
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANNAMARIA MAZZIA

Frattali generati dai metodi Newton-Raphson: cenni storici e rappresentazioni grafiche

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 9
(2024), n.1, p. 63–74.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_1_63_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_1_63_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Frattali generati dal metodo di Newton-Raphson: cenni storici e rappresentazioni grafiche

ANNAMARIA MAZZIA

Università di Padova

E-mail: annamaria.mazzia@unipd.it

Sommario: *In questo articolo introduciamo il mondo dei frattali utilizzando il metodo di Newton-Raphson e alcune sue varianti. Un breve excursus storico ci accompagnerà alla costruzione al computer di immagini spettacolari.*

Abstract: *In this paper, we study how to generate fractals by applying the Newton-Raphson method and some of its variants. A brief historical excursus will accompany us on the computer construction of spectacular images.*

1. – Introduzione al mondo dei frattali

Quando Benoit B. Mandelbrot, nel 1983, scrive la sua opera più famosa [4] introduce l'argomento con una domanda: *Perché la geometria è spesso descritta "fredda" o "arida"? Una risposta è nella sua incapacità di descrivere la forma di una nuvola, di una montagna, di una linea costiera o di un albero. Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni.*

Molte forme della natura sono, infatti, irregolari e frammentate e la classica geometria euclidea non può riprodurre la complessità. Mandelbrot, dopo anni di studi dedicati a questa sfida, dà vita ad una nuova geometria, che riesce non solo a descrivere oggetti presenti in natura, ma anche a trovare applicazioni in diversi campi scientifici, dall'ingegneria alla medicina. Si tratta della geometria dei frattali. Frattale è un termine coniato dallo stesso Mandelbrot dall'aggettivo latino *fractus*, che a sua volta deriva dal verbo *frangere*, che significa infrangere, rompere, spezzare, interrompere: frangere per creare frammenti irregolari. Un frattale è un oggetto la cui forma si ripete sempre uguale in scale diverse (questa

proprietà viene chiamata auto-similarità). Da questa definizione parte tutta la geometria frattale, che ha come elemento chiave l'introduzione di una nuova dimensione, dove gli spazi della geometria classica (di dimensione zero per i punti, di dimensione uno per le linee e le curve, due per le superficie piane e tre per gli oggetti solidi) rappresentano solo dei casi particolari. Il concetto di frattale è molto intuitivo se pensiamo a quelli che troviamo in natura. Prendiamo, ad esempio, il cavolo romano: se ci focalizziamo solo su una sua parte, rivediamo il cavolo in miniatura; e se, su questa parte, ne prendiamo una ancora più piccola, ritroviamo di nuovo il cavolo in miniatura. Se andiamo avanti all'infinito con questo procedimento, abbiamo il concetto di frattale come oggetto matematico. Altri esempi in natura, in cui le stesse forme si ripetono sempre uguali, sono le ramificazioni degli alberi, le reti fluviali, i fulmini, i fiocchi di neve, le conchiglie, alcune foglie come le felci. Troviamo strutture frattali anche nel corpo umano: pensiamo alle ramificazioni dei vasi sanguigni, alle reti di neuroni o ai nostri stessi polmoni. I frattali si trovano in scala molto grande (come le reti fluviali) o in scala molto piccola (come i neuroni). In questo lavoro, vogliamo focalizzare l'attenzione su come generare frattali partendo da un metodo che non è nato per

Accettato: il 19 aprile 2024.

questo scopo, il metodo di Newton-Raphson, che permette di approssimare le radici di una funzione. C'è, tuttavia, un forte legame tra il metodo di Newton-Raphson e il mondo dei frattali. Ed è su questo che vogliamo ora indagare.



2. – Il metodo di Newton-Raphson

Il metodo di Newton-Raphson è uno dei metodi numerici più famosi per approssimare le radici, o zeri, di una funzione. Data una funzione $y = f(x)$, di cui vogliamo approssimare una sua radice ξ (per cui $f(\xi) = 0$), il metodo opera nel modo seguente: si parte da un'approssimazione iniziale x_0 e si costruisce la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$; l'intersezione di questa retta tangente con l'asse delle ascisse dà la nuova approssimazione x_1 che, in genere, si trova più vicina alla radice da approssimare rispetto all'approssimazione iniziale. Dal momento che la retta tangente a $(x_0, f(x_0))$ è data da $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, l'intersezione con l'asse delle ascisse restituisce il punto $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Si ripete (o itera) il ragionamento appena fatto su x_1 e si va avanti fino a convergenza.

Il metodo si può quindi scrivere nel modo seguente:

- scegliere x_0 approssimazione iniziale
- applicare la formula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

Se il metodo converge, la successione di valori che viene generata tende alla radice ξ . Praticamente, ci si ferma nelle iterazioni quando lo scarto tra due approssimazioni successive, dato da $|x_{n+1} - x_n|$, diventa minore di una tolleranza prefissata.

Ovviamente, per poter andare avanti con le iterazioni, la derivata prima $f'(x)$ deve essere diversa da zero nei punti in cui viene calcolata.

2.1 – Esempio sul metodo di Newton-Raphson

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + x - 1$. Dalla Figura 1, si vede facilmente che la funzione interseca solo una volta l'asse delle ascisse e, quindi, ha una sola radice reale nell'intervallo $[0, 1]$. Partendo dal punto iniziale $x_0 = 0.2$ e applicando il metodo con una tolleranza pari a 10^{-14} , vengono eseguite 7 iterazioni (le prime tre sono visualizzate nella Figura 1), ottenendo i seguenti valori:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.2 \\ x_1 &= 0.9071\dots \\ x_2 &= 0.7187052\dots \\ x_3 &= 0.683428006\dots \\ x_4 &= 0.6823288368135\dots \\ x_5 &= 0.682327803828930\dots \\ x_6 &= 0.682327803828019\dots \\ x_7 &= 0.682327803828019\dots \end{aligned}$$

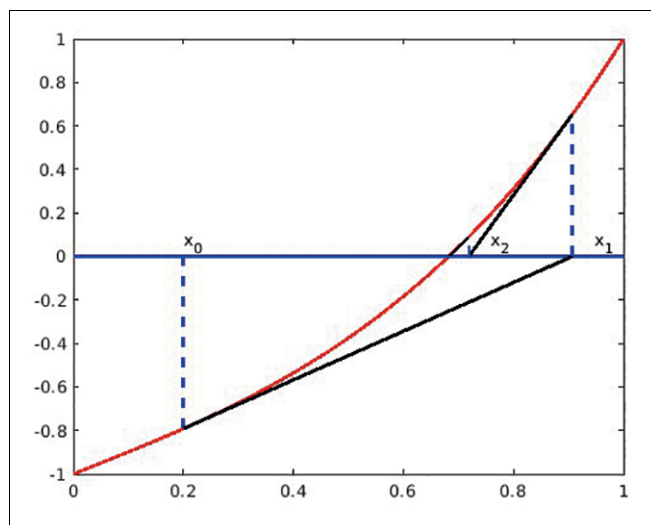


FIGURA 1 – Implementazione del metodo di Newton-Raphson sulla funzione $f(x) = x^3 + x - 1$.

Quando arriviamo alla settima iterazione, il valore x_7 è praticamente uguale all'approssimazione precedente x_6 e la differenza $|x_7 - x_6|$ è minore della tolleranza 10^{-14} . Abbiamo ottenuto un'approssimazione della radice con la precisione desiderata. Osserviamo che l'accuratezza delle cifre decimali, a partire dalla terza iterazione, si raddoppia grossolanamente ad ogni passo: x_3 ha due cifre decimali corrette, x_4 ne ha 5, x_5 ne ha 12. Si parla di convergenza quadratica: l'errore al passo $n + 1$ decresce come il quadrato dell'errore al passo precedente. Se non è nota la radice esatta, come in questo caso, e non si può calcolare l'errore esatto, lo stesso comportamento si può osservare sugli scarti. Infatti noi ci siamo fermati alla settima iterazione proprio perchè lo scarto è diventato minore della tolleranza prefissata.

3. – Sull'origine del metodo di Newton-Raphson

Una prima descrizione di questo metodo si ha nel 1669 quando Newton descrive la soluzione di equazioni polinomiali, in particolare, del problema $x^3 - 2x - 5 = 0$, nel trattato *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas (Sull'analisi delle equazioni con un numero infinito di termini)*. Nella presentazione non viene fatta un'analisi matematica del problema, né vi si trovano riferimenti al concetto di derivata (riferimenti che appaiono, invece, più avanti nello stesso trattato): tutto ciò suggerisce che Newton considerasse questa procedura di tipo puramente algebrico. Inoltre, Newton, ad ogni iterazione, lavora su nuove equazioni e non sulla stessa formula da ripetere in modo ricorsivo.

La prima applicazione del metodo per risolvere equazioni non polinomiali appare, invece, a partire dalla seconda edizione del suo trattato *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (I principi matematici della filosofia naturale)*, la cui prima edizione fu pubblicata nel 1687, dove viene presentato un procedimento ricorsivo per risolvere l'equazione di Keplero data da $x - e \sin(x) = M$. Tuttavia non si può ancora parlare di un algoritmo definito in maniera rigorosa per poter risolvere equazioni del tipo $f(x) = 0$. [13]

Nel 1690, Joseph Raphson pubblicò il trattato *Analysis aequationum universalis (Analisi universale delle equazioni)*, in cui presenta un nuovo metodo per risolvere equazioni polinomiali. Raphson presenta più di 30 esempi, utilizzando polinomi fino al grado 10. Tra questi, ritroviamo l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ trattata da Newton. Il metodo di Raphson è equivalente a quello di Newton, ma Raphson usa una stessa formula in modo ricorsivo per ottenere valori sempre più accurati della soluzione, mentre Newton generava dei polinomi intermedi per arrivare allo stesso risultato. La formulazione di Raphson rappresenta dunque un significativo sviluppo del metodo, sebbene sia limitato alla famiglia delle equazioni polinomiali. Questo trattato ebbe tanto successo che, grazie ad esso, Raphson entrò a far parte della Compagnia della Royal Society. E nel Journal Book della Royal Society possiamo leggere il primo riferimento a questo lavoro che ha reso famoso il nome di Raphson, legandolo per sempre al metodo che oggi chiamiamo, appunto, di Newton-Raphson. Infatti, l'astronomo e matematico Edmond Halley presentò il libro di Raphson dove *egli introduce un notevole miglioramento al metodo per la risoluzione di ogni sorta di equazioni, mostrando come estrarre le loro radici, applicando una regola generale che raddoppia le cifre note della radice ad ogni operazione. Perciò ripetendo il procedimento 3 o 4 volte, egli trova la radice esatta a 8 o 10 cifre.* [11]

Tra Newton e Raphson non sembra che ci siano stati molti contatti e sulla vita di Raphson sono noti ben pochi dettagli. Entrambi, tuttavia, in modi diversi, avevano tracciato la strada del metodo che prende il loro nome.

Inizialmente, il metodo di Newton e quello di Raphson furono visti e applicati come due metodi distinti. Fu solo nel 1798 che Lagrange osservò che *i due metodi sono in fondo lo stesso presentato in modo differente*, sebbene la tecnica di Raphson fosse più semplice di quella di Newton. E fu sempre Lagrange a formulare il metodo nel modo che conosciamo oggi, usando la notazione $f'(x)$ per indicare la derivata della funzione f .

Per completare il quadro storico del metodo, dobbiamo, però, aggiungere anche il contributo dato da un altro matematico, Thomas Simpson, che, nel 1740 (quindi prima di Lagrange) pubblicò un libro

dal titolo *Essays on several curious and useful subjects, in speculative and mix'd mathematicks* (*Saggi su diversi argomenti curiosi e utili, in matematica speculativa e mista*), dove presenta un nuovo metodo per la soluzione di equazioni in numeri. Egli non fa riferimento al lavoro dei due predecessori ma le indicazioni che dà portano esattamente al metodo di Newton-Raphson, descritto in termini di *flussi*, che corrispondono alle nostre derivate di funzioni [10]. Il suo lavoro presenta, quindi, la prima formulazione per risolvere equazioni non lineari basata sull'uso delle derivate. Il suo contributo fu significativo ma rimase nell'ombra fino all'inizio del 1900 quando lo storico della matematica Florian Cajori ricollocò al giusto posto il contributo di Simpson nell'ambito del metodo di Newton-Raphson [5].

Inizialmente, dunque, il metodo venne usato facendo riferimento o solo a Newton o solo a Raphson, ma senza nessun riferimento a Simpson. Nel corso del 1800 alcuni lavori di Fourier trattarono il metodo attribuendolo a Newton, e, data la popolarità di Fourier, il metodo si diffuse sotto il nome di *metodo di Newton*.

Anche oggi ci si riferisce ad esso o come *metodo di Newton* o come *metodo di Newton-Raphson*. Purtroppo il contributo di Simpson è rimasto ancora in ombra, altrimenti, per essere precisi, lo dovremmo chiamare *metodo di Newton-Raphson-Simpson*.

4. – Il metodo di Newton-Raphson quando ci sono più radici

Newton, Raphson e Simpson, quando avevano descritto il loro metodo, non avevano certamente idea del fatto che potesse essere legato ai frattali.

Una prima idea di frattale si ha con Leibniz, contemporaneo di Newton, che introduce il concetto di *esponente frazionale* per riferirsi a proprietà di scala nell'auto-similarità. Ma presto si perde interesse per questo argomento e dobbiamo aspettare la fine del 1800 perchè si ritorni a parlare di auto-similarità, quando Georg Cantor introduce l'insieme che porta il suo nome, che ha la proprietà dell'auto-similarità e che può essere considerato un primo frattale.

Il metodo di Newton-Raphson, nel frattempo, continua a fare il suo lavoro come metodo per approssimare radici di funzioni. È un metodo che va molto bene se la radice da approssimare è una sola, partendo da un valore iniziale vicino alla radice. Ci sono, tuttavia, dei casi speciali in cui il metodo non va come vorremmo.

- Se vogliamo, ad esempio, approssimare la radice $\xi = 1$ della funzione $f(x) = (x - 1)^2$, poichè la radice va contata due volte, il metodo di Newton-Raphson converge ma non più con convergenza quadratica. Quando la funzione ha una radice multipla, il metodo diventa *lento*, a convergenza lineare.
- Non conviene partire da un'approssimazione iniziale con tangente quasi parallela all'asse delle ascisse, perchè ci farebbe allontanare dalla radice che vogliamo approssimare.
- Non dobbiamo trovarci in casi particolari in cui lo schema di Newton-Raphson porta ad una successione di approssimazioni che si alternano, come un pendolo, tra due valori posti ai lati della radice che vogliamo approssimare.

A parte questi casi *particolari*, il metodo di Newton-Raphson è molto buono per approssimare radici di funzioni che ammettono un'unica radice reale.

Ma cosa succede se la funzione ha più radici? Vediamolo con un esempio, esaminando la funzione $f(x) = x^3 - 3x$ che possiamo riscrivere come $f(x) = x(x^2 - 3)$. Le sue radici sono, dunque, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = +\sqrt{3}$ e $\xi_3 = -\sqrt{3}$.

Ci aspettiamo che, partendo da un'approssimazione iniziale vicina ad una delle tre radici, il metodo converga a quella radice. In realtà, ci sono dei punti iniziali che non portano alla radice che ci aspettiamo.

Se, ad esempio, prendiamo $x_0 = 0.9$ o $x_0 = 0.85$, ci aspettiamo che la successione di valori converga alla radice ξ_1 oppure a ξ_2 e invece converge alla radice negativa ξ_3 , come possiamo vedere dalla Figura 2. Ci aspettiamo, allora, che partendo da $x_0 = 0.8$ il metodo converga ancora a ξ_3 , e invece converge a ξ_2 . Analogamente, se partiamo da $x_0 = -0.85$ o $x_0 = -0.9$ il metodo converge a ξ_2 ; se, invece, partiamo da $x_0 = -0.8$, il metodo converge a ξ_3 .

Cosa succede allora? Per ogni radice c'è come un bacino di attrazione verso una delle radici: se par-

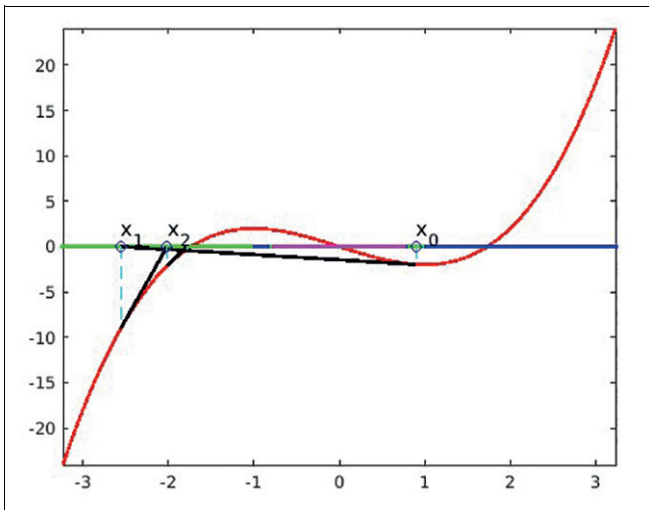


FIGURA 2 – Implementazione del metodo di Newton-Raphson sulla funzione $f(x) = x^3 - 3x$. Si vede che, partendo da $x_0 = 0.9$, il metodo converge alla radice negativa. Sull'asse reale è evidenziato il bacino di attrazione per ciascuna delle radici (in magenta per $\xi_1 = 0$, in verde per la radice negativa ξ_2 e in blu per la radice positiva ξ_3 . Nell'intervallo $] - 1, 1[$, non abbiamo solo il colore magenta, come ci si potrebbe immaginare!

tiamo in quel bacino, la successione converge alla radice giusta. Ma in questo esempio qualcosa non torna sui bacini di attrazione! Infatti, ricordando le caratteristiche del metodo di Newton-Raphson, possiamo scegliere come x_0 tutti i punti dell'asse reale, ad eccezione di quelli in cui $f'(x_0)$ si annulla. Dal momento che $f'(x) = 3x^2 - 3$, dobbiamo escludere i punti $x_0 = \pm 1$. Quindi, per $x_0 > 1$ ci aspettiamo che il metodo converga alla radice ξ_2 , per $x_0 < 1$ ci aspettiamo che il metodo converga alla radice ξ_3 e che per $x_0 \in] - 1, 1[$ il metodo converga a ξ_1 . Se facciamo alcune prove in quest'ultimo intervallo, succedono però le cose strane che abbiamo notato in precedenza. Notiamo che, prendendo punti iniziali molto vicini a $\xi_1 = 0$, il metodo converge a ξ_1 oscillando con valori positivi e negativi. Se $x_0 > 0$, x_1 è negativo e, viceversa, se $x_0 < 0$, x_1 è positivo.

Sviluppando la formula del metodo di Newton-Raphson per l'esempio che stiamo studiando, si arriva alla seguente formula:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n}{3x_n^2 - 3} = \frac{3x_n^3 - 3x_n - x_n^3 + 3x_n}{3x_n^2 - 3} = \\ &= \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 3}. \end{aligned}$$

Cerchiamo qual è il valore più grande per x_0 in questo intervallo senza che il metodo entri nel gioco del pendolo descritto in precedenza. Il valore limite si ha quando $x_1 = -x_0$. Per semplicità di calcoli, scriviamo la formula senza i pedici: deve essere

$$-x = \frac{2x^3}{3x^2 - 3} \implies -3x^3 + 3x = 2x^3.$$

Arriviamo a

$$5x^3 - 3x = 0, \text{ ossia } x(5x^2 - 3) = 0.$$

Come soluzioni, troviamo $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3/5} = \pm 0.77459667$. Ciò significa che, per avere convergenza alla radice ξ_1 , non dobbiamo prendere come punti iniziali i valori $x_0 = \pm\sqrt{3/5}$, altrimenti entriamo in una sequenza infinita di valori che si alternano e non portano a nessuna convergenza. Di conseguenza, l'intervallo $] -\sqrt{3/5}, +\sqrt{3/5}[$ rappresenta il bacino di attrazione per la radice ξ_1 .

Gli intervalli $] - 1, -\sqrt{3/5}[$ e $]\sqrt{3/5}, +1[$ sono comunque intervalli da cui possiamo scegliere l'approssimazione iniziale x_0 e ci aspettiamo che appartengano al bacino di attrazione delle altre due radici.

Esaminiamo l'intervallo $] +\sqrt{3/5}, +1[$. Il comportamento che vedremo sarà simile anche nell'altro intervallo.

Se prendiamo x_0 a sinistra di $+1$ i valori della successione generati dal metodo di Newton-Raphson diventano negativi facendo spostare le approssimazioni nel bacino di attrazione della radice ξ_3 . Con valori di x_0 via via più piccoli di 1, tuttavia, arriveremo ad un certo punto per cui $x_1 = -1$ e, in questo caso, il metodo si interromperà perchè avremo una derivata uguale a zero. Qual è questo valore di x_0 ? Applichiamo il metodo con x_0 incognita, per arrivare a $x_1 = -1$.

$$-1 = \frac{2x_0^3}{3x_0^2 - 3} \implies 3 - 3x_0^2 = 2x_0^3 \implies 2x_0^3 + 3x_0^2 - 3 = 0.$$

Troviamo $x_0 = 0.8064439$. Perciò, prendendo $x_0 \in]0.8064439, 1[$, il metodo converge alla radice negativa ξ_3 . Per simmetria, prendendo $x_0 \in] - 1, -0.8064439[$, il metodo convergerà alla radice positiva ξ_2 .

Cosa succede se ci muoviamo a sinistra di 0.8064439? Questa volta entriamo nel bacino di at-

trazione dell'altra radice, ζ_2 , fino a che non troviamo un x_0 che ci porta a $x_1 = -0.8064439$:

$$-0.8064439 = \frac{2x_0^3}{3x_0^2 - 3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2.4193317 - 2.4193317x_0^2 = 2x_0^3,$$

ossia

$$2x_0^3 + 2.4193317x_0^2 - 2.4193317 = 0.$$

Otteniamo $x_0 = 0.7797718$. L'intervallo $]0.7797718, 0.8064439[$, più piccolo del precedente, entra nel bacino di attrazione della radice ζ_2 . Il ragionamento va ancora avanti, all'infinito, portando alla creazione di intervalli, via via più piccoli, in cui si alterna la convergenza del metodo verso le due radici ζ_2 e ζ_3 , rivelando l'auto-similarità tipica dei frattali. La sequenza di numeri che viene generata, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.8064439$, $b_3 = 0.7797718$, $b_4 = 0.7754556$, $b_5 = 0.7747397$, $b_6 = 0.7746205$, ... presenta un'altra proprietà interessante: genera degli intervalli la cui ampiezza decresce geometricamente. Infatti, il rapporto tra le lunghezze degli intervalli tende a 6: $\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_2} = 7.25$, $\frac{b_3 - b_2}{b_4 - b_3} = 6.17$, $\frac{b_4 - b_3}{b_5 - b_4} = 6.03$, $\frac{b_5 - b_4}{b_6 - b_5} = 6.00$. All'interno di questo caos troviamo qualcosa che si mantiene costante! Il metodo di Newton-Raphson si sta comportando in modo caotico: è il cosiddetto *effetto farfalla* descritto per primo da E. Lorenz ad un convegno nel 1972 [8]. In un sistema di equazioni descritte per studiare la convezione nell'atmosfera, Lorenz si accorse che bastavano variazioni piccolissime alle condizioni iniziali per avere risultati diversi e non prevedibili. Il paragone fatto da Lorenz per spiegare in modo semplice questo fenomeno è con il battito di ali di una farfalla: un battito di ali di una farfalla in una parte del mondo potrebbe influenzare la situazione meteorologica a centinaia di chilometri di distanza! Nell'esempio di Newton-Raphson, basta muoversi di poco nell'intervallo $] \sqrt{3/5}, 1[$ (e nell'altro per simmetria), per avere l'alternanza di convergenza da una radice positiva alla negativa. Il caos è fortemente legato ai frattali. Quindi non ci meravigliamo di questo fenomeno che abbiamo appena osservato.

Per vedere meglio la convergenza all'una o all'altra radice, in Figura 3 abbiamo fatto il grafico dei



FIGURA 3 - Bacini di attrazione a partire dall'intervallo $]a = \sqrt{3/5}, b_1 = 1[$ (in alto) fino ad arrivare all'intervallo $]a, b_6 = 0.7746205[$. Il verde indica il bacino di attrazione alla radice negativa, mentre il blu indica il bacino di attrazione alla radice positiva.

bacini di attrazione nell'intervallo $] \sqrt{3/5}, 1[$, prendendo sottointervalli sempre più piccoli (posti in Figura dall'alto verso il basso): l'estremo sinistro dell'intervallo è fissato a $a = \sqrt{3/5}$ mentre l'estremo destro parte da b_1 , poi è b_2 , fino ad arrivare a b_6 . In questo modo, si può subito notare l'alternanza della convergenza alle due radici (l'alternarsi dei colori verde e blu), man mano che si scende negli intervalli sempre più piccoli, che, per semplicità, non abbiamo riportato in scala.

5. – Il metodo di Newton-Raphson per approssimare radici complesse

L'esempio precedente ci ha fatto conoscere un comportamento particolare del metodo di Newton-Raphson, che, in un certo senso, fa perdere le certezze acquisite sul metodo. Quello che va bene, teoricamente, per funzioni che hanno un'unica radice reale, non è più certo quando le radici sono più di una.

La spiegazione di questo tipo di comportamento, viene dalla geometria dei frattali e può essere studiata considerando il metodo di Newton-Raphson nel campo dei numeri complessi.

Proviamo ad applicare il metodo di Newton-Raphson a funzioni complesse e, in particolare, a polinomi di cui vogliamo approssimare le radici e per

i quali sappiamo quali sono le radici esatte in modo da poter verificare la convergenza del metodo. Scegliamo i polinomi per tre motivi:

- sappiamo che un polinomio di grado n ammette sempre n radici, che possono essere reali e/o complesse e coniugate;
- possiamo sempre lavorare con polinomi le cui radici sono note;
- il metodo di Newton-Raphson ci permette di creare, con essi, dei grafici meravigliosi, dei frattali, facendoci sentire orgogliosi di averli *disegnati* noi!

Riscriviamo, quindi, il metodo partendo da z_0 approssimazione iniziale (reale o complessa) e applicando la formula

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

5.1 – Esempio del metodo con radici complesse.

Partiamo da una funzione molto semplice, $f(z) = z^2 + 1$. Sappiamo che questa funzione non ammette radici reali ma ha due radici complesse e coniugate $z = \pm i$. Se applichiamo il metodo di Newton-Raphson partendo da valori reali, lo schema restituisce sempre valori reali e quindi non convergerà mai. Se partiamo da valori iniziali complessi, il metodo convergerà all'una o all'altra soluzione. Come individuare i bacini di attrazione verso l'una o l'altra radice? Il problema se lo era posto già verso la fine del 1800, il matematico sir Arthur Cayley [3]. Cayley aveva visto che per polinomi di secondo grado, aventi due radici z_1 e z_2 , la perpendicolare al punto medio del segmento che unisce le due radici divide il piano complesso in due semipiani, ciascuno dei quali è bacino di attrazione per z_1 e per z_2 .

Il problema di definire i bacini di attrazione delle radici di una funzione presenta, dunque, una risposta facile ed elegante per polinomi di grado due, ma risulta *considerevolmente difficile*, prendendo in prestito le parole di Cayley, già per polinomi di grado tre (si veda l'esempio che abbiamo visto prima). Si deve aspettare il lavoro dei matematici francesi Pierre Fatou [9] e Gaston Julia [6], intorno al 1918, per capire cosa succede ai polinomi di grado maggiore o uguale a tre. Fatou e Julia la-

voravano su problemi legati a sistemi matematici complessi e sulle iterazioni di funzioni razionali. Dopo sessant'anni, Mandelbrot riprese il lavoro di Julia per capire come si comportano queste equazioni quando vengono iterate. Ma solo intorno al 1980 si possono vedere le prime immagini dei frattali, grazie ai computer che permettono di realizzare grafici di alto livello. Mandelbrot lavorò dapprima su un problema più semplice rispetto a quello proposto da Julia e poi ritornò al problema di Julia. L'insieme di Mandelbrot viene generato studiando l'iterazione $z_{n+1} = z_n^2 + c$ con c che varia in una regione del piano complesso, partendo da un valore iniziale z_0 fissato, mentre l'insieme di Julia, per la stessa iterazione, considera $z_{n+1} = z_n^2 + c$ con c fissato nel piano complesso e facendo variare il punto iniziale z_0 . In genere, dato uno schema iterativo $z_{n+1} = f(z_n)$, partendo da z_0 nel piano complesso, è possibile che la successione di valori z_{n+1} si allontani indefinitamente dall'origine (i punti z_0 sono di tipo *repulsivo*) oppure resti limitata (i punti z_0 sono di tipo *attrattivo*). L'insieme di Julia è definito dalla frontiera che separa i punti z_0 repulsivi da quelli attrattivi. Osserviamo che, se cerchiamo l'insieme di Julia lavorando sull'iterazione $z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n)$, ossia sulla formula del metodo di Newton-Raphson, troviamo la frontiera dei bacini di attrazione delle radici della funzione f !

Tornando alla formula più semplice, data da $z_{n+1} = z_n^2 + c$, i frattali vengono generati cercando per quali valori di c o di z_0 (a seconda che si voglia generare l'insieme di Mandelbrot o quello di Julia) le iterazioni portano a punti che sono a distanza limitata dall'origine del piano complesso, oppure *esplosione*, cioè se ne allontanano indefinitamente.

Nello studio di queste formule iterative si inserisce, quasi in modo naturale, anche il metodo di Newton-Raphson. Il matematico John Hubbard, che è considerato uno dei massimi esperti dell'insieme di Mandelbrot, iniziò a lavorare nel 1976 proprio sul metodo di Newton-Raphson applicato nel campo complesso. Studiando questo metodo, trovò una via diversa, ma equivalente, per generare frattali. Nel 1978, uno degli studenti di Hubbard incontrò Mandelbrot ad un convegno e gli mostrò uno dei grafici realizzati da Hubbard. Mandelbrot non aveva ancora realizzato il frattale che prende il suo nome. Dopo qualche giorno, scrisse una lettera

a Hubbard in cui scrisse: *Quando ho iniziato a testare i lavori di Fatou e Julia, avevo in mente di fare queste cose, ma non ho mai trovato il coraggio di farlo. Tuttavia, posso dire che aspettavo queste immagini da molto molto tempo* [7]. Hubbard non aveva ancora compreso, in quel periodo, il pieno significato delle sue immagini. Ma il metodo di Newton-Raphson era ormai legato indissolubilmente al mondo dei frattali.

6. – Creare frattali dal metodo di Newton-Raphson

Quando applichiamo il metodo di Newton-Raphson nel campo complesso, possiamo generare dei meravigliosi frattali andando a disegnare il bacino di attrazione per ciascuna delle radici da approssimare. Più potente è il computer che abbiamo a disposizione per generare i grafici, più accurati saranno i risultati che vedremo.

Per ciascuna funzione che studieremo, partiremo da un'approssimazione iniziale z_0 , facendola variare in un rettangolo del piano complesso che contiene tutte le radici che vogliamo approssimare (perciò è importante lavorare con funzioni di cui sono note le radici esatte). Faremo due grafici:

- il primo grafico colora ciascun punto iniziale z_0 con un colore diverso a seconda della radice cui converge. Quindi, se abbiamo una funzione con due radici, assoceremo due colori a ciascuna radice e il grafico avrà due colori. Se la funzione ha tre radici, considereremo tre colori e così via;
- il secondo grafico associa a ciascun punto iniziale z_0 il numero di iterazioni effettuate per arrivare a convergenza, numero che può variare da 0 (se z_0 coincide con una delle radici da approssimare) fino al numero massimo di iterazioni consentite, che può essere raggiunto se il metodo non converge o converge molto lentamente.

Implementiamo al computer un pseudo-codice di questo tipo:

Input: f, f' , tolleranza tol , numero massimo di iterazioni $itmax$

Input: vettore con le radici della f

Input: vettore con i colori associati ad ogni radice

Output: due grafici, con i frattali generati dal metodo di Newton-Raphson

- 1 Definire due interi m e n per costruire una griglia di punti in un rettangolo del piano complesso che contenga tutte le radici della f
- 2 Creare una griglia di punti (X_{jk}, Y_{jk}) nel rettangolo, con $j = 1, \dots, m$ e $k = 1, \dots, n$
- 3 Creare due matrici C e D con tutti zeri, di dimensione $m \times n$;
- 4 **for** $j = 1$ *fino a* $j = m$ **do**
- 5 **for** $k = 1$ *fino a* $k = n$ **do**
- 6 definire l'approssimazione iniziale $Z_0 = X_{jk} + iY_{jk}$
- 7 applicare il metodo di Newton-Raphson
- 8 **if** *il metodo converge* **then**
- 9 porre $C(j, k) =$ colore associato alla radice cui converge
- 10 **end**
- 11 porre $D(j, k) =$ numero di iterazioni effettuate
- 12 **end**
- 13 **end**
- 14 Fare il grafico della matrice C sulla griglia di punti
- 15 Fare il grafico della matrice D sulla griglia di punti

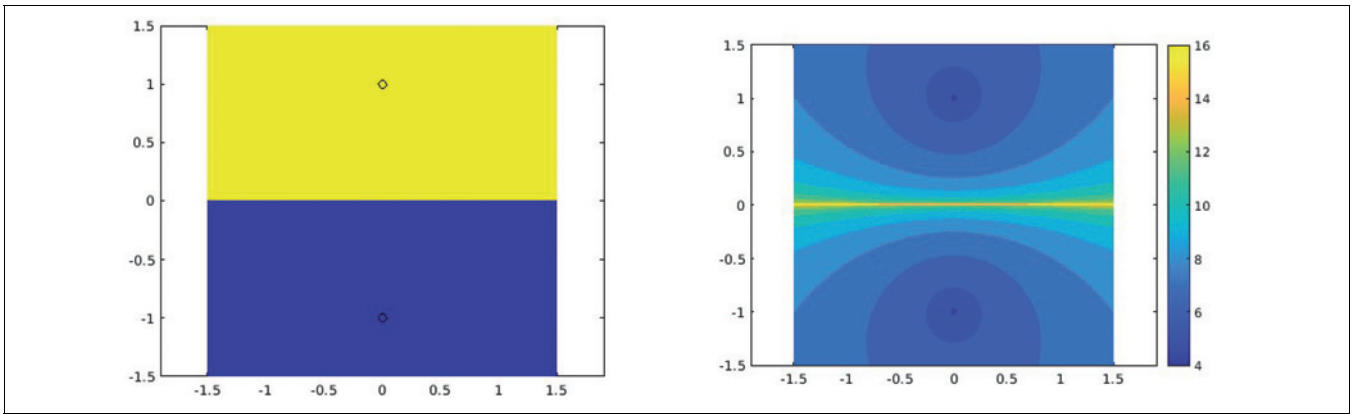


FIGURA 4 – A sinistra, bacino di attrazione per $f(z) = z^2 + 1$. A destra, il numero di iterazioni conseguite per arrivare a convergenza.

Per ottenere i nostri risultati, abbiamo implementato l'algoritmo in MATLAB con una tolleranza uguale a 10^{-14} , un numero massimo di iterazioni pari a 200 e generando una griglia di punti con $m = n = 500$.

6.1 – Radici di $f(z) = z^2 + 1$

Prendiamo in esame la funzione per la quale Cayley aveva individuato i bacini di attrazione. In Figura 4, a sinistra, osserviamo come i due bacini di attrazione siano ciascuno un semipiano la cui linea di demarcazione è perpendicolare al punto medio del segmento che unisce le due radici (segnate in cerchietto). Nel secondo grafico, a destra di Figura 4, sono segnate le iterazioni del metodo di Newton-Raphson: il colore va dal blu intenso al giallo man mano che aumentano le iterazioni. In questo esempio, il giallo corrisponde a 16 iterazioni: siamo vicino all'asse reale, dove non si ha convergenza nè all'una nè all'altra radice in quanto il metodo di Newton-Raphson, partendo da

un'approssimazione reale non può restituire valori complessi. La griglia di punti che abbiamo creato non ha punti sull'asse reale, perciò il numero massimo di iterazioni, ossia non convergenza del metodo, non si vede, ma per punti iniziali vicini all'asse reale, il metodo fa più *fatica* per convergere all'una o all'altra delle radici.

6.2 – Radici di un polinomio di terzo grado

Vediamo ora cosa succede se prendiamo un polinomio di terzo grado, che può avere tutte radici reali oppure una radice reale e le altre complesse e coniugate.

Consideriamo l'esempio che avevamo studiato in Sezione 4, $f(z) = z^3 - 3z$, studiandola nel campo complesso. Ci aspettiamo di vedere un comportamento *strano* per i bacini di attrazione non solo sull'asse reale ma in tutto il piano complesso, in quello che dovrebbe essere il bacino di attrazione della radice $\xi_1 = 0$. Ed è proprio quello che osserviamo dalla Figura 5. Oltre ai due bacini di attrazione ben definiti

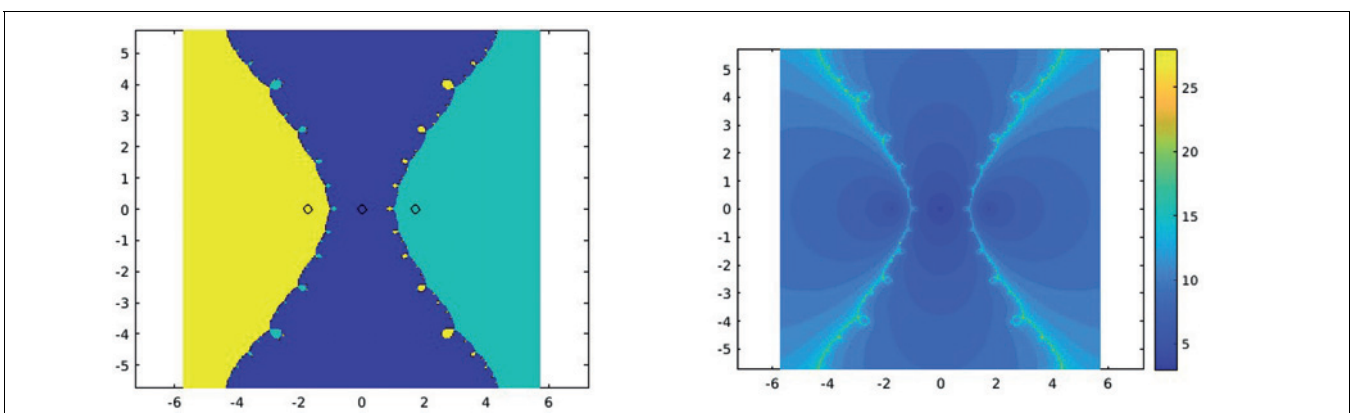


FIGURA 5 – A sinistra, bacino di attrazione per $f(z) = z^3 - 3z$. A destra, il numero di iterazioni conseguite per arrivare a convergenza.

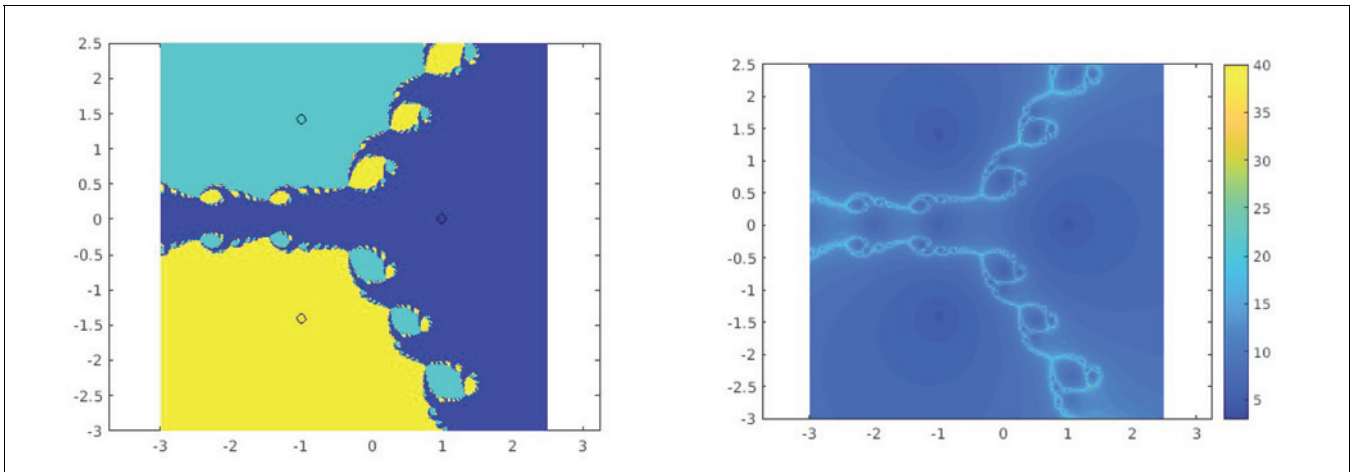


FIGURA 6 – A sinistra, bacino di attrazione per $f(z) = z^3 + z^2 + z - 3$. A destra, il numero di iterazioni conseguite per arrivare a convergenza.

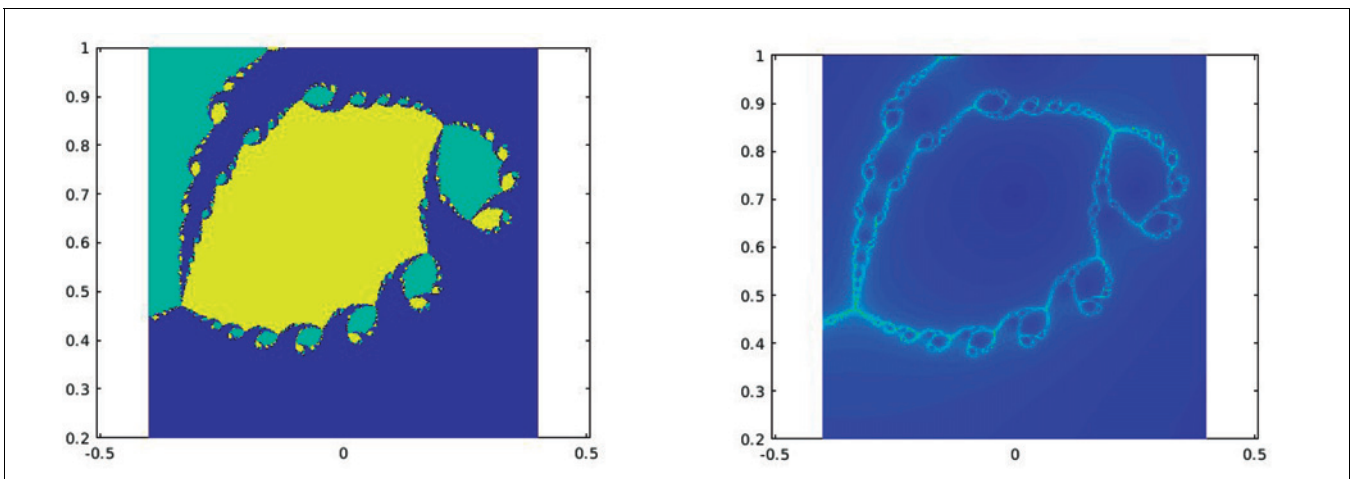


FIGURA 7 – Zoom nel rettangolo $[-0.4, 0.4] \times [0.2, 1]$. A sinistra, bacino di attrazione per $f(z) = z^3 + z^2 + z - 3$.

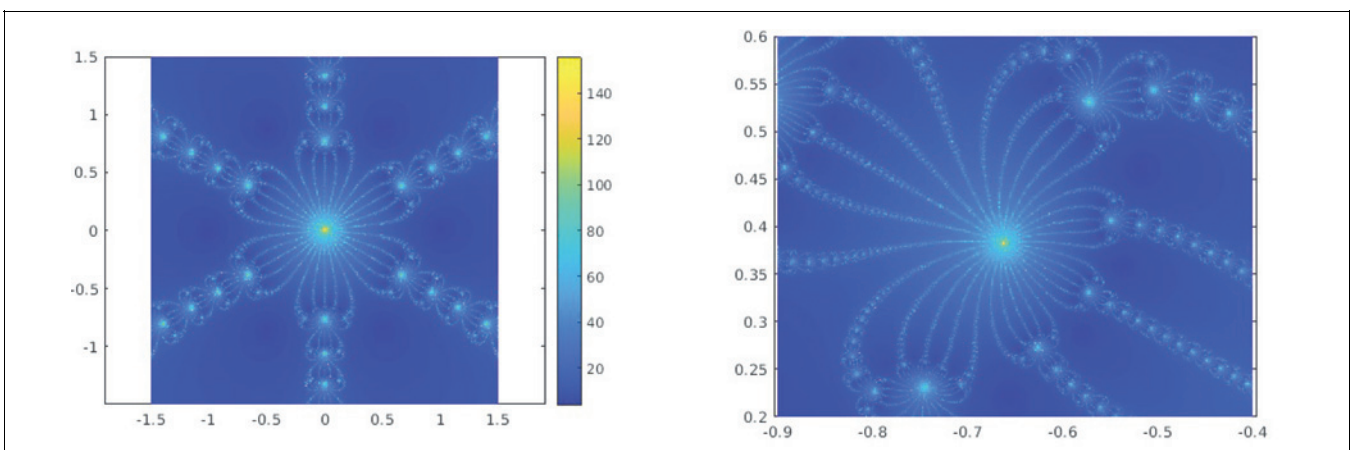


FIGURA 8 – A sinistra, numero di iterazioni per arrivare a convergenza per la funzione $f(z) = z^6 - 1$. A destra, zoom nel rettangolo $[-0.9, -0.4] \times [0.2, 0.6]$.

per le radici $\xi = \pm\sqrt{3}$, di colore giallo e celeste, vediamo che, al centro, il bacino di attrazione per la radice $\xi_1 = 0$ è intervallato da piccole zone che si alternano di colore giallo e celeste. L'immagine a destra di Figura 5, che rappresenta le iterazioni eseguite, ci mostra chiaramente dove siano localizzate le radici (il blu intenso) e, allo stesso tempo, ci rimanda pienamente alla bellezza di un frattale.

Consideriamo ora il polinomio $f(z) = z^3 + z^2 + z - 3$ che ha come radici $\xi_1 = 1$ e $\xi_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$. Ora i bacini di attrazione producono delle immagini spettacolari (si veda Figura 6). Se proviamo a fare uno zoom, (e per farlo bene rieseguimo nuovamente il codice in un rettangolo più piccolo, in cui vediamo i ricami formati dai vari bacini di attrazione), possiamo notare come ritornino a crearsi, in piccolo, i ricami visti in grande: ritroviamo una delle caratteristiche dei frattali.

6.3 – Radici di polinomi di grado più elevato

Aumentando il grado dei polinomi, aumenta la complessità del frattale che viene generato applicando il metodo di Newton-Raphson e, di conseguenza, anche la sua bellezza. Prendiamo, ad esempio, il polinomio $f(z) = z^6 - 1$. In Figura 8 abbiamo posto, a sinistra, il grafico generato considerando il numero di iterazioni per arrivare a convergenza. A destra, invece, vi è uno zoom in una piccola porzione del piano complesso.

7. – Variazioni sul tema

Il metodo di Newton Raphson non ha più convergenza quadratica se applicato per approssimare radici multiple. Per ripristinare l'ordine di convergenza, posso-

no essere apportate alcune modifiche al metodo [2].

- Se è nota la molteplicità m della radice da approssimare, il metodo viene rilassato secondo la seguente formula (che indichiamo con la sigla *NRril*)

$$z_{n+1} = z_n - m \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

In questo modo il metodo converge di nuovo quadraticamente. Tuttavia non sempre si conosce quale sia la molteplicità della radice, e questo va a svantaggio del metodo.

- Un'altra strada è di considerare la funzione

$$u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$$

che ha come radici le stesse della funzione f . Applicando il metodo di Newton-Raphson a questa funzione, si ripristina l'ordine di convergenza quadratico senza bisogno di conoscere la molteplicità della radice. Lo svantaggio è che deve essere calcolata anche la derivata seconda della f , perché ora il metodo diventa

$$z_{n+1} = z_n - f(z_n)f'(z_n) \left((f'(z_n))^2 - f(z_n)f''(z_n) \right)^{-1}.$$

Chiameremo questa variante del metodo di Newton-Raphson con la sigla *NRder2*.

Se applichiamo a queste due variazioni del metodo di Newton-Raphson la procedura per generare frattali, riusciamo a creare, partendo dalla stessa funzione, delle immagini tutte diverse tra loro e tutte bellissime [12].

Lo vediamo considerando la funzione $f(z) = z^\alpha(z^\beta - 1)$ che ha la radice $z = 0$ con molteplicità α .

Riportiamo i grafici generati considerando il numero di iterazioni effettuate per arrivare a convergenza, confrontando i tre algoritmi, per la funzione $f(z) = z^2(z^6 - 1)$ (si veda la Figura 9) e per la fun-

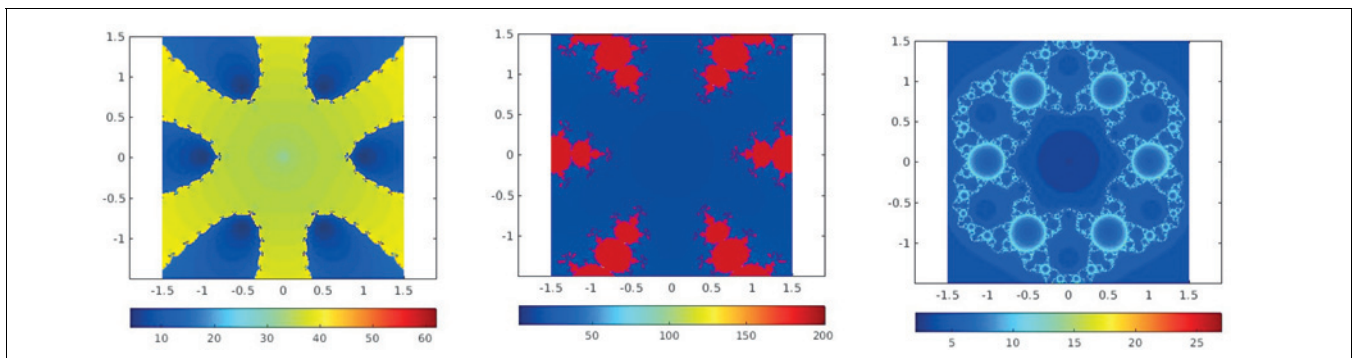


FIGURA 9 – $f(z) = z^2(z^6 - 1)$. A sinistra, il frattale risultante dal metodo di Newton-Raphson *standard*, al centro il frattale generato dal metodo *NRril* con $m = 2$, a destra il frattale generato dal metodo *NRder2*. La legenda in basso mostra il numero di iterazioni effettuate.

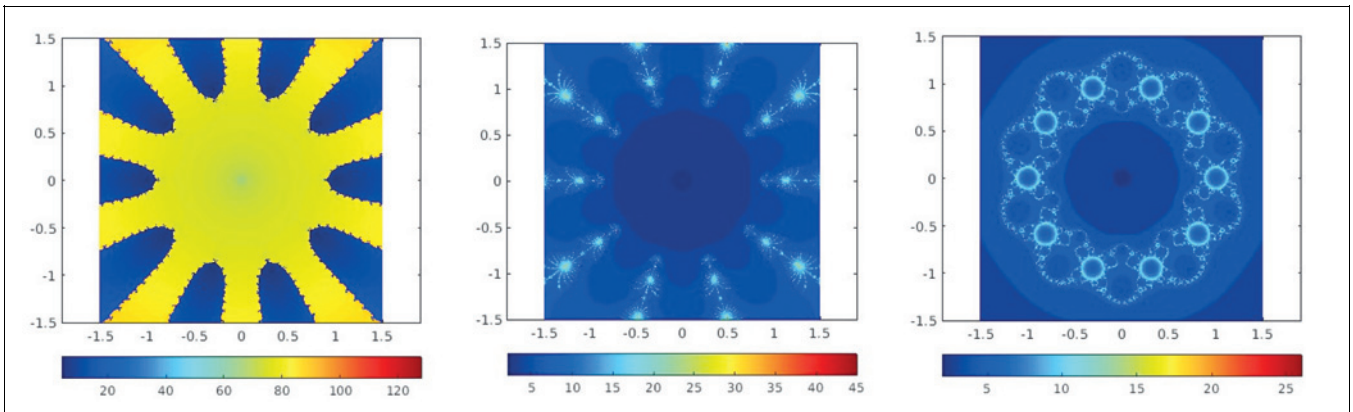


FIGURA 10 – $f(z) = z^4(z^{10} - 1)$. A sinistra, il frattale risultante dal metodo di Newton-Raphson *standard*, al centro il frattale generato dal metodo *NRrnl* con $m = 4$, a destra il frattale generato dal metodo *NRder2*.

zione $f(z) = z^4(z^{10} - 1)$ (in Figura 10). Il metodo più costoso, quello in cui va calcolata la $f''(z)$, dà i risultati più spettacolari.

Osserviamo come i frattali generati dalla variante *Nrder2* ci riportino alla mente alcuni mandala e i rosoni di alcune chiese romaniche o gotiche. Anche se i mandala e i rosoni delle chiese sono oggetti di arte e di architettura e non rappresentano oggetti frattali, nondimeno ritroviamo in essi alcune caratteristiche dei frattali quali la auto-similarità. Per quanto riguarda i rosoni delle chiese, sono stati fatti studi che li mettono in relazione con i frattali [1]. Per i mandala, invece, basta fare una semplice ricerca in rete, per vedere come si sia sviluppata tutta un'arte digitale per creare mandala tramite i frattali.

Il metodo di Newton-Raphson, quindi, ci può aiutare a creare nuovi mandala generando frattali e lasciando libera la nostra fantasia, sia per le funzioni su cui lavorare, sia per i grafici che saremo capaci di costruire. Inoltre, conoscere la storia che ha portato alla creazione di questi frattali accresce lo stupore e la meraviglia davanti alla bellezza delle immagini create.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. SAMPER, B. A. HERRERA *A study of the roughness of gothic rose windows*. Nexus Netw J, 18:397-417, 2016.
- [2] A. RALSTON, P. RABINOWITZ. *A First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New-York, 1978.
- [3] A. CAYLEY. *Desiderata and suggestions*: No. 3. the Newton-Fourier imaginary problem. American Journal of Mathematics, 2(3):97-97, 1879.
- [4] B. MANDELBROT BENOIT. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [5] F. CAJORI. *Historical note on the Newton-Raphson method of approximation*. The American Mathematical Monthly, 18(2):29-32, 1911.
- [6] J. GASTON. *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*. J. Math. Pures et Appl., 81:47-235, 1918.
- [7] J. HORGAN. *Mandelbrot set-to*. Scientific American, 262(4):30-35, 1990.
- [8] E. N. LORENZ. *The Essence of Chaos*. UCL Press, 1993.
- [9] P. FATOU *Sur les équations fonctionnelles*. Bulletin de la S. M. F., 47:161-271, 1919.
- [10] T. SIMPSON. *Essays on Several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks*, Illustrated by a Variety of Examples. London, 1740.
- [11] D. J. THOMAS, J. M. SMITH. Joseph Raphson, F.R.S. *Notes and Records of the Royal Society of London*, 44(2):151-167, 1990.
- [12] W. XINGYUAN, L. WEI. *The Julia set of Newton's method for multiple root*. Applied Mathematics and Computation, 172(1):101-110, 2006.
- [13] T. J. YPMA. *Historical development of the Newton-Raphson method*. SIAM Review, 37(4):531-551, 1995.



Annamaria Mazzia

Annamaria Mazzia è professoressa associata di Calcolo Numerico presso l'Università degli Studi di Padova. Si occupa di metodi numerici per la risoluzione di equazioni alle derivate parziali attraverso il Virtual Element Method. Ha pubblicato oltre 45 articoli su riviste nazionali e internazionali. Insegna Calcolo Numerico e Analisi Matematica 2 agli studenti di alcuni corsi di Laurea in Ingegneria e ha scritto diversi libri di programmazione in MATLAB utili nel campo della didattica.