-Blanco, 2007]
I. POLO-BLANCO: *Theory and history of geometric models.* University of Gröningen.
- [Poudra, 1860]
N.-G. Poudra: *Traité de perspective-relief.* Corréard, Paris.
- [Rodenberg, 1878]
C. Rodenberg: *Zur Classification der Flächen dritter Ordnung.* Mathematische Annalen, **14**, 46-110.
- [Rohn, 1881]
K. ROHN: *Die Verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche.* Mathematische Annalen, **18**, 99-159.
- [Ronchi, 1983]
V. RONCHI: *Storia della luce. Da Euclide ad Einstein.* Laterza, Bari.
- [Salmon, 1869]
G. SALMON: *A Treatise on Conic Sections.* Fifth Edition. Longmans, Green, Reader, and Dyer, London.
- [Scherk, 1835]
H.F. SCHERK: *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **13**, 185-208.
- [Schilling, 1911]
M. SCHILLING: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht.* Siebente Auflage. Schilling, Leipzig.
- [Schleiermacher, 1878]
L. SCHLEIERMACHER: *Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid und ultraeliptische Integrale dritter Gattung.* Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde der hohen philosophischen Facultät, Erlangen.
- [Somigliana, 1896]
C. SOMIGLIANA: *Lezioni di Fisica Matematica.* Raccolte dallo studente Marolli Bruto. Marelli, Pavia.
- [Stewart, 2004]
I.W. STEWART: *The static and dynamic continuum theory of liquid crystals.* Taylor & Francis, London.

[Rowe, 2022]

D. E. ROWE: *Models from the Nineteenth Century Used for Visualizing Optical Phenomena and Line Geometry*. In [Friedman, Krauthausen, 2022, pp. 177-202].

[Staude, 1882]

O. STAUDE: *Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides*. *Mathematische Annalen*, **20**, 147-184.

[Van der Mensbrugghe, 1866]

G. VAN DER MENSBRUGGHE: *Discussion et réalisation expérimentale d'une surface particulière a courbure moyenne nulle*. *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, **21** (S.II), 552-566.

[Verra, 2024]

A. VERRA: *Matematici e Grand Tour. Jakob Steiner e la superficie romana*. *Matematica, Cultura e Società*, **9**, 39-52.



Riccardo Rosso

Riccardo Rosso è professore associato di Matematiche Complementari presso il Dipartimento di Matematica "F. Casorati" dell'Università di Pavia dove insegna, tra l'altro, Storia della Matematica. La sua attività di ricerca riguarda soprattutto la storia della matematica del XIX secolo.