
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SILVIO GRECO, PAOLO VALABREGA

Ricordo di Rosario Strano

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 9
(2024), n.1, p. 75–84.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_1_75_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_1_75_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Ricordo di Rosario Strano

SILVIO GRECO

Accademia delle Scienze di Torino, Politecnico di Torino

E-mail: silvio.greco@polito.it

PAOLO VALABREGA

Accademia delle Scienze di Torino, Politecnico di Torino, Accademia Peloritana dei Pericolanti

E-mail: valabrega.p@gmail.com

Sommario: *Questo articolo è scritto da due colleghi di Rosario Strano a lui molto vicini e suoi amici stretti per tanti anni, Silvio Greco, che lo ha indirizzato nelle sue prime ricerche, e Paolo Valabrega, che ha lavorato in settori dell'Algebra commutativa affini ai suoi.*

In esso si presentano in forma semplice e quasi priva di formule i principali risultati scientifici ottenuti da Strano sugli anelli henseliani, le curve e le loro sezioni piane, mettendo in evidenza l'originalità del suo approccio che, partendo da considerazioni sulle sizigie, permette di ottenere molteplici e profondi risultati riguardanti il Lemma di Laudal, le curve intersezioni complete, il genere massimo di una curva.

Aggiungiamo anche qualche aneddoto che mette in evidenza le sue notevoli qualità umane.

Abstract: *This recollection of Rosario Strano has been written by two colleagues and strict friends of his, Silvio Greco, who was his first advisor after the degree, and Paolo Valabrega, whose papers in Commutative Algebra are close to his.*

The authors present almost without formulas the main results obtained by Strano on henselian rings, curves and their plane sections, focusing on his original approach, mainly based on a fine study of the syzygies, which reaches a variety of deep results concerning the Laudal Lemma, the curves that are complete intersections of two surfaces, the maximal genus of a curve.

A few anecdotes concerning Strano's life show his humanity.

1. – Introduzione

Rosario Strano, Saro per amici e colleghi (e in questo ricordo), è nato a Catania il 1° dicembre 1944 ed è mancato il 12 febbraio 2022.

Le sue capacità di studente brillante si manifestano già in Liceo; un divertente aneddoto riferito da Peppino Paxia, suo compagno di Università, illumina le sue doti e il suo stile.

Con Saro fummo amici fin dai primi giorni di università. Studiavamo assieme, si fa per dire. Una giornata di studio tipo si svolgeva così. Innanzitutto

l'invito a pranzo in casa Strano dove preparavano varie specialità a cui non era pensabile sottrarsi e grandi calici di vino che il padre di Saro mi riempiva fino all'orlo e che dovevo non solo bere ma dovevo dire che era un vino speciale perché era prodotto nella loro campagna. A questo punto interveniva Saro che non vedeva l'ora di andare a studiare! Andavamo nello studio, io ero quasi barcollante, e cominciamo. Avevamo Fisica, Analisi e Geometria. Ed allora Saro cominciava a sfogliare il libro di Analisi: "va bene questo è ovvio", "questo teorema ricordi il Professore lo fece in due battute", "questo si fa per induzione" e cose similari. Dopo circa tre o quattro minuti avevamo finito lo studio dell'Analisi. Dopodiché continuavamo senza sosta per completare con le altre materie. Ovviamente con lo stesso stile. Finito lo studio, andavamo fuori in giro alla ricerca di biliardi e altri vari passatempi: stavamo a bighellonare per

Accettato: il 20 marzo 2024.

ore e Saro ogni tanto ripeteva: “che bella studiata che abbiamo fatto”. Io ero molto contrariato perché secondo me ancora non avevamo cominciato e me ne volevo tornare a Catania perché volevo andare a studiare per davvero ed anche perché avevo tre o quattro colleghi che mi aspettavano per studiare con me. Queste giornate dello studio ad Acireale le ricordo come giornate fra le più faticose della mia vita.

Le qualità di Saro, ben note a chi lo ha conosciuto, erano molteplici: oltre a essere dotato di grande intelligenza, matematica ma non solo, era schivo e non competitivo, poco desideroso di mettersi in mostra o vantarsi, di poche parole ma con notevole senso dello humor, disponibile con tutti, pacato ed equilibrato, e aveva un alto senso della famiglia. A Catania Saro si laurea nel 1966 in Matematica con una tesi di Geometria Algebrica su scioglimenti di singolarità, avendo come relatore il professor Giovanni Dantoni. Ma le sue ricerche si spostano presto grazie all'incontro con Silvio Greco. Si tratta di un corso CIME di Algebra commutativa, organizzato da Paolo Salmon a Varenna nel 1971, in cui è presente David Buchsbaum, amico di Paolo Salmon e professore alla Brandeis University. L'incontro con Silvio Greco cambierà la vita scientifica di Saro, e anche di tutto il gruppo degli algebristi catanesi, oltretutto, indirettamente, dei colleghi messinesi. In effetti Silvio Greco propone a lui e agli altri giovani catanesi (Paxia, Ragusa, Maggioni, Giuffrida) nuove tematiche di ricerca, riguardanti questioni di Algebra commutativa e omologica, che approderanno in seguito anche alla Geometria algebrica. Saro si rivela subito particolarmente acuto e profondo, diventando presto non solo indipendente, ma leader nelle ricerche algebriche catanesi. I suoi primi lavori riguardano il tema su cui già si era cimentato Silvio Greco, gli anelli henseliani, sul quale produce nuovi e apprezzati risultati (un paio di lavori sono in collaborazione con Greco stesso). Il successivo periodo di visita all'Università di Brandeis gli permette di incontrare David Buchsbaum e aprire i suoi interessi a questioni omologiche, in particolare di acquistare padronanza delle sizigie, il che gli permetterà anche di trattare, con un approccio originale, questioni difficili di Geometria algebrica.

Una descrizione tecnicamente accurata di tutti i lavori di Saro è al di fuori degli scopi di questo

articolo (e di questa rivista). Cerchiamo quindi di presentarne alcuni (concretamente: quelli che si prestano o che siamo capaci di presentare) in modo elementare e intuitivo (nonché impreciso), e di dare qualche utile indicazione bibliografica per chi volesse approfondire ulteriormente.

La bibliografia che proponiamo è divisa in due parti. Con la numerazione [1], [2], ... elenchiamo i lavori di Saro, con le sigle [X], [AB], ... gli altri lavori citati.

I lavori di Saro si possono, volendo semplificare, dividere in due gruppi:

- Anelli e schemi henseliani,
- Curve e loro sezioni piane.

Il secondo gruppo contiene lavori su

- Lifting,
- Intersezioni complete,
- Maximal rank,
- Maximal genus,
- Liaison e biliaison.

2. – Primo gruppo di lavori su anelli e schemi henseliani.

Fino all'85 gli interessi di Saro riguardano gli anelli henseliani e le loro applicazioni geometriche.

Questa tematica ha avuto un certo sviluppo tra gli anni 50 e 80.

Partendo dal classico *Lemma di Hensel* (inizio '900) i giapponesi G. Azumaya e M. Nagata hanno fondato la teoria degli anelli locali henseliani e della henselizzazione, confluita nel libro [N] di Nagata e ripresa negli “*Éléments*” di A. Grothendieck [EGA IV4]. Questa teoria include anche lo studio dei campi valutati henseliani (in realtà il *Lemma di Hensel* originario nasce proprio in questo ambito, con lo studio dei numeri p -adici).

Per una buona introduzione all'argomento si può vedere il cap 7 di [E] o navigare cercando “Hensel Lemma” e/o “Henselian ring”. Qui ci limitiamo a qualche cenno per cercare di inquadrare l'argomento.

Un anello locale (cioè un anello commutativo A con un solo ideale massimale m) si dice henseliano se ogni polinomio a a coefficienti in A del tipo $a + bT + \dots$ con a in m e b non in m ha una radice in A (cioè se per esso vale il *Lemma di Hensel*).

Si dimostra che ogni anello locale A è contenuto in un minimo anello locale henseliano hA , denominato *henselizzazione* di A .

Cerchiamo di illustrare l'idea con un semplice esempio. Consideriamo l'insieme A delle funzioni razionali reali nella variabile X , definite nell'origine. Si tratta di un anello locale il cui ideale massimale è costituito dalle funzioni che si annullano nell'origine.

Sviluppando in serie gli elementi di A si può identificare A con un sottoanello di $R[[X]]$, l'anello delle serie formali a coefficienti reali. Quest'ultimo anello contiene due sottoanelli particolarmente interessanti: l'anello C delle serie convergenti nell'origine e l'anello B costituito dagli sviluppi in serie dalle funzioni definite implicitamente da polinomi in T a coefficienti in A . In questa situazione si dimostra che A non è henseliano mentre B, C e $R[[X]]$ lo sono.

Ma la cosa più importante è che B è l'henselizzazione di A . Quest'ultima proprietà è di fatto il punto centrale: in generale l'henselizzazione si può pensare come l'insieme delle funzioni definite implicitamente da polinomi.

Successivamente la teoria è stata estesa alle coppie (A, a) costituite da un anello commutativo A e da un suo ideale a , indipendentemente in Francia e in Germania est ([Laf], [Ra], [KPR]).

In Italia l'argomento è stato oggetto del ciclo di seminari [Gr] nell'ambito del corso CIME "Categories and Commutative Algebra" del 1971. In quella occasione iniziò il coinvolgimento di Saro.

Ricordo di SG. Durante il corso Saro e i colleghi catanesi Alfio Ragusa, Renato Maggioni e Peppino Paxia mi chiesero consigli su cosa studiare. Fui preso alla sprovvista, ma fortunatamente era da poco uscito il bel libro di Algebra Commutativa [AM] e ne raccomandai la lettura. Dopo alcuni mesi Saro mi scrisse: avevano studiato tutto il libro e mi invitavano a Catania. Avevo dimenticato tutto e rimasi piacevolmente sorpreso. Nella mia visita proposi alcuni problemi di Algebra Commutativa centrati quasi tutti sugli anelli henseliani. In breve Saro produsse i primi lavori [2], [4], [5] e [6] sulla henselizzazione di certi tipi di anelli e sui corpi henseliani. Anche gli altri, a cui presto si aggiunse Salvino Giuffrida, cominciarono a produrre. Si era formato un gruppo di valore, di cui Saro era il leader indiscusso. Rilevante fu un primo salto di qualità di Saro con il lavoro [3] riguardante le algebre di Azumaya e il gruppo di Brauer: qui Saro dimostra un risultato atteso ma tutt'altro che facile, che io avevo affrontato senza successo.

Le problematiche diventano più complesse e i risultati più profondi durante e dopo il suo soggiorno presso l'Università di Brandeis (1975-76), dove Saro ha modo di discutere a fondo, come abbiamo detto, con D. Buchsbaum. Qui le ricerche di Saro assumono anche una notevole connotazione geometrica e coomologica, anche in collegamento con la scuola francese del periodo (A. Grothendieck, J.P. Serre, C. Chevalley e molti altri).

Infatti come si vede ad esempio in [EGA IV4] gli anelli locali henseliani forniscono validi strumenti per lo studio fine di un punto di una varietà algebrica e dei suoi intorni infinitesimi, collegandosi al concetto tecnicamente noto come *topologia étale*.

Le coppie henseliane permettono di estendere le idee precedenti allo studio delle sottovarietà di dimensione positiva, fornendo un analogo della nozione di *intorno tubolare*. In questo ambito si collocano i lavori [7], [8], [13] e [15] contenenti profondi risultati su vari tipi di coomologia. Vanno segnalati inoltre i nuovi contributi alla teoria del gruppo di Brauer (molto studiata da A. Grothendieck e collaboratori, vedere ad es [Gro]). Questi lavori hanno avuto un certo seguito, ad esempio [13] e [15] sono citati da molti autori, tra i più recenti [AHR] e [BC].

Forse l'oggetto geometrico più interessante collegato ad una coppia henseliana è lo *schema henseliano affine*. Questo concetto è stato introdotto dal giapponese H. Hironaka [Hi] e sviluppato da H. Kurke e collaboratori nel libro [KPR]. Nel lavoro [12] in cui il contributo di Saro è fondamentale, vengono provati due teoremi di base per la teoria riguardanti i fasci quasi coerenti.

Ricordo di SG. Negli anni '70 vi era un certo interesse per gli schemi henseliani e qualcuno arrivò perfino a definirli "la geometria del futuro". Questo mi spinse ad approfondire l'argomento: ai fondamenti della teoria mancavano ancora due risultati, il cui enunciato era ovvio (i cosiddetti teoremi A e B, ben noti in situazioni simili). Mi misi al lavoro procedendo speditamente finché non mi trovai di fronte ad un muro per me invalicabile. Era naturale coinvolgere Saro ed ebbi la fortuna di vederlo in azione da vicino: aggirò il muro con un'idea incredibile, completamente fuori dalle procedure usuali. E se il lavoro è andato in porto il merito è quasi tutto suo.

Il successivo lavoro [14] presentato al convegno di Trento del 1981 contiene ulteriori risultati sui fondamenti della teoria.

La tematica “henseliana” è stata accantonata per alcuni decenni, ma sembra aver ripreso interesse in lavori più recenti, anche legati alla teoria degli *stacks*, vedere ad esempio i già citati [AHHR] e [BC] e inoltre [Ka], [CHHKPS] e [TT].

3. – Secondo gruppo di lavori su curve e loro sezioni piane.

Terminato il periodo henseliano, a partire dall’86-87, l’attenzione di Saro si sposta sullo studio di problemi di Geometria Algebrica riguardanti le curve dello spazio proiettivo complesso a tre dimensioni e le loro sezioni piane. Ricordiamo in proposito che il *grado* d della curva C è il numero di punti dell’intersezione di C con un piano che la tagli in punti distinti e che, mentre una curva piana ha sempre una sola equazione, nello spazio a tre dimensioni per definire C sono necessarie due o più equazioni (geometricamente: è intersezione di due o più superficie). C è, per definizione, *intersezione completa* se può essere definita con due equazioni; se le due equazioni hanno gradi a e b , la curva è intersezione completa di tipo (a, b) , e ha grado ab . Quanto al *genere*, altro numero di fondamentale importanza, rimandiamo a qualsiasi trattato sulle curve, ad esempio [F], ovvero al trattato di Geometria algebrica undergraduate [Ci].

Sia C una curva algebrica dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ (sul campo dei numeri complessi) e sia Γ l’intersezione di C con un piano generico H . Si tratta di un insieme di d punti, dove d è il grado di C .

Fin dalle origini della Geometria Algebrica si è cercato di comprendere le proprietà di C a partire da quelle (apparentemente più gestibili) di Γ .

Ad esempio il più semplice risultato classico afferma che se C è irriducibile e Γ è contenuta in una retta allora C è contenuta in un piano.

Viene spontaneo chiedersi: e se Γ è contenuta in una conica è vero che C è contenuta in una quadrica?

La risposta è negativa: già classicamente erano noti controesempi di grado 5. Quindi il problema di collegare le curve contenenti Γ con le superficie contenenti C appare subito non banale. In questo ambito Saro ha ottenuto risultati rilevanti.

(Per una panoramica più ampia su questa tematica si può vedere [CC]).

Saro inizia nell’87, col lavoro [18] riguardante le intersezioni complete, per continuare sul *Lemma di Laudal*, sia per utilizzarlo in vari problemi, sia per approfondirlo in casi nuovi. In queste ricerche interviene la sua grande capacità di maneggiare le *sizigie* (probabilmente proveniente dal suo soggiorno di studio a Brandeis e dai suoi rapporti matematici con David Buchsbaum).

Ricordo di PV. David Buchsbaum tanti anni fa, in più occasioni, ha testimoniato con me delle qualità matematiche di Saro, apprezzandone l’originalità, soprattutto per la sua capacità di spremere le sizigie (squeezing the syzygies) per ricavarne inaspettate applicazioni.

Su queste vorremmo presentare qualche parola introduttiva.

3.1 – Che cosa sono le sizigie.

Dati i polinomi omogenei $p_1, \dots, p_n$, una *sizigia* è una relazione polinomiale

$$r_1 p_1 + \dots + r_n p_n = 0,$$

dove l’eguaglianza deve valere “come polinomi”, cioè l’espressione a sinistra deve essere eguale al polinomio nullo.

Il grado del primo membro si chiama *grado della sizigia*. Spesso le sizigie si denotano col solo primo membro, sottintendendo “= 0”

Ad esempio, dati i due polinomi p e q di gradi rispettivi a e b , esiste sempre la sizigia banale $qp - pq$, che ha grado $a + b$. Se inoltre p e q non hanno fattori comuni (cioè se definiscono un’intersezione completa) tutte le sizigie sono del tipo $r(qp - pq)$, come si vede facilmente usando la fattorizzazione unica dei polinomi. In particolare non vi sono sizigie di grado $< a + b$.

Se $n > 2$ la situazione è ovviamente più complicata.

3.2 – Il *Lifting Lemma* dovuto a Saro Strano è un bell’esempio di uso delle sizigie.

Il primo risultato fondamentale sulle curve è quello che Saro chiama *Lifting Lemma* (Teorema 4 in [17],

riportato come Theorem 1 in [21]). Questo teorema produce un fantasioso e profondo legame tra il *lifting* (in italiano si usa, ma più raramente, l'espressione *sollevamento*) e le *sizigie* di Γ (cioè le relazioni polinomiali che intercorrono tra le equazioni che definiscono Γ). In parole povere afferma che, se non vi sono sizigie di Γ di grado $\leq s+2$, tutte le curve di grado s che contengono Γ provengono da superficie di grado s contenenti C .

Ecco ora un enunciato preciso del *Lifting Lemma*:

Sia C una curva in $\mathbf{P}^3$ e sia Γ una sua sezione piana generale. Sia $\{p_1, \dots, p_n\}$ un insieme minimale di equazioni che definisca Γ . Supponiamo che per un certo intero $s > 0$ $p_1, \dots, p_n$ non abbiano sizigie di grado $\leq s+2$. Allora ogni curva di grado s contenente Γ è traccia di una superficie di grado s che contiene C .

3.3 – Curve intersezioni complete di due superficie.

Dal precedente teorema si deduce il seguente bellissimo risultato sulle intersezioni complete ([18]; questo lavoro contiene già le idee fondamentali per il *Lifting Lemma*, poi messe a punto in [17]).

L'enunciato che segue si trova in [18], theorem 6:

Se Γ è una intersezione completa di tipo (a, b) , cioè definita da due equazioni di gradi a e b , con $a > 2$ e $b > 2$, anche C è una intersezione completa di tipo (a, b) .

Dim. Per quanto visto prima i due polinomi di gradi a e b che definiscono Γ non hanno sizigie di grado $< a+b$, quindi non hanno sizigie di grado $< a+1$ né di grado $< b+1$. Per il *Lifting Lemma* le due curve corrispondenti di gradi a e b la cui intersezione è Γ sono traccia di due superficie di gradi a e b che contengono C e la loro intersezione è proprio C .

Si può osservare che un teorema analogo al risultato di Saro è ottenuto da Marchionna ([Ma]), coinvolgendo però il genere aritmetico.

3.4 – Il Lemma di Laudal ritrovato e la sua generalizzazione (via sizigie).

Dal *Lifting Lemma* Saro deduce una nuova elegante dimostrazione di un importante risultato di *lifting* noto come *Lemma di Laudal* (vedere [Lau] per la

dimostrazione originale e [17], cor 2 per quella di Saro):

Lemma di Laudal. Supponiamo che C sia ridotta e irriducibile di grado d e che Γ sia contenuta in una curva di grado s . Se $d > s^2 + 1$ ogni curva di grado s contenente Γ è traccia di una superficie di grado s contenente C .

Dim. L'ipotesi su C implica che i punti di Γ sono disposti in maniera particolarmente favorevole ("posizione uniforme"). Di qui i colleghi catanesi Maggioni e Ragusa trovano informazioni approfondite sulle sizigie (si vedano [MR] e [MR1]), che in particolare permettono di applicare il *Lifting Lemma*.

Il *Lifting Lemma* è stato usato da molti autori per problemi di curve e non solo (ad es [CGN], [HM]), e ha ispirato generalizzazioni a dimensione maggiore di uno (ad es [R]) ed una interessante versione puramente algebrica [HU]. Per una introduzione a questo fondamentale risultato si può vedere [K].

Un'altra rilevante conseguenza del *Lifting Lemma* è una generalizzazione del *Lemma di Laudal* visto prima. Questo argomento è trattato in [21]. Si tratta di un contributo al generale problema del *lifting* per curve, che si può brevemente riassumere come segue:

Se la sezione piana è contenuta in una curva di grado s , con $d > s^2 - s + 4$, allora C è contenuta in una superficie di grado $s+1$, mentre, se la sezione piana è contenuta in due curve di grado s tale che $d > s^2 - 2s + 6$, allora C è contenuta in una superficie di grado $s+1$.

Vorremmo tuttavia sottolineare il fatto che il *Lemma di Laudal* e il teorema sulle intersezioni complete vengono entrambi ritrovati in modo semplice e chiaro nel lavoro [17].

3.5 – Risultati di *lifting* per curve riducibili.

Un caso importante della problematica *lifting* riguarda le curve riducibili, cioè spezzate in più componenti: ci si chiede se particolari sottoinsiemi di Γ "provengono" da sottocurve di C .

Ad esempio un sottoinsieme di Γ contenuto in una retta proviene da una sottocurva piana? Alcune risposte fantasiose e profonde su questo tema si

trovano nella seconda parte di [21] e in [24], anche per curve in $\mathbf{P}^n$ con $n > 3$. È interessante notare l'intreccio di metodi e risultati con il lavoro [Co]. Il risultato principale di [24] è fondamentale per il lavoro [HM] di Hartshorne e Mirò-Roig.

3.6 – *Lifting e genere massimo di una curva.*

Risultati di *lifting* come i precedenti si applicano alla valutazione del genere delle curve. Si tratta di un filone di ricerca classico, che risale al secolo XIX con le ricerche di Georges Henri Halphen e Guido Castelnuovo. Le ricerche su queste tematiche non si sono mai interrotte e Saro ha dato i suoi non banali contributi in [19], dove si trovano progressi su una congettura di Hartshorne e Hirschowitz, e in [20] (in collaborazione con P. Ellia) dove si mettono a punto alcuni casi non ancora chiariti.

L'approccio più usato alla questione è il seguente: fissato il grado d , quali valori può assumere il genere g ? in particolare esiste un limite superiore per g in termini di d ?

Se la curva è contenuta in un piano si ha $g = (d-1)(d-2)/2$ e non c'è altro da dire.

Per curve non piane Castelnuovo ([C]) ha trovato un limite superiore per g , ed ha provato che tale limite è raggiunto da curve contenute in quadriche. Questo risultato fa ormai parte dei manuali di Geometria algebrica (ad esempio [Ha]).

E per curve non contenute in quadriche?

Qui la cosa diventa particolarmente complessa. Fondamentale in questa ottica è la storica memoria di Halphen [H] ripresa in termini moderni da molti autori, tra i primi Gruson e Peskine ([GP2]).

L'impostazione moderna è la seguente: fissati d ed $s \geq 2$, si considera l'insieme di tutte le curve di grado d non contenute in superficie di grado $< s$, e si denota con $G(d, s)$ il genere massimo di tali curve (esistente per il precedente risultato di Castelnuovo). Il problema diventa: trovare una formulazione esplicita per la funzione $G(d, s)$, e descrivere le curve che raggiungono tale limite.

Per $s = 2$ il problema è completamente risolto dal risultato di Castelnuovo.

Per $s > 2$ occorre qualche premessa per capire i lavori di Saro (e per chi voglia, anche quelli su queste tematiche dei suoi allievi catanesi Riccardo Re, Antonio Causa, Paola Bonacini).

Nello studio del genere massimo si distinguono classicamente (si vedano ad esempio [Ca], [HH] e [BBEM]) tre domini nel piano (d, s) :

1. Range A: $(s^2 + 4s + 6)/6 \leq d < (s^2 + 4s + 6)/3$,
2. Range B: $(s^2 + 4s + 6)/3 \leq d \leq s^2 - s$,
3. Range C: $d > s^2 - s$,

il caso $d < (s^2 + 4s + 6)/6$ essendo vuoto.

Il caso del range C è stato completamente risolto da Gruson e Peskine ([GP2]), mentre ci sono recenti contributi significativi sul range A in [BBEM] e [BE], anche se il problema non sembra ancora risolto completamente, almeno per gradi bassi.

Saro, da solo e con Ellia, si concentra invece sul caso del range B, considerato il più ostico.

3.7 – *Il genere massimo, la congettura di Hartshorne e Hirschowitz e i contributi di Strano ed Ellia.*

In [HH] viene definita (in modo assai macchinoso) una funzione $G_H(d, s)$ e si congettura che nel range B si abbia $G(d, s) = G_H(d, s)$. A sostegno della congettura vengono costruite curve nel range B con $g = G_H(d, s)$.

È con questa congettura che Saro, da solo e con Ellia, si cimenta (insieme a non pochi altri), affrontando una classe particolarmente interessante di curve dello spazio proiettivo P a tre dimensioni, quelle denominate di *rango massimo* (si veda più avanti). Su questo tipo di curve premettiamo qualche considerazione che ne chiarisca meglio il significato.

3.7.1 – *I difetti di una curva.*

Il metodo più antico e anche il più efficace per studiare una curva C di grado d nello spazio proiettivo consiste nel considerare le interazioni di C con le superficie dello spazio. Una superficie S di grado n o contiene C oppure la taglia in un “gruppo di nd punti” (nomenclatura classica) ovvero in un “divisore di grado nd ”.

La procedura consiste nel considerare per ogni n tutti i divisori tagliati dalle superficie di grado n . Questi divisori formano una *serie lineare* della quale è possibile definire una dimensione (vedere ad es [F], [Ci] o [Ha]). Può capitare che questa dimensione “non sia quella attesa”, ma sia più piccola.

La differenza

$$r(n) = \dim \text{attesa} - \dim \text{effettiva}$$

veniva denominata *difetto di completezza* (o semplicemente *difetto*) in grado n . Con la terminologia

moderna la funzione $n \rightarrow r(n)$ prende il nome di *funzione di Rao*, e si definisce mediante la coomologia (in realtà la teoria moderna è molto più profonda, per dettagli vedere ad esempio [M]). Se C è irriducibile e non singolare si ha $r(n) = 0$ per $n < 1$ e un fondamentale risultato di Castelnuovo ([C]) asserisce che $r(n) = 0$ per $n > d - 3$.

In particolare i difetti non nulli sono in numero finito.

Una curva con difetti tutti nulli veniva chiamata *perfetta* (nomenclatura introdotta da Macaulay). Oggi le curve perfette si chiamano *aritmeticamente di Cohen-Macaulay*, abbreviato *ACM*.

Gli esempi più semplici di curve perfette sono le intersezioni complete.

3.7.2 – Curve di rango massimo.

Sono le curve i cui difetti sono solo in grado basso, precisamente: detto s il minimo grado di una superficie contenente C si ha $r(n) = 0$ per $n \geq s$. In particolare le curve perfette sono di rango massimo, ma esistono curve di rango massimo non perfette.

3.7.3 – La specialità di una curva.

Le argomentazioni precedenti sui divisori permettono di definire la *specialità* $e(C)$ della curva, un numero fondamentale in varie situazioni, come lo studio del genere o delle classi di *biliaison*, come vedremo in seguito. La definizione si basa sulla nozione di *divisore speciale* che fa parte della teoria delle serie lineari (vedere ad es. [F], [Ci] o [Ha]). In breve: i divisori tagliati dalle superficie di un dato grado n sono tutti speciali o tutti non speciali, inoltre sono non speciali per $n > d - 3$ (Castelnuovo [C]). Si definisce la *specialità* $e(C)$ della curva C come il massimo n per cui questi divisori sono speciali.

Valgono le seguenti proprietà:

1. Sussistono le limitazioni $-1 \leq e(C) \leq (2g - 2)/d$.
2. Si ha $e(C) = -1$ se e solo se $g = 0$.
3. Se C è una intersezione completa di tipo (a, b) si ha $e(C) = a + b - 4$, e coincide col limite superiore dato in 1.
4. Se C è non speciale (cioè $e = 0$) si ha $g \leq d - 3$.

Di qui si comincia a capire che la specialità e il genere sono collegati. In realtà questi legami sono molto più profondi, come è ben spiegato ad esempio nell'introduzione di [20].

3.7.4 – Il lavoro Ellia-Strano sul genere massimo.

Nel lavoro [20] si dà un primo contributo al problema di Halphen nel caso del range B : detto $G_H(d, s)$ il valore congetturato in [HH], in questo lavoro si dimostra che la congettura è vera per $s = 8$ e sotto ulteriori condizioni su s per la cui formulazione rimandiamo a [20]; si prova inoltre che, sotto le condizioni precedenti, ogni curva che raggiunge $G_H(d, s)$ ha rango massimo e non ha difetti in grado $s - 1$. e si valuta anche in tal caso $e(C)$. Il teorema si ottiene studiando la *postulazione* della sezione piana generica della curva (oggi si usa piuttosto l'espressione *funzione di Hilbert*; si veda ad esempio [Ha], p. 51).

Ulteriori approfondimenti in questo ambito si trovano in [19].

3.7.5 – Il lavoro di Saro sul genere massimo.

In [23] Saro dimostra che la congettura di [HH] per il range B è vera per le curve di rango massimo. Inoltre prova che, se una tale curva C ha il genere congetturato $G_H(d, s)$, risulta: il minimo grado di una superficie che contiene C è esattamente s e inoltre C non ha difetti anche in grado $s - 1$. Si danno inoltre utili limitazioni per la specialità.

È interessante notare che la dimostrazione di Saro si ottiene per induzione usando la *biliaison* (vedere 3.8).

3.8 – Liaison e biliaison.

3.8.1 – Qualche richiamo.

Due curve C e C' senza componenti comuni si dicono *direttamente legate* (o in *liaison diretta*) se la loro unione è una intersezione completa, *legate* se si può passare dall'una all'altra con un numero finito di legami diretti, *bilegate* o in *biliaison* se sono legate con numero pari di legami diretti. Ad esempio due rette incidenti sono direttamente legate, due rette sghembe sono legate ma non direttamente.

Queste nozioni, di *liaison* e *biliaison* (in inglese *linkage* e *double linkage*) sono relazioni di equivalenza nell'insieme di tutte le curve, e sono state ampiamente studiate dai geometri algebrici per decenni. In particolare sono rilevanti gli studi di Federico Gaeta (allievo spagnolo di Severi), il quale dimostra tra l'altro che due curve perfette sono

sempre tra loro legate (si veda [G]). Per un'introduzione anche storica sull'argomento si può vedere [E] (par. 21.10); per approfondimenti vedere [M].

Negli ultimi lavori di Saro è particolarmente importante le biliaison. usata pesantemente in [23] e studiata a fondo in [26]

3.8.2 – Il lavoro di Saro sulla biliaison.

In [26] c'è un fondamentale risultato sulle classi di biliaison. Come detto sopra le curve perfette formano un'unica classe di biliaison, e non c'è nulla da aggiungere ai risultati di Gaeta. Le altre classi sono (in modo naturale) insiemi parzialmente ordinati, per i quali è fondamentale conoscere gli elementi minimali, le cosiddette *curve minimali*. In [LR] si dimostra che sono minimali le curve C per cui $s(C) \geq e(C) + 4$, dove $s(C)$ è il minimo grado di una superficie contenente C ed $e(C)$ è la specialità. Ma per la maggior parte delle curve si ha $s(C) < e(C) + 4$, e tra queste Saro riesce a trovare una magnifica caratterizzazione della curve minimali. Le sue brillanti idee in proposito sono state usate per questioni di biliaison in dimensione più alta e in ambienti anche diversi dallo spazio proiettivo, vedere i lavori di Hartshorne [Ha1] e di Martin-Deschamps [MD].

3.9 – Il lavoro di Saro sulla specialità.

Il calcolo esplicito della specialità è assai arduo. Straordinario è pertanto il risultato contenuto in [22] che collega la specialità di una curva C con le equazioni che definiscono la sua sezione piana generica Γ . Per una curva generica $p = 0$ di grado n nel piano di Γ il contenere Γ corrisponde a equazioni lineari nei coefficienti di p , che per $n \gg 0$ risultano indipendenti. Detto ε il massimo intero per cui queste equazioni non sono indipendenti vale la disuguaglianza

$$e(C) \leq \varepsilon - 1$$

Il risultato principale di [22] asserisce che se Γ può essere definita da equazioni di gradi $\leq \varepsilon$ risulta esattamente $e(C) = \varepsilon - 1$.

Per capire meglio l'ipotesi di Saro ricordiamo che in generale Γ può essere definita da equazioni di gradi $\leq \varepsilon + 2$.

La dimostrazione è stupefacente: Saro trasporta l'idea centrale *sizigie* (usata nei teoremi di *lifting*) in un ambito completamente diverso, e in questo modo riesce a coinvolgere le equazioni che definiscono Γ .

3.10 – Conclusione.

In questo ricordo abbiamo cercato, nei limiti delle nostre capacità e conoscenze, di illustrare, sia pure in modo incompleto, la multiforme attività scientifica di Saro, mettendo in evidenza il suo approccio originale e profondo, che gli ha permesso di muoversi fra l'Algebra Commutativa, l'Algebra Omologica e la Geometria Algebrica. Senza dimenticare le sue qualità umane.

Elenco lavori di Rosario Strano

- [1] R. STRANO – *Sugli anelli a sottogruppi additivi tutti sottoanelli* – Le Matematiche (Catania) 27 (1972), 203-218 (1973)
- [2] R. STRANO – *Sulla Henselizzazione di anelli di valutazione e di anelli di Prüfer* – Rend. Sem. Mat Univ. Padova 52 (1974), 167-183
- [3] R. STRANO – *Azumaya algebras over Hensel rings* – Pacific J. Math. 61 (1975), n. 1, 295-303
- [4] R. STRANO – *Sulla Henselizzazione di anelli aritmetici* – Rend. Sem. Mat Univ. Padova 53 (1975), 149-163
- [5] R. STRANO – *Alcune proprietà dei corpi henseliani* – Ann. Univ. Ferrara sez. VII (N.S.) 21 (1975) 69-86
- [6] R. STRANO – *Sulla Henselizzazione stretta di un corpo valutato* – Ann. Univ. Ferrara sez. VII (N.S.) 21 (1975) 117-130
- [7] R. STRANO – *Amitsur cohomology for purely inseparable extensions* – J. Algebra 47 (1977), n. 1, 115-128
- [8] R. STRANO – *Cohomology of an affine group scheme over a Hensel ring* – J. Algebra 47 (1977), n. 1, 138-153
- [9] R. STRANO – *Some properties of associative O-rings* – Rend. Sem. Mat Univ. Politec. Torino 36 (1977/78), 87-102 (1979)
- [10] R. STRANO – *The Brauer group of a scheme* – Ann. Mat. Pura Appl. (4) 121 (1979), 157-169
- [11] S. GRECO, R. STRANO – *Theorem A and B for Henselian schemes* – Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Fis. Mat. Nat. (8) 67 (1979), n. 1-2, 95-98 (1980)
- [12] S. GRECO, R. STRANO – *Quasi coherent sheaves over affine Hensel schemes* – Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), n. 2, 445-465
- [13] R. STRANO – *Principal homogeneous spaces over Hensel rings* – Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), n. 2, 208-212

- [14] R. STRANO – *On the affineness of Hensel schemes. Commutative algebra (Trento 1981)* – Lectures Notes in Pure and Appl. Math. 84, Dekker, New York, 1983, 305-320.
- [15] R. STRANO – *On the étale cohomology of Hensel rings.* – Comm. Algebra 12 (1984) n. 17-18, 2195-2211
- [16] R. STRANO – *Algebraization of Azumaya algebras.* – Boll. Un. Mat. Ital. A (6) 4 (1985), n. 2, 315-321
- [17] R. STRANO – *On the hyperplane sections of curves. Proceedings of the Geometry Conference (Milano and Gargnano 1987).* – Rend. Sem. Mat.Fis. Milano 57 (1987), 125-134 (1989)
- [18] R. STRANO – *A characterization of complete intersection curves in P^3* – Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988) 711-715
- [19] R. STRANO – *Plane sections of curves of P^3 and a conjecture of Hartshorne and Hirschowitz. Commutative algebra and algebraic geometry* – (Turin 1990) Rend. Sem. Mat. Pol. Torino 48 (1990), n. 4, 511-527 (1993)
- [20] P. ELLIA, R. STRANO – *Sections planes et majoration du genre des courbes gauches (French)* – (Complex projective geometry Trieste, Bergen 1989), 157-174. London Math. Note Ser. 179 Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992
- [21] R. STRANO – *On generalized Laudal's Lemma.* – (Complex projective geometry Trieste, Bergen 1989), 284-293. London Math. Note Ser. 179 Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992
- [22] R. STRANO – *On the speciality of a curve* – Le Matematiche (Catania) 48 (1993), n. 1, 135-143 (1994)
- [23] R. STRANO – *On the genus of a maximal rank curve in P^3* – J. Algebraic Geom. 3 (1994), n. 3, 435-447
- [24] R. STRANO – *Curves and their hyperplane sections. Commutative Algebra, homological algebra and representation theory (Catania, Genoa, Rome, 1998)* – J Pure and Appl. Algebra 152 (2000) n. 1-3, 337-341
- [25] R. STRANO – *Hyperplane sections of reducible curves. Zero-dimensional schemes and applications (Naples 2000)* – Queen's Papers in Pure and Appl. Math. 123, Queen's Univ. Kingston ON, 2002 55-62
- [26] R. STRANO – *Biliaison classes of curves in P^3* – Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) 649-658
- [27] S. GRECO, R. STRANO (editors) – *Complete Intersections, Proceedings corso CIME, Acireale 1983*, Springer LNM 1092 (1984)
- [BE] E. BALLICO, P. ELLIA, *The maximal genus of space curves in the Range A*, 2020, arXiv: 1811.08807v2 (2020)
- [C] G. CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica*, Rend. Circ. Mat. Palermo 7(1893). anche in Memorie Scelte, pp. 95-113.
- [Ca] A. CAUSA, *Sulle curve di genere massimo*, Le Matematiche, LIII (1998), 155-175
- [CC] L. CHIANTINI, C. CILIBERTO, *A few remarks on the lifting problem*, Astérisque 218 (1993), 95-109
- [CGN] N. CHIARLI, S. GRECO, U. NAGEL, *Regularity bounds for projective subschemes of codimension two*, Jour. Math. Kyoto Univ. 40-1(2000), 37-59
- [Ci] C. CILIBERTO, *An Undergraduate Primer in Algebraic Geometry*, Unitext 129, Springer (2021)
- [Co] M. COOK, *The connectedness of space curve invariants*, Comp. Math. 111(1998) 221-244
- [E] D. EISENBUD, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, GTM 150, Springer 1995
- [EGA IV4] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique, Ch IV Part 4*, Publ. Math. No. 32, IHES 1968
- [F] W. FULTON, *Algebraic curves An Introduction to Algebraic Geometry*, W.A. Benjamin, Inc., Reading Massachusetts, 1969
- [G] F. GAETA, *Sulle curve sghembe algebriche di residuale finito*, Annali di Matematica Pura e Appl. 27(1948), 177-241
- [GP1] L. GRUSON, C. PESKINE, *Section plane d'une courbe gauche: postulation*, Progress in Math n. 24, Birkhauser, Boston, 1982, 33-35
- [GP2] L. GRUSON, C. PESKINE, *Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, vol. 4, no.15 (1982) 401-418
- [Gr] S. GRECO, *Anelli henseliani*, in "Categories and Commutative Algebra", Corso CIME 1971, Cremonese, Roma 1973, 41-69
- [Gro] A. GROTHENDIECK, *Le group de Brauer I, II, III*, Dix exposés sur la cohomologie des schemas, Masson, Paris, 1968
- [H] G. HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes algébriques*, J. Ec. Polyt. 52 (1882), 1-200, anche in Ouvres complètes, t. III , 261-455
- [Ha] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer 1977
- [Ha1] R. HARTSHORNE, *On Rao's theorems and the Lazarsfeld-Rao property*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 12(2003), 375-393
- [HH] R. HARTSHORNE, A. HIRSCHOWITZ, *Nouvelles courbes de bon genre dans l'espace projectif*, Mat. Ann. 280 (1988), no. 3, 353-367
- [Hi] H. HIRONAKA, *Formal line bundles along exceptional loci. Algebraic Geometry*, Oxford Univ. Press, London, 1969, 201-218
- [HM] R. HARTSHORNE, R.M. MIRÒ-ROIG, *On the intersection of ACM curves in P^3* , Journal of Pure and Applied Algebra 219 (2015) 3195-3213
- [HU] C. HUNEKE, B. ULRICH, *General hyperplane sections of algebraic varieties*, J. Algebraic Geom. 2 (1993), 487-505

Bibliografia di altri lavori non di Saro

- [AHHR] J. ALPER, D. HALPERN-LEISTNER, J. HALL, D. RYDH, *Artin algebraization for pairs with applications to the local structure of stacks and Ferrand pushouts*. arXiv:2205.08623. (2022)
- [AM] M.F. ATIYAH, I.G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969)
- [BBEM] E. BALLICO, G. BOLONDI, Ph. ELLIA, R. M. MIRO-ROIG, *Curves of maximum genus in the range A and stick-figures*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 11, 4589-4608

- [Ka] F. KATO, *On Henselian Rigid Geometry*, Taiwanese Journal of Math. 21(3) (2017), 531-547
- [KPR] H. KURKE, G. PFISTER, M. ROCZEN, *Henselsche Ringe und Algebraische Geometrie*. VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975
- [Kr] M. KREUZER, *An introduction to a theorem of Strano*, The curves seminar at Queen's, 1991
- [Laf] J.P. LAFON, *Anneaux Henséliens*, Bull. Soc. Math. France 91 (1963), 77-107
- [Lau] O. A. LAUDAL, *A generalized trisecant lemma, Algebraic Geometry (Proc. Sympos., Univ. Tromsø, 1977)*, pp. 112-149, Lecture Notes in Math, 687, Springer, Berlin, 1978
- [LR] L. K. LAZARSFELD, A. P. RAO, *Linkage of general curve of large degree*, L.N.M. 997 (1983)
- [MR] R. MAGGIONI, A. RAGUSA, *The Hilbert function of a generic plane section of curves of P^3* , Inv. Math. 91(1988), 253-258
- [MR1] R. MAGGIONI, A. RAGUSA, *Construction of smooth curves with assigned Hilbert function and generator's degree*, Le Matematiche 42 (1987), no. 1-2, 195-2009(1989)
- [Ma] E. MARCHIONNA, *On complete-intersection varieties*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano (1958), 285-307
- [MD] M. MARTIN-DESCHAMPS, *Biliaisons élémentaires en codimension 2*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 15(2006), 281-296
- [M] J. C. MIGLIORE, *Introduction to liaison theory and deficiency modules*, Progress in Math. 165, Birkhauser, 1998
- [N] M. NAGATA, *Local rings*. Interscience Publishers (John Wiley and Sons, New York-London-Sydney), 1962
- [PS] C. PESKINE, L. SZPIRO, *Liaison des variétés algébriques. I*, Invent. Math. 26 (1974), 271-302
- [Ra] M. RAYNAUD, *Anneaux locaux henséliens*, LNM 169 Springer-Verlag, 1970
- [R] M. ROGGERO, *Laudal-type Theorems in P^N* , Indag. Mathem. 14 (2003), 249-266
- [TT] M. TEMKIN, I. TYOMKIN, *Ferrand pushouts for algebraic spaces*, European Journal of Mathematics 24 (2016) 960-983



Silvio Greco

Ha svolto inizialmente attività didattica e di ricerca presso le università di Pisa e Genova. Professore straordinario di Algebra Superiore a Genova nel triennio '70-73, poi Professore ordinario di Geometria presso il Politecnico di Torino fino al 2001. Attualmente Professore Emerito.

Ha svolto ricerche in Algebra Commutativa e Geometria Algebrica, inizialmente con la guida impareggiabile di Paolo Salmon.

È stato responsabile scientifico di vari progetti di ricerca italiani (CNR, INDAM, MIUR) e internazionali (Programma Vigoni con la Germania, Acciòn Integrada con la Spagna).

Per molti anni è stato coordinatore del Dottorato in Matematica nell'ambito del consorzio Torino-Genova.

Autore di circa 80 pubblicazioni scientifiche e di un libro di testo di Geometria in collaborazione con Paolo Valabrega.



Paolo Valabrega

Professore ordinario di Geometria presso il Politecnico di Torino fino al 2015.

Ha svolto ricerche di Algebra Commutativa, Geometria Algebrica, Matematica non archimedea iniziando la sua attività scientifica sotto la guida dell'indimenticabile maestro Paolo Salmon.

Fondatore e direttore per vent'anni del Centro linguistico del Politecnico di Torino.

Responsabile del Progetto Polymath (Matematica in rete per le Scuole secondarie superiori – Politecnico di Torino – Istituto superiore Mario Boella).

Coordinatore per alcuni anni del Comitato organizzativo del Premio Fubini per la Matematica.

Autore di circa 50 pubblicazioni scientifiche e di un libro di testo di Geometria in collaborazione con Silvio Greco.