

---

# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIUSEPPE SACCOMANDI

## **Il Problema Centrale della Teoria dell'Elasticità Non-Lineare Secondo Signorini**

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 9*  
(2024), n.1, p. 5–27.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI\\_2024\\_1\\_9\\_1\\_5\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_1_5_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# Il Problema Centrale della Teoria dell’Elasticità Non-Lineare Secondo Signorini

GIUSEPPE SACCOMANDI

Università degli Studi di Perugia e School of Mathematics, Statistics and Applied Mathematics, NUI Galway, Ireland  
E-mail: giuseppe.saccomandi@unipg.it

**Sommario:** *Nel 1942 Antonio Signorini, parlando della teoria dell’elasticità non-lineare durante un convegno internazionale presso l’INDAM, dichiara che nell’ambito di questa teoria:*

*... prima di ogni calcolo numerico si ha da affrontare un problema estremamente difficile di vera Fisica matematica: la scelta dell’espressione completa del potenziale elastico.*

*Signorini pensava a calcoli numerici che potessero indicare la teoria dell’elasticità non-lineare come un modello matematico adeguato a descrivere il comportamento di alcuni materiali. In questa nota si illustra come il problema di Signorini dal 1942 a oggi abbia attratto l’attenzione non solo dei meccanici ma anche di molti matematici. Si illustrano anche da un punto di vista storico i principali risultati ottenuti in questi ottanta anni e si indicano i problemi fisico-matematici che sono ancora aperti.*

**Abstract:** *In 1942, Antonio Signorini, speaking about the theory of non-linear elasticity at an international conference at INDAM, declared that within the framework of this theory:*

*“ ... before any numerical calculations one has to deal with an extremely difficult problem of true mathematical physics: the choice of the complete expression of the elastic potential.”*

*Signorini was thinking of numerical calculations that could indicate the theory of non-linear elasticity as a mathematical model suitable for describing the behavior of certain materials. This note illustrates how Signorini’s problem from 1942 to the present day has attracted the attention not only of mechanics community but also of many mathematicians. The main results obtained in these eighty years are also illustrated from a historical point of view, and some of the problems that are still open are indicated.*

## 1. – Introduzione

Molteplici sono le applicazioni di successo della matematica nei più svariati ambiti scientifici e tecnologici e questo non solo in ambiti ‘esotici’ ovvero associati ad aspetti tecnologicamente molto avanzati. Risulta immediato fare un elenco di modelli quantitativi che hanno un impatto fondamentale nel nostro quotidiano.

Un notevole e non banale esempio in questa categoria è senza dubbio la teoria matematica dell’elasticità lineare: una teoria di grande successo e comune

applicazione. Senza l’aiuto di questo modello non sarebbe possibile immaginare le moderne figure professionali nel campo dell’ingegneria aerospaziale, civile e meccanica.

Storicamente, con buona approssimazione, si può affermare che la meccanica dei solidi diventa una disciplina sperimentale con Galileo Galilei (1564-1642) e un disciplina quantitativa con Robert Hooke (1635-1703), il quale nel 1676 propone la proporzionalità tra deformazioni e sforzi nella celebre locuzione *ut tensio sic vis*. Bisogna comunque aspettare scienziati come Eulero (1707-1783) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) per vedere fiorire l’elasticità come una vera e propria teoria matematica.

*Accettato:* 22 aprile 2024.

Soprattutto dopo i risultati di Cauchy, Claude-Louis Navier (1785-1836) scrive le celebri equazioni che portano il suo nome e poi Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) con le sue soluzioni rivoluzionarie per sempre la scienza e la tecnica delle costruzioni.

Gaetano Fichera (1922-1996), in una bellissima memoria del 1977 [21], ci ricorda anche il contributo italiano a questa costruzione intellettuale e, limitandoci al passato più recente, tra i nomi ricordati da Fichera la figura di spicco è certamente quella di Antonio Signorini (1888-1963).

Signorini studia a Pisa e si laurea con Luigi Bianchi (1856-1928) con una tesi sulle trasformazioni di Baecklund. Quindi il suo docente di meccanica razionale, Gian Antonio Maggi (1856-1937) orienta la sua carriera accademica verso la meccanica razionale.

I primi lavori di Signorini sono comunque lontani dalla meccanica dei continui e in particolare dei solidi. Solo alla fine degli anni Venti del secolo scorso, passati i quarant'anni di età, egli comincia a studiare, con una certa sistematicità, la teoria non-lineare dell'elasticità. Una disciplina che oggi vanta applicazioni notevoli in diversi campi della scienza e della tecnica, come per esempio nello studio dei materiali elastomerici oppure della meccanica dei tessuti molli<sup>(1)</sup> e che risulta centrale in tutta la meccanica dei continui in quanto ad essa sono collegati, nel caso statico, la gran parte dei modelli atti a descrivere la reologia dei materiali più comuni, ma che allora era di interesse quasi esclusivamente accademico.

Nella meccanica dei continui si usa identificare un corpo materiale  $\mathcal{B}$  con una porzione dello spazio euclideo e per descrivere le deformazioni (o il moto di questo corpo) si introducono due configurazioni: quella di riferimento e quella attuale. La configurazione di riferimento permette di identificare il corpo  $\mathcal{B}$  per mezzo del vettore posizione  $\mathbf{X}$  di ogni suo singolo punto  $P$ . Con il simbolo  $\mathbf{x}$  si indica invece la posizione dello stesso punto  $P$  nella configurazione attuale: questa è la configurazione “deformata”, ovvero la configurazione all'istante  $t$ , del corpo

$\mathcal{B}$ . Usualmente le coordinate  $\mathbf{X}$  si indicano anche come *materiali* mentre quelle  $\mathbf{x}$  come *spaziali*.

Il moto di  $\mathcal{B}$  tra l'istante iniziale e quello attuale è quindi rappresentato dalla mappa  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ , che può essere anche scritta come  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  dove il vettore  $\mathbf{u}$  indica lo *spostamento*.

Ovviamente la funzione vettoriale  $\chi$  deve essere sufficientemente regolare e in particolare si richiede che il gradiente della deformazione

$$\mathbf{F} = \partial\chi/\partial\mathbf{X} = \mathbf{I} + \mathbf{H},$$

con  $\mathbf{H} = \nabla\mathbf{u}$ , sia invertibile, ovvero  $\det\mathbf{F} \neq 0$ .

Per determinare la funzione  $\chi$  è possibile usare delle leggi di bilancio, che sono leggi universali che mettono in relazione varie quantità meccaniche e termodinamiche come il moto, lo sforzo e l'energia e, in teorie di campo accoppiate, anche la temperatura e le quantità elettromagnetiche. Queste equazioni di bilancio sono un sistema non determinato che deve essere chiuso scegliendo opportune relazioni costitutive. Nel caso dell'elasticità isoterma è comune cercare un'equazione costitutiva per il tensore dello sforzo di Cauchy  $\mathbf{T}$  in funzione del gradiente della deformazione  $\mathbf{F}$ .

Il tensore di Cauchy permette di determinare, nella configurazione attuale, le forze di coesione che agiscono puntualmente tra le varie parti del corpo continuo. Le forze di coesione sono delle forze interne, e quindi un insieme di coppie di braccio nullo, ovvero il loro lavoro in uno spostamento rigido risulta nullo. Per questo motivo risulta naturale richiedere che le equazioni costitutive siano invarianti per moti rigidi e a partire da  $\mathbf{F}$  si preferisce costruire delle quantità oggettive come per esempio il tensore sinistro di Cauchy-Green

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}.$$

Così facendo si generalizza per un corpo continuo l'interazione *elastica* tra punti materiali della meccanica classica che si ottiene grazie alle forze posizionali di tipo centrale.

Nel caso lineare, essendo il vettore spostamento infinitesimo si deve avere che  $\mathbf{x} \approx \mathbf{X}$  si perde la distinzione tra coordinate spaziali e materiali. In questo caso è usuale considerare il tensore di deformazione infinitesimo

$$(1.1) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T \right],$$

<sup>(1)</sup> Con la locuzione *tessuti molli* si indicano tutti quei materiali biologici che non hanno la stessa densità dell'osso, come per esempio i vasi, i muscoli, i tendini, il grasso, . . . .

e lavorare con questa quantità geometricamente approssimata.

Con questi strumenti la famosa locuzione di Hooke si trasforma facilmente in formule come una relazione tra il tensore dello sforzo  $\mathbf{T}$  e il tensore  $\varepsilon$ . Nel caso di materiali isotropi lineari si ha dunque

$$(1.2) \quad \mathbf{T} = 2\mu \varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon) \mathbf{I},$$

dove  $\mu$  e  $\lambda$  sono due costanti costitutive e  $\mathbf{I}$  è il tensore identità. La (1.2) si deduce anche da un'energia elastica,  $W$ , che risulta essere una forma quadratica nelle componenti del tensore di deformazione, ovvero

$$W = \mu \text{tr}(\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \lambda [\text{tr}(\varepsilon)]^2.$$

Questa forma è definitiva positiva se  $\mu > 0$  e  $3\lambda + 2\mu > 0$ .

Quando Signorini cominciò ad interessarsi alla teoria matematica dell'elasticità, la teoria lineare era già molto sviluppata, infatti esistevano a riguardo diversi trattati e manuali, ma poco era noto per quanto riguardava la teoria non-lineare. Ovviamente alcuni pionieri di questo argomento, come per esempio Gabrio Piola (1794-1850), avevano chiarito diversi fatti sui principi generali della meccanica dei continui non-lineare e una testimonianza di tutto questo si trova già nel libro di fine ottocento dei fratelli Eugène (1866-1931) e François (1852-1914) Cosserat.

Per quanto riguardava la risoluzione di problemi specifici risultano solo pochi lavori precedenti al 1930 indirizzati in questa direzione nell'ambito dell'elasticità non-lineare in quanto teoria tridimensionale. Tra questi si ricorda un lavoro di Gabriella Armani, tesista di Vito Volterra (1860-1940), del 1915 e un lavoro di Léon Brillouin (1899-1969) del 1925. Il lavoro della Armani determina una forma specifica del potenziale elastico non lineare che permette di studiare alcune deformazioni di una sfera elastica isotropa in modo equivalente al caso lineare. Signorini era sicuramente a conoscenza di questo lavoro. Brillouin si interessa al problema della pressione di radiazione, ovvero di come sia possibile eccitare usando un'onda di pressione delle onde trasverse in un solido elastico<sup>(2)</sup>. Signorini

---

<sup>(2)</sup> Questo è un problema evidentemente non-lineare in quanto nel caso lineare, isotropo le onde longitudinali non sono accoppiate con quelle trasverse.

forse non conosceva i dettagli di questo lavoro di Brillouin anche se sicuramente aveva letto l'articolo storico e bibliografico sull'argomento di Roberto Marcolongo (1862-1943) [32] e conosceva i lavori del padre Marcel Brillouin (1854-1948) che in questa celebre nota vengono ricordati.

Soprattutto in quel periodo storico ben poco si conosceva sulla natura delle equazioni costitutive non-lineari. In particolare ancora non si aveva nessuna idea della versione generale, e non semplicemente quadratica, del potenziale elastico. Sicuramente in Italia vi era un particolare curiosità accademica per la teoria non lineare e questo lo dimostrano i lavori di Marcolongo, di Umberto Crudeli (1878-1959) e soprattutto di Emilio Almansi (1869-1948), allievo di Volterra e per un periodo collega di Signorini a Roma, che propone la misura di deformazione che porta il suo nome [1] nel 1911.

Fichera in [21] ricorda che Signorini per scrivere le equazioni nel caso non-lineare

... propone di ricercare le equazioni costitutive, attraverso la determinazione di un potenziale, che suggerisce di cercare impiegando anche i principi generali della Termodinamica.

Inoltre sempre Fichera dice

Al fine di far luce sulle equazioni non lineari dell'equilibrio egli fa l'ipotesi che, supposte le forze esterne agenti sul corpo dipendenti da un fattore  $\varepsilon$ , le soluzioni delle equazioni siano funzioni olomorfe di  $\varepsilon$  nell'intorno del punto  $\varepsilon = 0$ . I vari coefficienti dello sviluppo vengono allora ad essere soluzioni di problemi lineari, ottenuti con procedimento induttivo, il primo dei quali quello dell'elasticità lineare classica.

Probabilmente Signorini capisce che la teoria dell'elasticità non-lineare è un campo difficile ma interessante e promettente. Di fatto nel 1930 pubblica due note sull'argomento, poi nel periodo successivo l'entusiasmo sembra raffreddarsi. Alcuni allievi diretti di Signorini come Giuseppe Grioli (1912-2015) e Pier Giorgio Bordoni (1915-2009) ricordano, anche se in maniera leggermente discordante, che Signorini aveva sviluppato delle riserve molto forti su questa teoria. Queste riserve avevano di fatto non solo raffreddato l'entusiasmo di Signorini ma lo avevano fatto operare in modo censorio con molti dei suoi allievi che volevano cimentarsi in questo campo.

Infatti, Signorini si rende conto che in questo frangente che [51]:

... prima di ogni calcolo numerico si ha da affrontare un problema estremamente difficile di vera Fisica matematica: la scelta dell'espressione completa del potenziale elastico.

Queste parole sono state pronunciate da Signorini nel 1942 durante una conferenza internazionale all'INDAM in Roma e saranno ripetute nel 1960 a Stresa in una delle sue ultime uscite pubbliche [53]:

il problema che ben si può dire il *problema centrale* dell'intera teoria non linearizzata, è il problema della scelta dell'espressione completa del potenziale elastico.

Lo scopo di questo mio contributo è quello di raccontare a che punto siamo oggi, ottanta anni dopo le parole del Nostro, nello studio di questo problema centrale. Lo farò da fisico-matematico cercando di mettere in evidenza il ruolo della matematica nel risolvere il problema fisico e non dimenticando mai quest'ultimo. Inoltre, per essere sufficientemente generale e divulgativo dovrò trascurare alcuni aspetti tecnici per i quali rimando alla letteratura specializzata.

## 2. – Il Problema Centrale

La teoria matematica della elasticità non-lineare è di potenziale interesse per diverse comunità scientifiche. Le equazioni differenziali che determinano gli spostamenti, o i moti, dei materiali elastici hanno da sempre attratto i matematici. D'altro canto queste stesse equazioni sono di interesse fondamentale nella progettazione ingegneristica di molti manufatti. Una progettazione moderna non può fare a meno della simulazione del prodotto e quindi necessita di raccogliere informazioni sulla natura delle soluzioni dei vari modelli. Si pensi per esempio al ruolo delle equazioni della elasticità nella progettazione dinamica in campo sismico oppure nel dimensionamento delle guarnizioni denotate come *O-rings* nell'industria aerospaziale. Queste equazioni, anche nel caso non-lineare, sono di interesse anche per i fisici che studiano i fenomeni acustici e le applicazioni tecnologiche associate con la propaga-

zione ondosa. Infine, i chimici guardano con interesse la teoria e i vari modelli per avere una guida sul come realizzare in laboratorio materiali 'tipo' gomma sempre più performanti e con strutture mesoscopiche speciali.

Ovviamente ognuno di questi studiosi avrà una diversa sensibilità nel considerare il problema centrale e nel considerare la sua soluzione. Le aspettative delle diverse comunità sono completamente diverse. Per questa ragione Signorini parla di problema *fisico* e *matematico*. Un eventuale "soluzione del problema" dovrà quindi considerare più aspetti contemporaneamente e non potrà limitarsi a soddisfare la curiosità di una singola comunità scientifica.

Ignorando la proto-storia di questo problema che è molto interessante e che è riassunta in [49] tutti oggi concordano che il primo grande risultato matematico nella soluzione di quanto richiesto da Signorini è stato ottenuto da Ronald Rivlin (1915-2005) nel 1948 [16].

In una serie di lavori, Rivlin applica per la prima volta in modo sistematico gli strumenti dell'algebra lineare nel caratterizzare il potenziale elastico di un materiale non-lineare. In particolare capisce che nel caso di simmetria materiale isotropa il potenziale deve essere una generica funzione degli invarianti principali del tensore destro o sinistro di Cauchy, rispettivamente  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  e  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ :

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{B}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr } \mathbf{B})^2 - \text{tr } \mathbf{B}^2 \right], \quad I_3 = \det \mathbf{B}.$$

Quindi deve essere sempre possibile scrivere il potenziale elastico come  $W = W(I_1, I_2, I_3)$  e in particolare nel caso incomprimibile, ovvero nel caso in cui le uniche deformazione ammissibili siano isocore, essendo  $I_3 = 1$  si ha che deve essere  $W = W(I_1, I_2)$  e si può dedurre la seguente formula di rappresentazione per il tensore di Cauchy ovvero

$$(2.1) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2W_1\mathbf{B} - 2W_2\mathbf{B}^{-1},$$

dove  $p$  è ancora una volta la pressione e  $W_i = \partial W / \partial I_i$ , ( $i = 1, 2$ ). Oggi sappiamo che la scelta di Rivlin non è l'unica possibile ma che tutte queste sono equivalenti.

Nella celebre monografia sulla fisica della gomma di Leslie Ronald George Treloar (1906-1985) del 1949 [55] si legge che i primi tentativi di descrivere il comportamento meccanico della gomma da parte

dei chimici-fisici sono avvenuti negli anni trenta del secolo scorso in contemporanea con l'interesse per la teoria non-lineare da parte di Signorini. La ragione di questo fatto è puramente industriale. Durante gli anni venti del secolo scorso viene brevettato lo pneumatico "moderno" che ne comporta un'applicazione diffusa nel settore automobilistico. Questo settore era in piena espansione negli Stati Uniti dove la domanda di gomma naturale tra il 1923 e il 1925 aumenta di quasi il 30% e nel 1930 viene inventato il neoprene, una delle prime gomme sintetiche. Tutto questo motiva in maniera sempre più pressante l'interesse per lo studio delle proprietà chimiche, fisiche e meccaniche della gomma e nel 1938 viene istituita la *British Rubber Producers' Research Association* che è il primo istituto di ricerca completamente dedicato alla ricerca scientifica e tecnologica nel campo della gomma.

In questo periodo, gli approcci chimico-fisici alla descrizione dello stato tensionale di questo materiale riescono a produrre solo il modello neo-Hookeano

$$W = \frac{1}{2}\mu(I_1 - 3),$$

e alcune sue semplici varianti. In tutti questi modelli non è mai presente l'invariante  $I_2$  che sembra invece giocare un ruolo fondamentale nel descrivere molti dati sperimentali ma al quale non si riesce a dare nessun collegamento con la struttura mesoscopica del reticolo polimerico. Si capisce quindi l'impatto, anche applicativo, che riscuote da subito la formula (2.1).

La formula (2.1) evidenzia le profonde differenze della teoria non-lineare con quella lineare. Limitando l'analisi solo al caso isotropo e incomprimibile, nel caso lineare la caratterizzazione dell'equazione costitutiva è unica a meno di una costante<sup>(3)</sup>, invece nel caso non-lineare sono *infinite* le possibili scelte di potenziale elastico. Inoltre, a priori, il numero dei parametri costitutivi che determina ognuna di queste scelte è potenzialmente arbitrario.

---

<sup>(3)</sup> Nel caso incomprimibile lineare  $\lambda$  viene assorbita dal moltiplicatore di Lagrange necessario per assicurare il vincolo interno che restringe le deformazioni ammissibili a quelle isocoriche. Per questo motivo rimane un unico parametro costitutivo: il modulo di taglio  $\mu$ .

Lo stesso Rivlin si accorge di questa grande indeterminazione e suggerisce di prendere in considerazione solo funzioni analitiche del tipo

$$2W = C(I_1 - 3) + \mathcal{F}(I_2 - 3),$$

dove  $C$  è una costante e la funzione arbitraria  $\mathcal{F}$  può essere rappresentata da un polinomio di ordine arbitrario oppure da uno sviluppo in serie infinito. A livello operativo Rivlin si concentra di fatto soprattutto sul caso

$$(2.2) \quad 2W = C(I_1 - 3) + D(I_2 - 3),$$

dove  $D$  è a sua volta una costante: una piccola ma significativa generalizzazione del modello neo-Hookeano.

Il risultato di Rivlin era stato in parte già previsto da Signorini ma purtroppo l'aver scritto in italiano, in anticipo sui tempi e il non essere inquadrato in una struttura di ricerca multidisciplinare, ha fatto sì che i suoi risultati siano stati per lungo tempo ignorati e diminuiti di valore.

Nel 1949 Signorini ha l'impeto di pubblicare in modo completo e sistematico i risultati che aveva sparpagliato negli anni trenta e nei primi anni quaranta in una nota [52] il cui sunto dice chiaramente:

Con questa Memoria l'A. continua l'esposizione sistematica delle sue ricerche nell'ambito della Elasticità non linearizzata, per dare completo sviluppo a quanto più o meno sinteticamente già si trova esposto in conferenze tenute a Stoccolma [3° Congr. int. di Mecc. appl., 1930], a Palermo [XXIV Riunione della S. L. P. S., 1935], a Bologna [2° Congr. della U. M. I., 1940] a Roma [Convegno mat. del 1942] e a Londra [7° Congr. int. di Mecc. appl., 1948].

Infatti, nel 1948 Signorini partecipa al convegno di Meccanica Applicata di Londra dove vi è una partecipata sessione di meccanica dei solidi. Il primo volume degli atti di questa conferenza riporta i vari contributi presentati a questa sessione e Geoffrey Ingram Taylor (1886-1975) [54] nella sua recensione per *Nature* dichiara:

the impression that the assumptions of the classical theory of elasticity, namely, that strains are small and stresses obey Hooke's Law, no longer satisfy many workers in this subject. Great mathematical difficulties arise as soon as these assumptions are abandoned, and materials are assumed to have properties more like those which occur in Nature.

Questa è la ragione che riporta, dopo la guerra, Signorini a interessarsi di elasticità lineare in modo brusco e a cercare di rivendicare la primogenitura di alcuni risultati. Si deve ricordare che l'equazione costitutiva in (2.2) era stata proposta già da Melvin Mooney (1893-1968) nel 1940 [33]. Mooney cercava un potenziale elastico che descrivesse in una deformazione di taglio una relazione *stress-strain* lineare mentre in una deformazione di estensione semplice la corrispondente relazione *stress-strain* doveva essere non lineare.

Si deve notare che Rivlin cita questo risultato solo nella sua quarta ed ultima nota del 1948 in maniera abbastanza "distratta". Questo quarto lavoro [45] si intitola: "LARGE ELASTIC DEFORMATIONS OF ISOTROPIC MATERIALS IV. FURTHER DEVELOPMENTS OF THE GENERAL THEORY".

L'articolo è dedicato a considerazioni del tutto generali e la citazione in questione si trova nell'ultimo paragrafo dedicato alla torsione dei cilindri a sezione circolare quando Rivlin specifica le formule generali al caso del materiale di Mooney.

Invece, Signorini leggendo il lavoro [33] commenta, in diversi lavori, in modo molto sagace questo modello e questa richiesta di Mooney puntualizzando che <sup>(4)</sup>

tale proposta principalmente si era basata sul fatto che veniva a trovarsi in ottimo accordo con precedenti risultati di accurate esperienze di scorrimento semplice: ma questo accordo si sarebbe verificato anche se al secondo membro della (M) fosse stata aggiunta una qualunque funzione di  $\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2$ .

Questo episodio ci insegna due cose. In primis, che Rivlin non era molto interessato alla letteratura e quindi a maggior ragione era poco interessato a leggere l'italiano. Inoltre, ci indica con chiarezza quanto l'ambiguità nella scelta del potenziale elastico preoccupasse Signorini.

Effettivamente una teoria che permette una tale 'libertà' di scelta costitutiva apre dei grossi dubbi sulla sua effettiva utilità. I risultati che questa teoria è capace di prevedere possono dipendere in modo sostanziale dalla scelta delle varie funzioni arbitrarie che sono in gioco. Si possono avere scelte ammissibili di diversi potenziali elastici che determinano predi-

---

<sup>(4)</sup> Qui con (M) si indica il potenziale (2.2) e con i simboli  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$  e gli invarianti  $I_1, I_2$ .

zioni in grande contrasto tra loro. Paradossalmente queste stesse scelte possono descrivere i dati sperimentali con efficacia completamente comparabile: esistono infiniti modelli che descrivono in una deformazione di taglio una relazione lineare tra sforzo e deformazione ma che differiscono in modo fondamentale in altre tipologie di deformazione [31].

Nel caso lineare è semplice determinare un esperimento che permette di determinare in maniera diretta dato un materiale le costanti elastiche,  $\mu$  e  $\lambda$  e la buona posizione delle equazioni dell'elasticità di lineare (alla Hadamard), che è garantita se il potenziale elastico lineare è definito positivo, permette anche di assicurare che piccoli errori (inevitabili) nelle misurazioni non possano amplificarsi in differenze significative nella determinazione di queste costanti. Nel caso non lineare invece, soprattutto in quegli anni, la situazione era completamente oscura.

Nel 1955 Clifford Truesdell (1919-2000) tiene una conferenza il cui testo viene pubblicato in [56] e la cui traduzione del titolo suona come: *il problema principale irrisolto della teoria finale dell'elasticità*. Un titolo prossimo a quanto aveva già dichiarato Signorini nel 1942 e sappiamo per certo che Truesdell fosse a conoscenza dell'opera del Nostro. In ogni caso il sunto di questa conferenza recita:

The remarkable progress of the last few years in the finite theory of elasticity is due to the avoidance of special assumptions. The solutions, whether exact or numerical, are valid for arbitrary strain energy function <sup>(5)</sup>  $\Sigma$ . In the usual, linear theory,  $\Sigma$  is a quadratic form, but even here it cannot be completely arbitrary, but must be positive definite. For the finite theory, three years ago the author raised the analogous question of what restriction should be placed upon  $\Sigma$ , and at that time he suggested certain inequalities, which he conjectured to be necessary but not sufficient.

Il problema di Signorini comincia ad essere percepito come *Hauptproblem* anche da Truesdell e dalla sua scuola, quindi da una comunità più ampia di quella a cui si poteva rivolgere il Nostro.

Chiaramente questo problema si ricollega direttamente alla buona posizione matematica della teoria. Sarà quindi possibile determinare la forma del potenziale elastico non-lineare considerando delle

---

<sup>(5)</sup> Truesdell usa il simbolo  $\Sigma$  invece che  $W$ .

prescrizioni a priori che ne garantiscono una ‘buona posizione’ matematica? Queste restrizioni ci permetteranno di discriminare dal punto di vista meccanico le forme ‘buone’ del potenziale elastico, ovvero capaci di descrivere e predire i dati sperimentali, da quelle ‘false’? Come è possibile mettere in relazione le proprietà microscopiche e mesoscopiche del materiale con quelle macroscopiche?

Lo stesso Rivlin nel 1948, per fare un minimo di chiarezza, usa delle disuguaglianze che indica come ‘empiriche’ richiedendo che il potenziale elastico debba sempre soddisfare le relazioni

$$W_1 > 0, \quad W_2 \leq 0.$$

Ovviamente queste relazioni sono insufficienti a determinare la forma funzionale di  $W$  e lo stesso sono tutte le relazioni proposte da Truesdell (... *to be necessary but not sufficient*). Inoltre, in Truesdell traspare una certa confusione nella natura delle soluzioni dei problemi dell’elasticità: *the solutions, whether exact or numerical, are valid for arbitrary strain energy function*.

Adesso che il significato del problema centrale di Signorini è stato illustrato, bisogna fare ancora un piccolo passo e cercare di capire meglio la natura delle soluzioni che accompagnano la teoria dell’elasticità.

### 3. – Sulla Natura delle Soluzioni in Elasticità

Prima ancora di fare delle considerazioni sulla classe funzionale nella quale cercare le soluzioni di possibili problemi al contorno della teoria non-lineare, Rivlin si rende conto che non tutte le soluzioni possono essere usate per risolvere il problema centrale.

Tra le deformazioni che soddisfano le equazioni di bilancio esistono delle soluzioni che hanno effettivamente un carattere *universale*. Di queste ne parla, anche se in modo poco chiaro, lo stesso Truesdell nella sua descrizione di Hauptproblem ed è fondamentale capire la loro natura.

In elasticità lineare, per ottenere sperimentalmente i parametri di Lamé si opera come segue. Per prima cosa si inverte la relazione (1.2)

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I},$$

dove  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$  è il modulo di Poisson e  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  è il modulo di Young. Si ipotizza dunque che un provino del materiale in questione venga sollecitato, per esempio, assialmente tramite una stato tensionale definito come  $\mathbf{T} = T \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ , dove  $T > 0$  (ovvero il provino viene effettivamente ‘tirato’) e  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono i versori del sistema di riferimento. Sostituendo tutto questo in (3.1) si ottengono due relazioni

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon_{33}, \quad T = E \varepsilon_{33}.$$

La prima di queste relazioni descrive cosa succede nella direzione ortogonale a quella lungo la quale il provino viene tirato. La seconda permette di determinare la relazione forza assiale e deformazione. Queste due relazioni permettono di valutare in modo diretto e semplice i parametri elastici. Nel caso incomprimibile essendo  $\nu = -1/2$  in quanto deve essere verificato il vincolo  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$  si ottiene che deve essere  $E = 3\mu$ . Quindi l’unico parametro da determinare è  $\mu$ .

Nel caso non-lineare la situazione è molto più complessa. Anche se si restringe l’attenzione al solo caso incomprimibile (2.1) si possono subito evidenziare delle difficoltà sostanziali a ripetere una procedura semplice come quella appena indicata.

Primo, a priori nessuno assicura che la relazione (2.1) sia invertibile. Per “dribblare” questo problema si usa un metodo *semi-inverso*. Si postula la forma della deformazione e si spera che a posteriori sarà possibile soddisfare le condizioni al contorno che idealizzano l’esperimento.

In questo caso si parte da una deformazione omogenea

$$(3.2) \quad x = \lambda_1 X, \quad y = \lambda_2 Y, \quad z = \lambda_3 Z,$$

dove  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono delle costanti. Il gradiente di deformazione è calcolato facilmente come  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i$ , quindi il tensore di Cauchy  $\mathbf{T}$  è costante e l’equazione di bilancio data da  $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$  è ovviamente soddisfatta.

Essendo lo stato tensionale a cui è sottoposto il corpo sempre nella forma  $\mathbf{T} = T \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ , dall’isotropia del materiale si ottiene  $\lambda_2 = \lambda_1$  e dalla richiesta di isocoricità,  $\det \mathbf{F} = 1$ , indicando  $\lambda_3 = \lambda$  deve essere  $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda^{-1/2}$ .

Usando le equazioni costitutive (2.1) si ha dunque

$$(3.3) \quad \begin{aligned} 0 &= -p + 2W_1\lambda^{-1} - 2W_2\lambda, \\ T &= -p + 2W_1\lambda^2 - 2W_2\lambda^{-2}, \end{aligned}$$

dove ovviamente le derivate del potenziale elastico sono funzioni di  $\lambda$  in quanto  $I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}$  e  $I_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda$ .

Dalla prima delle equazioni in (3.3) si ottiene la pressione e quindi la seconda diventa

$$(3.4) \quad T = (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \left[ 2W_1 + \frac{1}{\lambda} 2W_2 \right],$$

tornando “indietro” nella configurazione di riferimento, questa è la relazione forza/allungamento.

Infatti, nella configurazione di riferimento il tensore dello sforzo nominale, nel caso incomprimibile, è dato come  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}$  e quindi

$$(3.5) \quad S = (\lambda - \lambda^{-2}) \left[ 2W_1 + \frac{1}{\lambda} 2W_2 \right].$$

Usando la formula (3.5) è possibile calcolare, date le dimensioni geometriche del provino, la relazione forza/deformazione.

La (3.2) è una deformazione universale ovvero una soluzione che soddisfa le equazioni di bilancio qualunque sia la forma del potenziale elastico. Questa soluzione è un elemento di quella famiglia che Truesdell indica come *the solutions, whether exact or numerical, are valid for arbitrary strain energy function*. Sono soluzioni importantissime in quanto per queste deformazioni si conosce a priori la geometria e le considerazioni costitutive entrano in gioco solo a livello dinamico. Se anche la geometria della deformazione fosse dipendente dalle equazioni costitutive si attiverebbe una sorta di *loop* dal quale risulterebbe impossibile uscire. Durante l’esperimento che è stato ideato per determinare le proprietà costitutive del materiale si dovrebbe imporre al provino una deformazione che dipende da ciò che si vuole determinare. Per questo motivo le deformazioni universali sono le soluzioni ideali per individuare un programma razionale volto alla determinazione delle funzioni costitutive e quindi per permettere di risolvere il problema di Signorini.

Deve però essere chiaro che non tutte le soluzioni dell’equazioni dell’elasticità posseggono questo ca-

rattere speciale. Per illustrare questo fatto si consideri la deformazione isocora di taglio rettilineo

$$(3.6) \quad x = X + f(Z), \quad y = Y, \quad z = Z,$$

dove  $f = f(Z)$  è una funzione che deve essere determinata usando le equazioni di bilancio in modo tale che  $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$ . In questo caso, semplici calcoli i cui dettagli possono essere trovati in [13], permettono di stabilire che la pressione associata a (3.6) deve essere nella forma

$$p = c_1 X + c_2,$$

dove  $c_1$  fornisce il valore del gradiente di pressione e la costante  $c_2$  è invece inessenziale. Una volta determinata la pressione, le equazioni di bilancio si riducono a un’equazione differenziale ordinaria in  $f = f(Z)$

$$(3.7) \quad (Qf_Z)_Z = c_1,$$

dove, essendo in questo caso  $I_1 = I_2 = f_Z^2$ , la funzione  $Q = Q(f_Z^2)$ , denominata *modulo generalizzato di taglio*, risulta determinata a partire del potenziale elastico come  $Q = 2(W_1 + W_2)$ .

Nel caso in cui  $c_1 \equiv 0$  si ottiene una soluzione molto semplice dell’equazione (3.7) data da  $f(Z) = \kappa Z$  dove  $\kappa$  è una costante. Questa è la deformazione di taglio semplice un’altra soluzione universale. Infatti questa soluzione è valida per ogni scelta di  $Q$  e quindi di potenziale elastico. Essendo  $I_1 = I_2 = \kappa^2$  una costante, anche il modulo generalizzato di taglio  $Q$  valutato per questa deformazione risulta costante e l’equazione di bilancio è banalmente soddisfatta.

D’altro canto è semplice rendersi conto che se  $c_1 \neq 0$  la soluzione della (3.7) dipende dalla scelta del potenziale elastico. Se  $W = \mu(I_1 - 3)/2$  dove  $\mu$  è un parametro costitutivo la (3.7) si riduce a

$$(3.8) \quad \mu f_{ZZ} = c_1,$$

mentre se  $W = \mu(I_1 - 3)/2 + \mu_n(I_1 - 3)^2/4$  dove  $\mu_n$  è un ulteriore parametro costitutivo si ottiene

$$(3.9) \quad \mu f_{ZZ} + 3\mu_n f_Z^2 f_{ZZ} = c_1.$$

In questo caso la geometria delle soluzioni dipende dai parametri costitutivi  $\mu$  e  $\mu_n$  in modo sostanzialmente diverso. La soluzione formale di (3.8) è una funzione quadratica, mentre la soluzione formale di (3.9) si può ottenere con una quadratura a partire dall’integrale primo

$$\mu f_Z + \mu_n f_Z^3 = c_1 Z + c_2,$$

considerando, quando  $\mu$  e  $\mu_n$  sono numeri positivi, l'unico ramo reale di questa cubica in  $f_Z$ .

D'altro canto le soluzioni di questo esempio sono interessanti in quanto *controllabili*: per ogni ragionevole scelta del potenziale elastico si può pensare che questo sistema, accompagnato da adeguate condizioni al contorno, possa avere soluzione e questo in assenza di forze esterne di volume.

Le soluzioni universali sono sempre controllabili ma non tutte le soluzioni controllabili sono universali.

Infine, esistono casi in cui le soluzioni delle equazioni della elasticità non sono né universali né controllabili. Un esempio famoso è la classe delle deformazioni di *antiplane shear*:

$$(3.10) \quad x = X, \quad y = Y, \quad z = Z + w(X, Y),$$

dove  $w = w(X, Y)$  è una funzione da determinare usando le equazioni di bilancio. Si può dimostrare che in generale e in assenza di forze esterne per la famiglia (3.10) le equazioni di bilancio si riducono ad un sistema di due equazioni differenziali nella medesima incognita  $w = w(X, Y)$ . Questo sistema sovra-determinato ammette soluzioni solo per particolari classi di potenziali elastici.

Si ha quindi una sorta di 'gerarchia cavalleresca' delle soluzioni delle equazioni dell'elasticità non-lineare.

Le soluzioni universali sono le più preziose per ideare campagne sperimentali razionali in quanto sono classi di deformazioni che soddisfanno le equazioni di bilancio in assenza di forze esterne e questo per ogni scelta del potenziale elastico. Essendo la loro geometria conosciuta a priori e non escludendo nessun potenziale elastico sono le deformazioni perfette per la soluzione del problema di Signorini.

Poi ci sono le soluzioni controllabili: anche in questo caso dal punto di vista formale queste soluzioni esistono per ogni potenziale elastico ma la loro geometria dipende dalla forma funzionale dello stesso. Queste soluzioni sono importanti per confrontare le varie forme funzionali dei potenziali. In questo caso è possibile formulare dei problemi al contorno 'complessi' che permettono di capire il ruolo di ipotesi funzionali qualitative sull'esistenza delle soluzioni in modo più efficace che nel caso di soluzioni universali.

Infine abbiamo tutto il resto: infinite famiglie di soluzioni come quella di antiplane shear. Queste

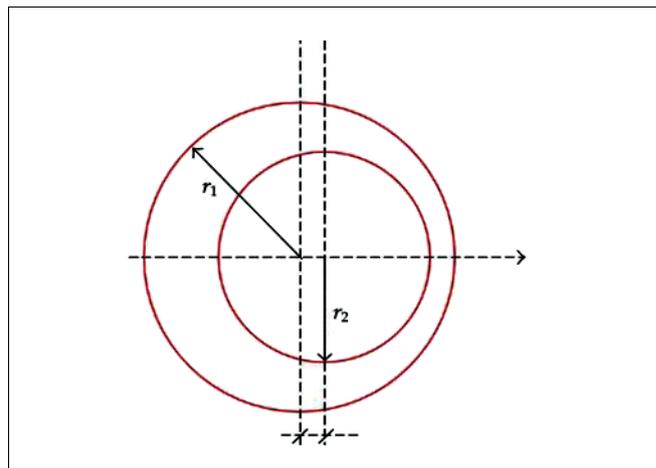


FIGURA 1 – Si consideri il caso di un materiale elastico che è contenuto tra due cilindri che non sono concentrici. Il cilindro di raggio  $r_1$  è fisso mentre quello di raggio  $r_2 > r_1$  viene spostato assialmente applicando una forza che genera sul corpo elastico per  $R = r_2$  una tensione.

soluzioni mettono ancora una volta in luce un fatto tipico e 'preoccupante' della teoria non-lineare: dati due differenti potenziali elastici lo stesso stato tensionale può generare stati di deformazione completamente diversi anche se i dati al contorno sono gli stessi.

Questo punto è fondamentale e merita un approfondimento. Riferendosi alla Figura 1, si consideri un materiale elastico incollato tra due cilindri non concentrici di cui si vede la sezione nella figura. Il cilindro interno è fisso mentre su quello esterno si applica una forza assiale. Si vuole quindi risolvere il problema con le condizioni al contorno spostamento nullo per  $R = r_1$  e tensione nominale pari a  $S_{33} = T\mathbf{E}_Z \otimes \mathbf{E}_Z$  per  $R = r_2$ . Per il materiale neo-Hookeano la deformazione che ne risulta è contenuta nella classe (3.10). Per il materiale di Mooney-Rivlin invece la deformazione deve essere cercata nella classe più ampia

$$(3.11) \quad \begin{aligned} x &= X + u(X, Y), \\ y &= Y + v(X, Y), \\ z &= Z + w(X, Y), \end{aligned}$$

dove le funzioni  $u$  e  $v$  devono essere scelte in modo tale che  $\det \mathbf{F} = 1$ .

Una 'piccola' differenza nella forma funzionale del potenziale elastico si traduce in due predizioni

completamente diverse. Si ribadisce che questo è un problema molto preoccupante per quanto riguarda l'*affidabilità* della teoria.

**Osservazione.** Rivlin determinò diverse classi di soluzioni universali per l'elasticità non-lineare in un modo che a prima vista sembra fortuito. Nel caso comprimibile tutte queste soluzioni sono omogenee, ovvero sono sempre in corrispondenza a un gradiente di deformazioni con componenti costanti nell'usuale sistema Cartesiano. Nel caso di corpi incomprimibili esistono diverse soluzioni universali non omogenee e Jerald Ericksen (1924-2021) caratterizzò tutte queste deformazioni a meno di un caso speciale [19, 20]. Il caso rimasto aperto riguarda le deformazioni che, seppure non omogenee, possiedono invarianti costanti. La dimostrazione di Ericksen usa interessanti strumenti di geometria differenziale che sono stati poi affinati negli anni da diversi autori in particolare per considerare vincoli più generali di quello di incomprimibilità. Una storia di questo problema si trova nel capitolo [46]. Secondo Truesdell questo era il problema aperto più importante della teoria non-lineare dell'elasticità [57]. L'argomento è ancora interessante si veda [58]. Bisogna infine ricordare che nel considerare l'idealizzazione di un'esperimento si devono introdurre molte ipotesi che vanno poi verificate nella realtà. Per esempio, la deformazione reale non sarà mai veramente omogenea. Si pensi a cosa succede nell'intorno dove il provino viene assicurato alla macchina di prova. Questo problema introduce dei problemi matematici che qui vengono trascurati per brevità ma che a loro volta sono particolarmente affascinanti.

#### 4. – La buona posizione dei problemi al contorno

Nel 1976 esce lo studio di John Ball sull'esistenza delle soluzioni per i problemi al contorno in elasticità non lineare [6]. Come riporta l'introduzione di questo fondamentale lavoro, risulta chiaro che

In his work, and in mine, the problem of existence is inextricably linked with that of finding satisfactory constitutive inequalities for nonlinear elasticity (cf. TRUESDELL [1]).

L'*altro* sarebbe Stuart Antman che sappiamo aver contribuito moltissimo, come testimonia la monografia [4], a cercare una soluzione possibile per il problema di Signorini e la citazione di Ball in questa frase è alla traduzione inglese del lavoro di Truesdell [56] già illustrato.

La buona posizione delle equazione dell'elasticità nel problema di Signorini è il campo da gioco privilegiato per il matematico.

Non a caso Signorini e un suo allievo diretto, Francesco Stoppelli (1917-1997), entrano subito in partita. Ne accennava nel 1977 Fichera e un sunto di questo sforzo è riportato nella monografia di Giuseppe Grioli [23].

Signorini si interessa a un problema dove al contorno si prescrivono esclusivamente le trazioni quindi se  $\Omega_0$  è la regione occupata nella configurazione di riferimento dal corpo  $\mathcal{B}$  si ha che

$$\text{Div } \mathbf{S} = \rho_0 \mathbf{f} \text{ in } \Omega_0, \quad \mathbf{T}\mathbf{N} = \mathbf{t}_0 \text{ in } \partial\Omega_0,$$

dove  $\mathbf{f}$  sono le forze esterne di volume e  $\mathbf{N}$  la normale esterna a  $\partial\Omega_0$ . Chiaramente se si scrivono le equazioni cardinali della statica nella loro versione globale, ovvero

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} d\mathcal{A} = \mathbf{0},$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{OP} \wedge \rho_0 \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{OP} \wedge \mathbf{T} d\mathcal{A} = \mathbf{0},$$

si vede subito che  $\mathbf{f}$  non può essere arbitrario e questo "dettaglio" ha dato non pochi problemi a Signorini. L'idea alla base della dimostrazione di Signorini è quella di supporre che esiste un parametro  $\varepsilon$  piccolo e che sia possibile di scrivere i dati  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{t}$  come

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{t}_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{t}_{0i},$$

e quindi di poter cercare una soluzione per  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  anch'essa nella forma

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i.$$

Ovviamente questa idea ha il vantaggio di ridurre il problema a una serie di problemi lineari ma richiede l'analiticità di tutti gli oggetti in gioco e alla fine

riesce a dimostrare solo l'unicità della soluzione ma non la sua esistenza.

Per il problema differente ma particolare

$$\text{Div } \mathbf{S} = \rho_0 \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ in } \partial\Omega_0,$$

Ciarlet riesce a fare molto di meglio di Signorini usando il teorema delle funzioni implicite. La soluzione è locale e richiede che  $\partial\Omega_0$  sia di classe  $C^2$  e che il termine che riguarda le forze di volume,  $\rho_0 \mathbf{f}$  sia in  $L^p$  con  $p > 3$ . Con queste condizioni la soluzione è unica ed esiste localmente in un intorno di un opportuno sottospazio dello spazio di Sobolev  $W^{2,p}$ .

L'analisi di Ball scavalca tutti questi problemi usando un approccio variazionale. Infatti, si applica a un problema misto purché i carichi siano 'morti' ovvero non dipendano dallo spostamento incognito e soprattutto dimostra che le soluzioni, come ci si deve aspettare, in elasticità non-lineare non sono uniche.

Il risultato muove da una critica della condizione di convessità per il potenziale elastico  $W$  visto come una funzione di  $\mathbf{F}$ . Infatti, se il potenziale elastico è una funzione convessa, allora la soluzione esiste ma risulta essere unica e purtroppo l'unicità della soluzione viene spesso contraddetta in elasticità non-lineare. Anche la condizione più generale di quasi-convessità introdotta da Charles Morrey (1907-1984) non sembra essere pienamente utilizzabile in quanto esclude i comportamenti corretti che il potenziale elastico deve avere soprattutto quando nel caso comprimibile si studiano deformazioni estreme come per esempio le deformazioni che comportano  $\det \mathbf{F} \rightarrow 0$ . Per questo motivo viene introdotto il concetto di *policonvessità*. Un potenziale elastico è policonvesso se si può esprimere come una funzione convessa dei cofattori di  $\mathbf{F}$  (ovvero dell'insieme di tutti i determinanti delle sottomatrici di  $\mathbf{F}$ ). Usando questa proprietà e una condizione di coercitività, Ball riesce a stabilire il suo risultato. La dimostrazione per prima cosa stabilisce che il funzionale energia (che tiene conto del potenziale elastico e del lavoro dei carichi esterni) risulta ben definito nell'insieme delle funzioni ammissibili. Quindi determinando una limitazione inferiore per il funzionale energia, si trova una sequenza minimizzante che converge ad una funzione che appartiene all'insieme ammissibile e si dimostra che questa funzione risulta essere effettivamente un minimo.

Come è stato detto, in questo caso è possibile ottenere sì un teorema di esistenza ma non si esclude la possibilità di non unicità delle soluzioni. Inoltre Ball chiarisce che lo spazio funzionale 'giusto' dove ambientare dimostrazioni rigorose e sufficientemente generali di esistenza di soluzioni dei problemi non-lineari sono gli spazi di Orlicz-Sobolev. Questo è un dettaglio non da poco perché focalizza un altro aspetto importante: le soluzioni dei problemi di elasticità non-lineare possono essere più irregolari di quello che i risultati precedenti potessero far credere.

Dal punto di vista matematico il risultato di Ball è un grande passo avanti, in un certo senso anche definitivo, ma per quanto riguarda il problema di Signorini è lo stesso Ball assieme a James [7] che avverte:

At the end of the day, perhaps it would have been realized that Hadamard's notions of well-posedness are far too restrictive in the nonlinear setting, that non-uniqueness and even non-existence comprise acceptable behaviour, and that there are probably no fundamental restrictions on the strain-energy function at all besides those arising from material symmetry and frame-indifference<sup>6</sup>

La nota, indicata con il 6 nella citazione, è anche essa rilevante e recita

Future research on deriving elasticity from atomistic models might conceivably modify this view.

Nonostante queste considerazioni il risultato in [6] è fondamentale in quanto risolve almeno per una certa fetta della comunità scientifica, i matematici, un problema importante anche se ancora una volta non permette di dare alla teoria non-lineare quello status di modello matematico robusto che stiamo cercando incalzati da Signorini.

Riprendendo in mano la deformazione di taglio rettilineo già affrontata è possibile far capire senza perderci in dettagli troppo tecnici perché queste questioni matematiche sono rilevanti nella soluzione del problema di Signorini e non solo per gli aspetti puramente matematici. Il fatto che consideriamo funzioni di una sola variabile ovviamente non permettono di apprezzare le importanti differenze tra convessità e policonvessità ma è un prezzo che vale la pena pagare per costruire in modo agile la storia del problema di Signorini.

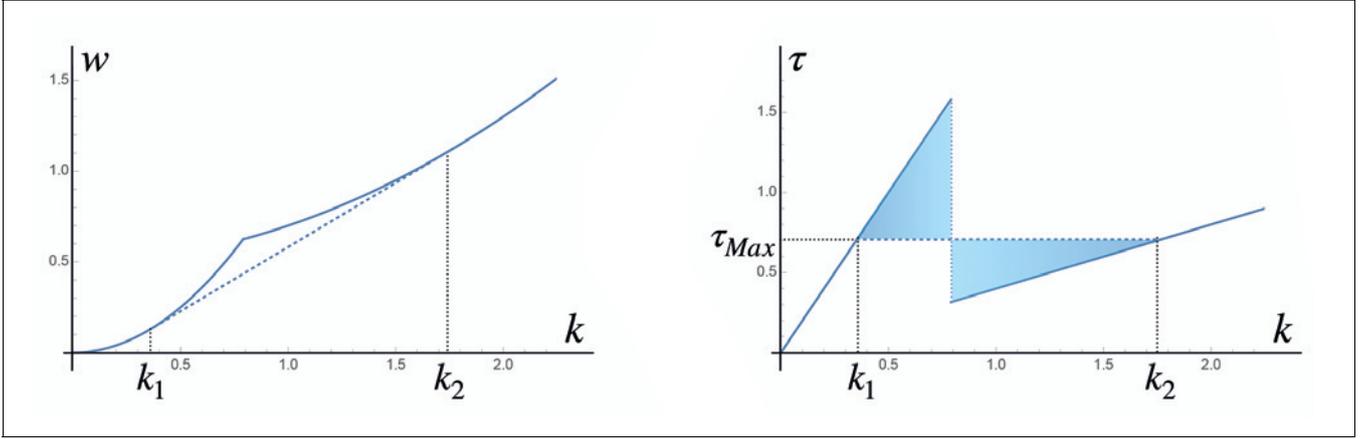


FIGURA 2 – Una funzione costitutiva trilineare.

Per prima cosa si consideri l'equazione e per introdurre delle condizioni al contorno, si supponga che nella configurazione di riferimento il materiale elastico risulti ancorato a due piastre rigide posizionate in  $Z = \pm H$ . Nelle direzioni  $X$  e  $Y$  il materiale occupa un dominio infinito. Si decide quindi di studiare il problema al contorno

$$\mathcal{Q}f_Z = c_1 Z + k_1, \quad f(\pm H) = 0.$$

Ovviamente una soluzione non banale di questo problema si ottiene solo se  $c_1 \neq 0$ , ovvero la *driving force* della deformazione risulta essere il gradiente di pressione

Si richiede quindi che, dato  $\gamma^2 = f_Z^2$  e ricordato che  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\gamma^2)$ , debba essere

$$(4.1) \quad \lim_{\gamma^2 \rightarrow 0} \mathcal{Q} = \mu,$$

dove  $\mu$  è il modulo infinitesimale di taglio. Questa condizione è la richiesta di compatibilità con la teoria dell'elasticità lineare. Ogni materiale deve passare in uno stato lineare prima di arrivare a comportarsi in modo non-lineare e risulta quindi naturale chiedere questa compatibilità. D'altro canto nel caso questa condizione fosse negata si potrebbero avere dei problemi notevoli nel comportamento delle soluzioni ed esempi espliciti di queste problematiche si possono trovare in [44].

Si introducano ora le variabili adimensionali

$$Z^* = Z/H, \quad f^* = f/F, \quad \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}/\mu$$

e scelto  $F = |c_1 H^2 / \mu|$  si riscriva il problema come

$$(4.2) \quad [\mathcal{Q}f_Z]_Z = \text{sign}(c_1), \quad f(\pm 1) = 0.$$

In (4.2) per semplificare la notazione è stato ommesso l'asterisco.

Si deve quindi notare che  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\varepsilon^2 f_Z^2)$  dove  $\varepsilon = |c_1|H/\mu$ . Introducendo la notazione  $\widehat{W} = W(\gamma^2 + 3, \gamma^2 + 3)$  si nota che l'equazione in (4.5) si può scrivere come

$$(4.3) \quad \frac{d\widehat{W}}{d\gamma} = \text{sign}(c_1)Z,$$

e quindi il problema al contorno è l'equazione di Eulero-Lagrange associata con il funzionale così definito

$$(4.4) \quad \mathcal{E} : f \in H_0^1[-1, 1] \rightarrow \int_{-1}^1 [\widehat{W}(\varepsilon f_Z) + \text{sign}(c_1)\varepsilon f] dZ.$$

Per risolvere questo problema diverse sono le possibilità.

Dalla (4.3) si nota subito che la convessità del potenziale elastico permette di stabilire che

$$\mathcal{F}(\gamma) := \frac{d\widehat{W}}{d\gamma} \equiv \mathcal{Q}(\gamma^2)\gamma,$$

è una funzione debolmente monotona e quindi invertibile. Il problema quindi si potrebbe risolvere usando argomenti di analisi non-lineare ovvero teoria del grado delle mappe [24]. In realtà in questo caso, notando l'invarianza di (4.2) sotto l'azione della trasformazione puntuale discreta  $Z \rightarrow -Z$ , si ottiene direttamente che

$$(4.5) \quad \mathcal{Q}f_Z = \text{sign}(c_1)Z, \quad f(\pm 1) = 0$$

e quindi possiamo riportare il problema al contorno a un problema ai valori iniziali

$$[Qf_Z]_Z = \text{sign}(c_1), \quad f(-1) = 0, f_Z|_{Z=-1} = f_Z^*,$$

in  $[-1, 0]$ . Ovviamente la soluzione in  $]0, 1]$  si ottiene grazie alla trasformazione già introdotta.

Un'altra possibilità è l'uso dei teoremi base del calcolo delle variazioni. In questo caso è chiaro immediatamente che la convessità non è necessaria. Il caso di un potenziale elastico non convesso può essere associato ad una funzione  $\mathcal{F}$  come in Figura 3. Sappiamo che questa tipologia di potenziale elastici è fondamentale per capire diversi fenomeni meccanici che vanno dalle transizioni di fase al danneggiamento e vediamo chiaramente due fatti. Primo, che ipotesi più raffinate (nel senso di deboli) della convessità continuano ad assicurare l'esistenza della soluzione anche se si può perdere l'unicità. Secondo, che le soluzioni non devono essere regolari come forse si era abituati a pensare in passato.

Il teorema di Ball risponde agli aspetti matematici del problema di Signorini in modo completo con chiarezza e rigore, ma lo stesso Ball in [7] è stato chiaro: se vogliamo avere qualche speranza per risolvere il problema di Signorini nella sua completezza bisogna partire dalla descrizione del livello mesoscopico del materiale. In realtà in [7] si parla di partire dal livello atomico, ma questa opportunità per i materiali amorfi non è ovviamente possibile. La teoria non-lineare dell'elasticità ha un ruolo fondamentale anche nell'ambito dei materiali cristallini e poli-cristallini soprattutto per spiegare transizioni

di fase come quelle austenite-martensite [11]. Una delle differenze principali tra una teoria elastica atta a descrivere quello che succede nei metalli rispetto al comportamento dei materiali polimerici si può apprezzare soprattutto a livello termodinamico. Infatti in termodinamica è usuale introdurre l'energia libera di Helmholtz, una quantità definita dalla differenza dell'energia interna con il prodotto temperatura per entropia. Nei metalli l'energia interna gioca un ruolo cruciale a causa dell'energia di legame imposto dal reticolo cristallino. Nei materiali tipo gomma, il reticolo polimerico è un'idealizzazione completamente diversa da quella messa a punto a livello cristallino. Gli anglosassoni hanno anche due termini completamente diversi da usare nei due casi: *lattice* e *network*. Nel seguito ci si concentra principalmente attorno alla descrizione dei materiali polimerici. Per soluzione completa del problema di Signorini si indica la soluzione del problema in termini che risultano soddisfacenti per tutte le comunità scientifiche interessate.

## 5. – Intermezzo

Rivlin, dopo aver determinato la forma generale del potenziale elastico da un punto di vista teorico e aver individuato la classe di deformazioni che sono ideali per una campagna sperimentale sistematica, si lancia in una dettagliata campagna sperimentale. I suoi risultati mettono subito in evidenza che il modello neo-Hookeano, caro a chimici-fisici e determinato

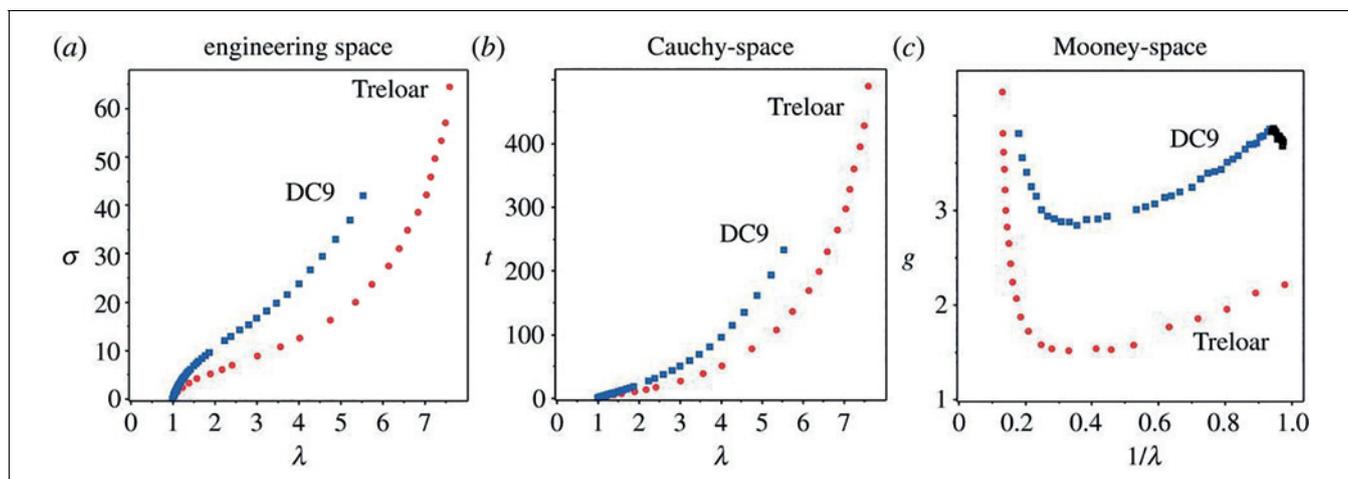


FIGURA 3 – I dati di Treoar nei diversi spazi di rappresentazione dei dati [15].

con metodi statistici a partire da una particolare *caricatura* della struttura mesoscopica della gomma, è sicuramente inadeguato. Per questo motivo si concentra sul modello (2.2).

Oggi esistono *data set* molto accurati per i vari esperimenti proposti da Rivlin anche se in letteratura si continuano ad usare soprattutto i dati storici dovuti a Treloar. Questi dati sono considerati una benchmark con la quale confrontare qualsiasi modello venga proposto.

Ovviamente i dati sperimentali possono essere rappresentati sia nella configurazione attuale che in quella di riferimento ma Rivlin per i dati relativi alla tensione semplice descritta precedentemente considerò anche una rappresentazione che viene indicata da lui stesso come ‘Mooney plot’. Nella Figura 2 si riportano i dati di Treloar per l’estensione semplice nello ‘spazio’ di Cauchy, nominale e di Mooney. Accanto a questi dati si riportano anche quelli relativi ad un esperimento più moderno ma relativo ad una gomma sintetica diversa da quella naturale e vulcanizzata usata da Treloar.

Nel grafico più a sinistra della Figura 2 si vedono i dati nello spazio di Cauchy. Questi dati dovrebbe essere confrontati se si considera il modello di Mooney-Rivlin con la relazione teorica

$$(5.1) \quad T = (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \left[ C + \frac{1}{\lambda} D \right].$$

Il grafico centrale sempre nella stessa figura riguarda lo spazio nominale e quindi usando (3.5) si ha che il confronto deve essere fatto con

$$(5.2) \quad S = (\lambda - \lambda^{-2}) \left[ C + \frac{1}{\lambda} D \right].$$

Infine, si ha lo spazio di Mooney, dove la relazione teorica si ottiene da (5.2) riscaldando i valori della tensione:

$$(5.3) \quad \mathcal{M} := \frac{S}{\lambda - \lambda^{-2}} = C + \frac{1}{\lambda} D.$$

Risulta conveniente leggere (5.3) nella variabile  $\zeta = \lambda^{-1}$  ovvero considerare  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\zeta)$ .

Molto probabilmente Rivlin ha usato quest’ultima formulazione per poter ridurre il problema della determinazione delle costanti  $C$  e  $D$  ad un problema di regressione lineare in forma canonica ma oggi

sappiamo che il plot di Mooney permette di avere molte informazioni interessanti che vengono nascoste dal rappresentare i dati nello spazio di Cauchy o in quello nominale. Infatti usando il plot di Mooney si legge subito che il modello neo-Hookeano per il quale  $D = 0$  non è adatto a descrivere i dati sperimentali e questo in nessun intervallo di deformazione. Infatti per questo modello la (5.3) si riduce alla semplice formula  $\mathcal{M} = C$ .

Nello spazio di Mooney è evidente che l’esperimento di tensione semplice mette in evidenza due regimi. Un regime per moderate deformazioni e uno per deformazioni finite di maggiore intensità. Il modello di Mooney-Rivlin predice per  $\mathcal{M}$  una forma lineare e quindi può descrivere i dati solo in un parte dell’intervallo di interesse, ovvero prima del punto che viene indicato con il nome di *upturn* e che individua il tratto ascendente della curva. Bisogna comunque ricordare che la chimica-fisica non era stata capace neanche di immaginare una possibile dipendenza del potenziale elastico dal secondo invariante  $I_2$ , fatto che invece sembra risultare necessario. Nonostante questo notevole passo avanti, si innesca una forte polemica con la comunità dei chimici. La polemica è incentrata sull’interpretazione meccanica della costante  $D$  che per molto tempo sfuggirà ad interpretazioni mesoscopiche.

Rimane il fatto che la descrizione anche del più semplice degli esperimenti non sembra possibile con un modello in un certo senso ‘naturale’. Il modello neo-Hookeano della teoria statistica è completamente incapace di dare informazioni e il modello fenomenologico ‘semplice’, in quanto lineare negli invarianti principali, descrive i dati solo nell’intervallo delle deformazioni finite ma di intensità moderata.

Oggi è ben noto come risolvere il problema della centralità del secondo invariante,  $I_2$ , nella descrizione corretta dei dati e questa soluzione non si basa su un’evidenza sperimentale ma su un’elegante considerazione teorica: una **relazione universale**.

Una relazione universale è un’equazione che è valida per tutti materiali in una specifica classe costitutiva a prescindere dalle funzione di risposta, ovvero dalla forma del potenziale elastico. Nel caso specifico si riesce a individuare una relazione valida per i tutti i materiali elastici per cui  $W = W(I_1)$ , materiali che sono indicati neo-Hookeani generalizzati, ma che è contraddetta se  $W = W(I_1, I_2)$ .

La possibilità di ottenere delle relazioni universali era già nota a Rivlin che ne aveva determinata una specifica nel caso della deformazione di taglio semplice. Millard Beatty racconta in una sua nota sull'argomento che fu Ericksen il primo a individuare nella co-assialità specifica dei materiali isotropi,  $\mathbf{TB} = \mathbf{BT}$ , un modo generale per generare delle relazioni universali in una classe più ampia di deformazioni da quella considerata da Rivlin. Anche questo metodo non può comunque essere generale in quanto relazioni universali possono essere determinate anche per materiali anisotropi.

Se si considera la deformazione universale (3.6) con  $f(Z) = \kappa Z$  e si calcolano le corrispondenti componenti non nulle del tensore di Cauchy, una volta che la pressione sia stata determinata in modo  $T_{33} \equiv 0$  si ottiene

$$T_{11} = 2\kappa^2 W_1, \quad T_{22} = -2\kappa^2 W_2, \quad T_{12} = 2\kappa(W_1 + W_2).$$

Qualunque sia la forma del potenziale  $W = W(I_1, I_2)$  si ottiene la relazione di Rivlin

$$T_{11} - T_{22} = \kappa T_{12}.$$

Questa relazione ci dice che nel caso non lineare non è possibile avere una deformazione di taglio senza differenza di sforzo normale. Nel caso in cui  $W = W(I_1)$  una nuova relazione universale è data nella forma  $T_{33} \equiv 0$ , ma questa nuova relazione riguarda solo la famiglia dei materiali neo-Hookeani generalizzati. Per la verifica sperimentale di questo fatto è sufficiente produrre un foro sulla piastra che impone la tensione necessaria per la deformazione di taglio.

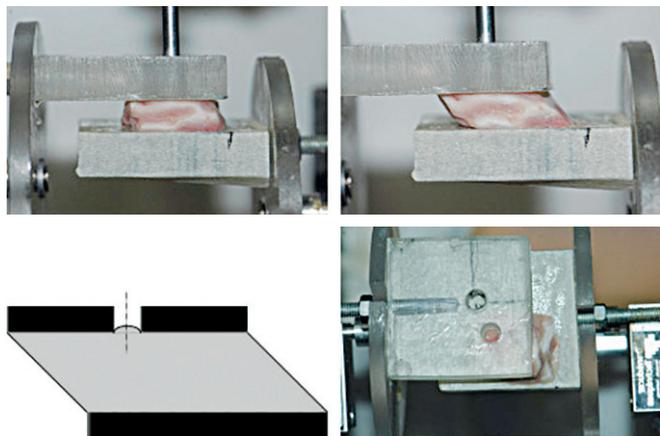


FIGURA 4 - La verifica sperimentale della dipendenza del potenziale elastico da  $I_2$  (da [14]).

Se dal foro si vede “montare” del materiale allora chiaramente  $T_{22} \neq 0$  e corrispondentemente  $W_2 \neq 0$ . Ovviamente Rivlin aveva ragione ma è anche ovvio che grazie a questi procedimenti è possibile individuare quantitativamente la “dipendenza” da  $I_2$  e quindi determinare situazioni che possono giustificare l'uso di modelli matematici nell'ambito dei materiali neo-Hookeani generalizzati.

Data un'equazione costitutiva, tutte le relazioni universali che possono essere costruite sull'insieme delle soluzioni a loro volta universali possono essere calcolate leggendo l'equazione costitutiva come una relazione algebrica in un opportuno spazio e quindi applicando i famosi teoremi di Eugenio Bertini (1846-1933) [30] per rappresentare le varietà algebriche. Il metodo messo a punto in [37] è completamente algoritmico e aveva già sperimentato la sua potenza in diversi ambiti dove metodi più empirici avevano fallito prima di arrivare anche ad applicazioni di tipo tecnologico come quella appena indicata oppure quella in [26].

In ogni caso dopo i lavori di Rivlin inizia un periodo complesso e confuso dove la possibile soluzione del problema di Signorini sembra allontanarsi e complicarsi sempre di più e inizia un periodo di grande confusione. Ericksen commenterà sagacemente quegli anni ricordando che nella teoria dell'elasticità non-lineare per un certo periodo si useranno *somewhat mystical process whereby we select definite forms of constitutive equations*.

Nel 1972 Ogden propone il suo famoso modello espresso non in termini degli invarianti ma degli *stretches* principali della parte simmetrica della decomposizione polare del gradiente di deformazione  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . In questo caso l'isotropia richiede che siano valide le seguenti proprietà di simmetria

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1) = W(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2),$$

una proprietà che non si riesce ad imporre facilmente a meno che non si ricorra all'ipotesi particolare che

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Phi(\lambda_1) + \Phi(\lambda_2) + \Phi(\lambda_3),$$

dove  $\Phi$  è una funzione da dover individuare.

Usando questa ipotesi Ogden [34] propone la seguente forma funzionale

$$(5.4) \quad W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3),$$

dove le  $\mu_i$  e le  $\alpha_i$  sono costanti materiali. Ogden richiede che

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i = 2\mu,$$

dove  $\mu$  è il modulo di taglio infinitesimo che sappiamo deve essere positivo. La scelta di  $n = 3$  o  $n = 4$  sembra essere ottimale per descrivere i dati sperimentali di Treloar con grande accuratezza e questo non solo nel caso della tensione semplice ma anche nei casi del taglio semplice, della torsione e negli stati di deformazione biassiale.

Il modello di Ogden è sicuramente una pietra miliare nel cammino verso una possibile soluzione del problema di Signorini. Si noti che il modello di Ogden, tra l'altro, contiene sia il modello neo-Hookeano che il modello di Mooney-Rivlin come casi particolari. In ogni caso, deve essere anche chiaro che il suo successo richiede un alto prezzo da pagare. Infatti, questo modello è vittima della sindrome dell'elefante di John von Neumann (1903-1957):

With four parameters I can fit an elephant, and with five I can make him wiggle his trunk.

Il modello di Ogden funziona bene grazie a un numero importante di parametri nessuno dei quali possiede un'interpretazione microscopica [17].

Nel 2004 in un lavoro, che vede lo stesso Ogden come coautore, [35] arriva la 'diagnosi' definitiva per questo modello e ancora una volta è lo spirito iniziale del problema di Signorini ed un'analisi matematica rigorosa a formulare la 'patologia'. Infatti, non avendo nessuna interpretazione micro-meccanica diretta dei vari parametri in (5.4) questi devono essere determinati a partire da dati sperimentali con una procedura di fitting. Essendo alcuni di questi parametri degli esponenti, il funzionale che deve essere minimizzato in questa procedura dipende in modo non-lineare dagli stessi. Si può quindi dimostrare in modo rigoroso che il minimo di questo funzionale non è unico. Questo significa che dato un *set* di dati sperimentali la procedura di fitting permette di ottenere diversi insiemi di parametri ottimali. I residui associati con i vari insiemi sono del tutto confrontabili. Inoltre, non si riesce nello spirito dell'interpretazione Truesdelliana del problema di Signorini, a trovare nessuna ragione termodinamica o più genericamente fisica per eliminare questi insiemi e neanche il teorema di Ball aiuta in questa direzione. D'altro canto, usando

questi insiemi nel modello si ottengono descrizioni equivalenti anche quando le loro predizioni sono quantitativamente differenti.

## 6. – La Teoria Entropica

Risulta possibile immaginare il reticolo polimerico che caratterizza i materiali tipo gomma, come una maglia di tessuto. I fili sono le macromolecole che costituiscono il materiale e i 'cross-links' sono i nodi che intrecciano questi fili per formare il tessuto vero e proprio. In questa situazione le macromolecole sono libere di muoversi quasi come fossero un fluido. A dare volume e forma propria al materiale è proprio la presenza dei legami covalenti che tecnicamente sono indicati come cross-links.

Per spiegare questa situazione in modo quantitativo, bisogna ricordare che a livello termodinamico il potenziale elastico è di fatto l'energia libera di Helmholtz

$$(6.1) \quad \Psi = \mathcal{E} - \Theta \eta,$$

dove  $\mathcal{E}$  è l'energia interna di legame,  $\Theta$  la temperatura assoluta e  $\eta$  l'entropia. Nel caso di un reticolo polimerico non è l'energia interna (ovvero l'energia di legame) ma bensì l'entropia a giocare un ruolo fondamentale. A livello fenomenologico le due componenti si confondono ma è possibile usare questa evidenza per introdurre a livello macroscopico delle nuove e importanti informazioni costitutive.

Rivlin non aveva minimamente colto questo fatto, ma Signorini a pagina 118 della sua nota sugli Annali di Matematica Pura e Applicata del 1943 [50] riporta esattamente la formula (6.1). Solo per questo il suo contributo merita lo stesso spazio che la letteratura, soprattutto anglosassone, dedica a quello di Rivlin. Certamente a sfavore di Signorini ha giocato l'aver sempre e solo scritto in italiano (e qualcosa in francese) ma la leggenda che l'aver usato la teoria delle omografie vettoriali abbia creato confusione deve essere sfatata. Chiunque conosca cosa si intende nella letteratura matematica per omografia vettoriale <sup>(6)</sup> sa bene che minima è la differenza di questo strumento con l'algebra lineare.

<sup>(6)</sup> Si veda per esempio la monografia di Meccanica Razionale di Bruno Finzi edita da Zanichelli che alle omografie dedica un capitolo.

Nella procedura che viene utilizzata dalla teoria statistica della gomma, per ottenere il potenziale elastico macroscopico dalla struttura mesoscopica del reticolo polimerico, si parte da un modello delle singole macromolecole. Per esempio, queste possono essere viste come delle catene molto lunghe costituite da un grande numero di segmenti rigidi collegati da giunti sferici. Per ogni singola macromolecola dati il numero  $n$  e la lunghezza  $l$  dei segmenti rigidi che la compongono è quindi possibile calcolare la probabilità,  $\Pi(L)$ , che la lunghezza estremo-estremo della catena abbia un certo valore  $L$ . Se gli estremi della macromolecola sono mantenuti liberi, esiste una lunghezza di riferimento media che possiamo indicare con  $L_0$ . Ovviamente questo significa che  $\Pi(L_0) > \Pi(L)$ .

Una volta determinata una formula per  $\Pi(L)$  si può calcolare l'entropia e quindi tramite la derivazione rispetto a  $L$  dell'energia libera si ottiene la forza da applicare sulla singola macromolecola per ottenere una data lunghezza estremo-estremo. Ovviamente, quanto maggiore è questa lunghezza, tanto maggiore è la forza da dover applicare e per mantenere perfettamente allineati tutti i segmenti rigidi che compongono la macromolecola. Se si riflette che esiste una sola configurazione associata con la lunghezza estremo-estremo massima possibile, ovvero  $L = nl$ , si capisce che in questo caso per mantenere questa lunghezza è necessaria una forza infinita.

Presa questa strada, il secondo passo per ottenere un modello macroscopico da queste informazioni mesoscopiche, è una tecnica per fare la media su tutte le macromolecole che compongono il reticolo. Infine, serve anche quella che si chiama una legge di Cauchy-Born che collega la deformazione macroscopica alla deformazione mesoscopica delle singole catene.

I chimici-fisici a partire da questa metodologia hanno sviluppato una serie di modelli molto sofisticati ma pur sempre fenomenologici. Non esiste per questa tipologia di materiali amorfi una teoria 'rigorosa' che permetta un passaggio dal limite discreto al limite continuo. Per questo motivo la teoria statistica della gomma negli anni ottanta si era in un certo senso "incartata" nelle stesse problematiche dei modelli che venivano generati con l'assiomatica della meccanica dei continui.

Negli anni novanta le cose cambiano per due motivi. La teoria dell'elasticità non-lineare comincia ad essere applicata in modo sistematico e con grande successo in biomeccanica. Si veda, per esempio, la discussione centrata sulla meccanica dei vasi arteriosi in [28]. Inoltre nel 1993 Arruda e Boyce propongono un modello di tipo statistico [5] che risveglia nella comunità scientifica più applicata l'interesse per il problema di Signorini.

Il modello di Arruda e Boyce è in realtà lacunoso sotto molti aspetti ma riesce a presentare in modo molto chiaro i fattori fondamentali per la costruzione di un modello statistico:

- una legge  $\Pi(L)$  con supporto compatto;
- una chiara regola di Cauchy-Born;
- una semplice modalità di fare la media sul reticolo.

Di fatto il modello di Arruda-Boyce si basa su dei cubi 'infinitesimi' i cui vertici sono collegati dalle catene macromolecolari e in questo modo è possibile passare dal mesoscopico al macroscopico in modo molto agevole (si veda la Figura 2). Il fatto che  $\Pi(L)$  abbia supporto compatto è un'altro elemento chiave del modello. Solitamente per  $\Pi(L)$  si usava una distribuzione Gaussiana, ma questa distribuzione non avendo supporto compatto associa una probabilità non nulla anche a lunghezze maggiori di  $nl$  e questo è paradossale. Usando una distribuzione basata sulla funzione speciale denominata "Langevin inversa", il modello proposto in [5] associa un'energia infinita alle distanze superiori a  $nl$ . Inoltre l'uso dei cubi 'infinitesimi' permette anche di fare agevolmente una semplice media per passare dal livello mesoscopico a quello macroscopico.

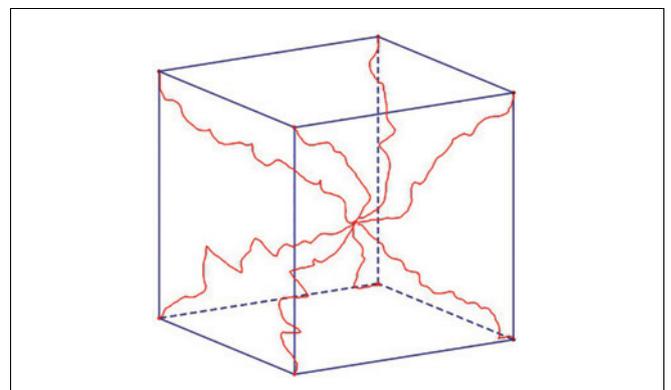


FIGURA 5 – Schema del 'mattoncino' base del modello di Arruda e Boyce.

L'idea di Arruda e Boyce può essere raffinata a livello statistico in diversi modi ma la chiave di volta per avanzare in modo decisivo il problema di Signorini avviene ancora a livello puramente fenomenologico.

Alan Gent (1927-2021) nel 1996 propone un semplice modello [22] che contiene tutti gli ingredienti del modello di Arruda e Boyce e permette di scavalcare con la potenza della sola immaginazione e della teoria proposta da Rivlin i limiti di un approccio 'costruttivista'. Il modello di Gent è molto semplice

$$(6.2) \quad W_G = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right),$$

quindi contiene solo due parametri  $\mu$  e  $J_m$  il cui significato è chiaro. Il primo è l'usuale modulo infinitesimo di taglio e il secondo è invece un parametro associato con la lunghezza media massima delle catene macromolecolari. Infatti si nota che nel caso

$$(6.3) \quad \lim_{(I_1-3) \rightarrow J_m} W_G = \infty,$$

e nel caso

$$(6.4) \quad \lim_{J_m \rightarrow \infty} W_G = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3),$$

si ritrova il modello neo-Hookeano che essendo basato su una distribuzione di probabilità estremo-estremo gaussiana, quindi senza supporto compatto. Questo modello viene descritto e celebrato nei dettagli in [25] e [42].

Si può dimostrare che il modello di Gent è un'approssimazione di quello di Arruda e Boyce. Infatti se nel modello di Arruda-Boyce si sostituisce la funzione inversa di Langevin con una particolare approssi-

mazione di Padè [27] si ottiene proprio il modello di Gent. Questo significa che l'uso delle funzioni analitiche proposte da Rivlin non è sufficiente.

Per inquadrare in modo efficace il modello di Gent si deve usare uno strumento introdotto recentemente [3]: lo spazio generalizzato di Mooney-Rivlin (GMS). Se si scrive la (5.2) nel caso di (6.2) si ottiene

$$(6.5) \quad S = (\lambda - \lambda^{-2}) \frac{\mu}{1 - J_m^{-1}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)}$$

una formula che può essere facilmente manipolata per descrivere il Mooney plot, ma che, a differenza del modello di Mooney-Rivlin, non riesce a descrivere una retta. Ci si può chiedere se sia possibile riscaldare i dati sperimentali anche per il modello di Gent in modo tale di avere uno spazio opportuno dove la (6.5) è letta come una retta. Questo spazio esiste ma effettivamente non è sufficiente riscaldare i dati ma è anche necessario operare una rotazione. Seguendo questa strada si arriva a scrivere

$$(6.6) \quad \mathcal{M}_G = \mu + \frac{1}{J_m} \zeta,$$

dove

$$\mathcal{M}_G := \frac{S}{\lambda - \lambda^{-2}},$$

come nello spazio di Mooney ma ora

$$\zeta := \frac{S(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)}{\lambda - \lambda^{-2}}.$$

In Figura 5 si confrontano le formule (6.5) e (6.6) con i classici dati in estensione semplice di Treloar. Ri-

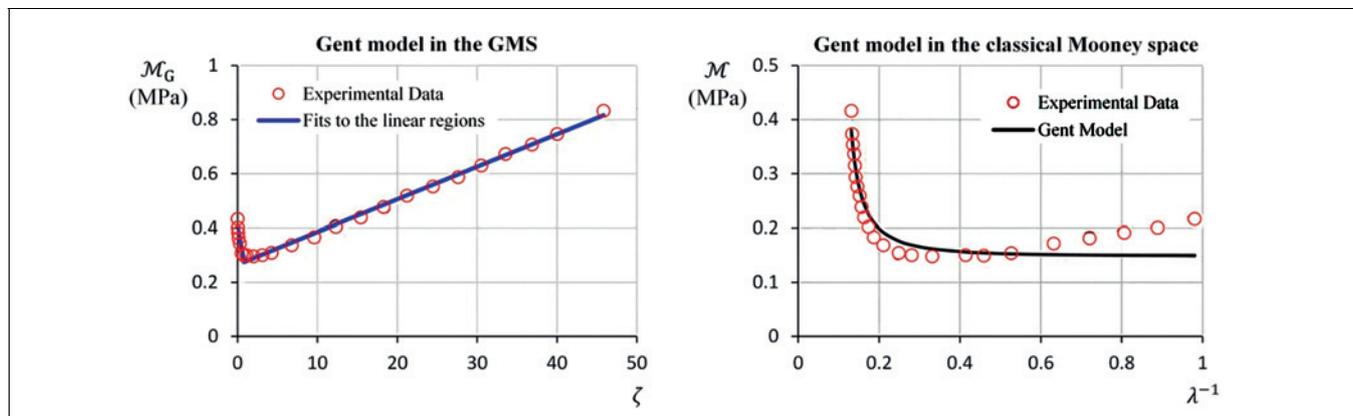


FIGURA 6 – Confronto del modello di Gent nello spazio GMS e nello spazio di Mooney (da [3]).

sulta chiaro che il modello di Gent (e quindi anche di Arruda-Boyce) non riescono a descrivere la curva per valori bassi e moderati delle estensioni. Lo si vede benissimo nel plot a sinistra in Figura 5 dove si vede che esistono due regimi lineari e che ovviamente risulta possibile solo descrivere uno dei due con il modello di Gent. Lo si vede anche dal plot a destra della Figura 5 ovvero dai dati nel classico Mooney plot. Infatti, essendo la variabile indipendente  $\lambda^{-1}$ , il range delle deformazioni moderate è da intendersi nell'intervallo  $]1/2, 1[$  dove chiaramente le predizioni del modello faticano ad essere adeguatamente descrittive. Guardando lo spazio classico di Mooney si vede anche che il modello di Gent è complementare a quello di Mooney-Rivlin. Infatti, l'espressione (5.3) per il modello di Mooney-Rivlin è una retta e può prevedere solo la parte dove i dati si dispongono in modo lineare dove, come abbiamo fatto notare, il modello di Gent fallisce. Il fallimento è chiaramente dovuta alla non presenza dell'invariante  $I_2$ .

Lo studio dei due modelli quello di Gent e quello di Mooney-Rivlin permette nel 2017 in [15] di accerchiare il problema di Signorini richiedendo al modello *ideale* le seguenti considerazioni:

- si deve avere una dipendenza del potenziale elastico da tutti gli invarianti;
- si deve tenere conto degli effetti non-gaussiani a livello mesoscopico;
- si deve avere la precisa compatibilità del modello non-lineare con lo stato elastico lineare e con la teoria debolmente non-lineare;
- si deve capire la connessione micro-meccanica del modello.

Il primo di questi tre punti è stato già ampiamente discusso. In [15] si aggiunge solo un'ulteriore considerazione: in uno spazio finito-dimensionale tutti gli insiemi di invarianti sono in una corrispondenza biunivoca. Questo significa che considerare un insieme piuttosto di un altro non cambia nulla se non una sorta di pre-condizionamento numerico dei dati sperimentali.

Il secondo di questi punti ci dice che le funzioni analitiche non sono il giusto ambiente da dove pescare la forma funzionale  $W$ . Questo è stato il limite dell'approccio di Rivlin. Per tenere conto degli effetti non-gaussiani bisogna usare le funzioni razio-

nali. Siccome i dati sperimentali permettono di osservare le derivate del potenziale elastico risulta ovvio che lo stesso contenga termini logaritmici.

Nel terzo punto si parla di stato elastico perché, ricorda Riccardo Baldacci (1917-1986), i materiali non hanno una sola risposta ma nella realtà possono ricondursi in certe circostanze ad un certo stato. Quindi per ogni materiale esiste, sotto certe condizioni, l'astrazione dello stato elastico lineare e poi di uno stato elastico non-lineare. Anzi dal lineare si può pensare di passare a quello debolmente non-lineare e poi a quello pienamente non-lineare. Lo stato debolmente non-lineare considera per il potenziale elastico uno sviluppo in serie di Taylor che continua agli ordini superiori la teoria lineare che è del secondo ordine. Mentre nella teoria lineare tutti i modi di deformazione sono disaccoppiati, la teoria debolmente non-lineare del terzo ordine permette di accoppiare il modo di estensione longitudinale con quelli di taglio e quella del quarto ordine permette un accoppiamento completo di tutti i modi.

La teoria che propone Gent non usa le serie di potenze. Per capire la matematica del modello di Gent bisogna considerare gli l'approssimanti di Padé [8]. Data una funzione  $f$  il suo approssimante di Padé si esprime come il troncamento di una frazione continua il cui limite è proprio la funzione iniziale. Più precisamente un'approssimante di Padé di indice  $(p, q)$  della funzione  $f$  è una funzione razionale ottenuta con due polinomi di grado rispettivamente inferiori o uguali a  $p$  e  $q$  tale che lo sviluppo di Taylor di ordine  $p + q$  della frazione sia identico a quello della funzione stessa. Quest'ultimo dettaglio permette il confronto con la teoria debolmente non-lineare e permette di determinare un numero minimo di parametri costitutivi, numero da cui si deve cercare di non allontanarsi per evitare il problema dell'elefante di von Neumann. Questo numero "ottimale" di parametri elastici nel caso dei materiali isotropi e incomprimibile deve essere tre perché questo è il numero di parametri della corrispondente teoria debolmente non-lineare dove tutti i modi di deformazione risultano accoppiati [15].

Se infine, come richiesto dall'ultimo punto della nostra lista, si riesce anche a collegare il comportamento macroscopico alla struttura mesoscopica del materiale allora si ottiene una situazione ancora più promettente. Signorini aveva a sua volta previsto

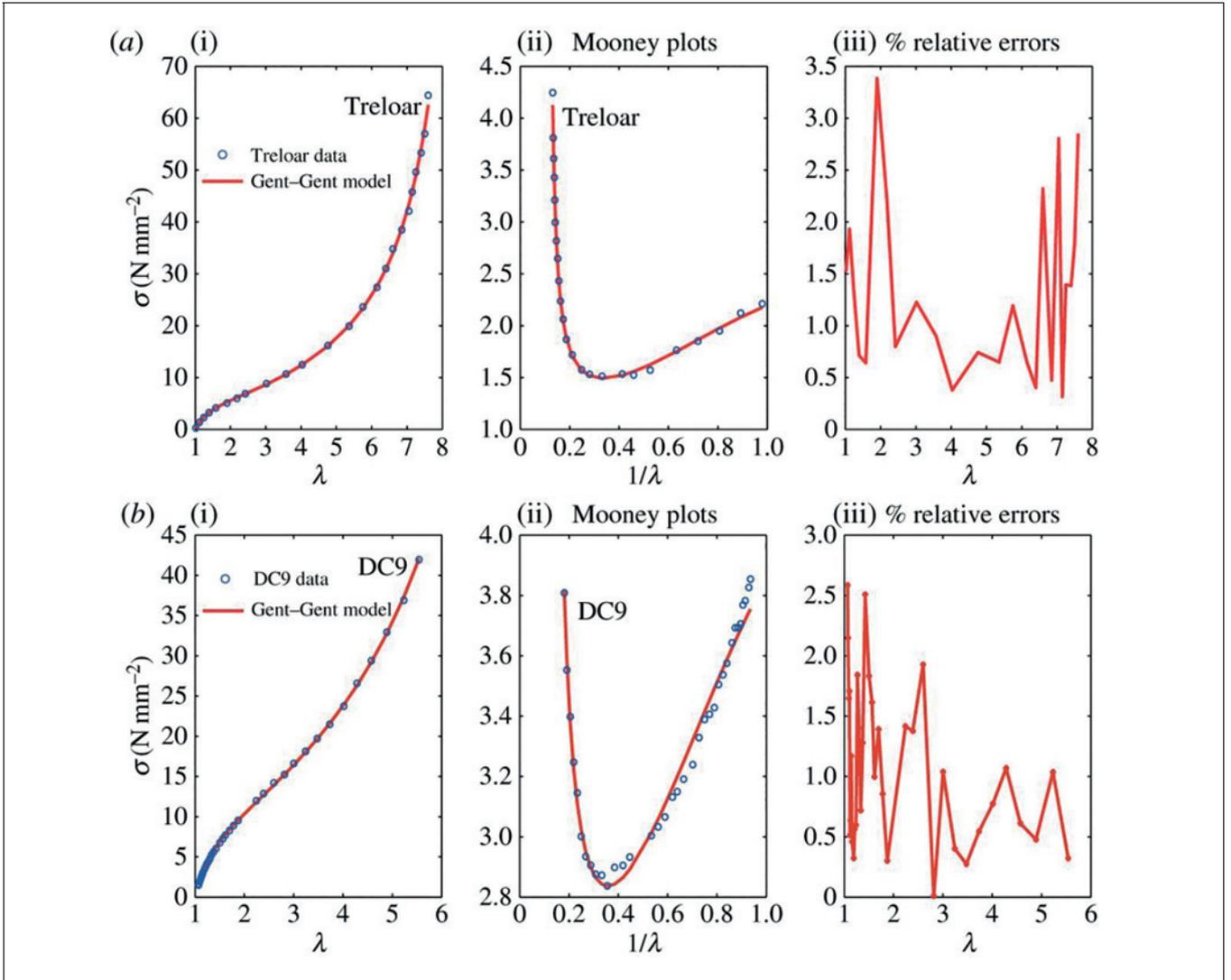


FIGURA 7 – Il successo del modello di (6.7) nel descrivere i dati sperimentali (da [15]).

questo fatto individuando nella nota [53] del 1949 un'alternativa con tre parametri a (2.2) criticando proprio il fatto che quest'ultimo non era compatibile con la generale teoria debolmente non-lineare del quarto ordine.

In [15] sulla base di queste considerazioni si ritiene che il modello proposto nel 2002 [38]

$$(6.7) \quad W_{GG} = -\frac{C_1}{2} J_m \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m}\right) + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right),$$

dove  $C_1$ ,  $C_2$  e  $J_m$  sono tre parametri costitutivi sia ideale. Infatti, questo modello con solo tre parametri e tutti riconducibili ad una chiara interpretazione mesoscopica, ottiene una descrizione dei dati di Treloar con errori relativi sempre sotto il 5%. Per la

pratica ingegneristica è un grande successo. Dal punto di vista matematico si riesce a sistemare l'idea fondamentale di Rivlin in uno schema più generale che permette di ottenere modelli più robusti di quello di Ogden.

Il parametro  $C_2$  in (6.7) è collegato con il fatto che nel reticolo polimerico le catene sono sicuramente più libere che in un reticolo cristallino ma sono comunque confinate in dei 'tubi' ideali perché non possono sbattere una contro l'altra soprattutto se i polimeri sono atattici, in quanto i vari monomeri si respingono tra loro. Diversa è la situazione per i polimeri tattici, dove i monomeri si possono attrarre e cristallizzare. Il modello (6.7) viene indicato con il nome di *Gent-Gent* in quanto anche il termine che

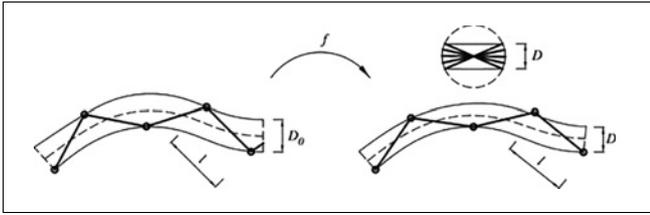


FIGURA 8 – Se la sezione del tubo dove sono confinate le catene cambia a causa della deformazione (indicata con  $f$  nella figura) si introduce una correzione di fronte al termine logaritmico che si ottiene calcolando l'entropia associata con la  $\Pi(L)$ . Questo termine è proporzionale al secondo invariante  $I_2$  e nel caso più semplice porta ad un secondo termine logaritmico (da [14]).

depende da  $I_2$  era stato precedentemente introdotto da Gent nel 1958.

## 7. – Conclusioni

La teoria dell'elasticità non-lineare è un argomento complesso sia dal punto di vista dei modelli meccanici che da quello dei metodi matematici. Questa complessità ha un impatto notevole in tutta la reologia dei materiali. Nell'ambito dei materiali polimerici, lo studio di fenomeni come la visco-elasticità, la morfo-elasticità, la fatica e la frattura, tanto per fare alcuni esempi, non può fare a meno di un buon modello elastico. Quindi, riuscire a sciogliere questa complessità è un passo sostanziale per fare avanzare tutta la meccanica dei continui.

Oggi siamo capaci di descrivere con sufficiente accuratezza il comportamento meccanico di molti materiali tipo gomma e dei tessuti molli. Questo è possibile perché è stato possibile collegare il comportamento macroscopico di questi materiali con la loro struttura mesoscopica [18]. In queste pagine abbiamo cercato di raccontare la storia di come siamo arrivati ad ottenere modelli sufficientemente 'robusti' capaci di descrivere gli esperimenti più comune e con un potere predittivo 'stabile'.

In questa storia Antonio Signorini ha avuto un ruolo molto più importante e profondo di quello che usualmente gli viene riconosciuto ed è per questo che si è considerato di indicare la ricerca di un 'buon' potenziale elastico come il problema di Signorini.

Queste ricerche non solo hanno avuto un forte impatto dal punto di vista tecnologico ma hanno anche permesso di ottenere diversi risultati raffinati dal punto di vista matematico. La teoria di Ball ne è

l'esempio più importante, ma anche gli studi sulla natura delle soluzioni e delle relazioni universali hanno permesso di mettere in luce diversi aspetti teorici di grande rilevanza e spessore matematico.

Riuscire a dominare il problema di Signorini nel caso dei materiali comprimibili e dei materiali anisotropi è una sfida ancora più complessa di quella che è stata narrata. Si guardi per esempio il lavoro [36] per avere un'idea delle difficoltà che si debbono considerare nel caso di materiali con le variazioni di volume. In ogni caso, oggi, salendo sulle spalle di Rivlin e Signorini siamo già stati capaci di guardare molto più lontano. Riuscendo a collegare il livello mesoscopico dei polimeri con quello macroscopico [43] siamo riusciti a usare la teoria dell'elasticità per descrivere la meccanica dei materiali macromolecolari più disparati come le proteine o la seta dei ragni.

Nel futuro prossimo si possono sperare nuovi progressi da uno studio più rigoroso delle teorie debolmente lineari [47] e dalle teorie che permettono di sviluppare modelli capaci di collegare la meccanica dei continui con la meccanica statistica. Le prime sono teorie che nell'ambito della meccanica dei continui sono state considerate sempre troppo speciali ma che invece possono aiutare [48] ad estendere in maniera fondamentale la nostra comprensione dei fenomeni elastici non-lineari. Le seconde sono necessarie per permettere il collegamento micro-macro che alla base dei progressi più recenti [10].

**Ringraziamenti.** Dedico questa mia storia al professor Gaetano Caricato allievo diretto di Antonio Signorini. Questa ricerca è stata realizzata sotto gli auspici del GNFM dell'INDAM.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] ALMANSI, E. (1911). *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi*. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei: Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Vol. 20, pp. 705-714).
- [2] ARMANNI, G. (1915). *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi*. Il Nuovo Cimento (1911-1923), 9(1), 427-447.
- [3] ANSSARI-BENAM, A., BUCCHI, A., DESTRADE, M., & SACCOMANDI, G. (2022). *The Generalised Mooney Space for Modelling the Response of Rubber-Like Materials*. Journal of Elasticity, 1-15.
- [4] ANTMAN, S. S. (1995) *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer, New York, NY.

- [5] ARRUDA, E. M., & BOYCE, M. C. (1993). *A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 41(2), 389-412.
- [6] BALL, J. M. (1976). *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*. Archive for rational mechanics and Analysis, 63(4), 337-403.
- [7] BALL, J. M., & JAMES, R. D. (2002). *The Scientific Life and Influence of Clifford Ambrose Truesdell III*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 161(1), 1-26.
- [8] BAKER, G.A. & GRAVES-MORRIS P. (1996): Padé Approximants Encyclopedia of Mathematics and its Applications CUP.
- [9] BELLINO L., FLORIO G., GORIELY A. & PUGLISI G. (2023) *Cooperative melting in double-stranded peptide chains through local mechanical interactions*. J. R. Soc. Interface, 20: 2023013020230130.
- [10] BLAYSAT, B., BALANDRAUD, X., GRÉDIAC, M., VIVES, E., BARRERA, N., & ZANZOTTO, G. (2020). *Concurrent tracking of strain and noise bursts at ferroelastic phase fronts*. Communications Materials, 1(1), 3.
- [11] BRILLOUIN, L. (1925) *Sur les tensions de radiation*. Ann. Phys., 4:528-86.
- [12] DESTRADE, M., & SACCOMANDI, G. (2010). *On the rectilinear shear of compressible and incompressible elastic slabs*. International journal of engineering science, 48(11), 1202-1211.
- [13] DESTRADE, M., GILCHRIST, M. D., MURPHY, J. G., RASHID, B., & SACCOMANDI, G. (2015). *Extreme softness of brain matter in simple shear*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 75, 54-58.
- [14] DESTRADE, M., SACCOMANDI, G., & SGURA, I. (2017). *Methodical fitting for mathematical models of rubber-like materials*. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 473(2198), 20160811.
- [15] DESTRADE, M., MURPHY, J., & SACCOMANDI, G. (2019). *Rivlin's legacy in continuum mechanics and applied mathematics*. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 377(2144), 20190090.
- [16] DESTRADE, M., DORFMANN, L., & SACCOMANDI, G. (2022). *The Ogden model of rubber mechanics: 50 years of impact on nonlinear elasticity*. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 380(2234), 20210332.
- [17] DE TOMMASI, D., PUGLISI, G., & SACCOMANDI, G. (2015). *Multiscale mechanics of macromolecular materials with unfolding domains*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 78, 154-172.
- [18] ERICKSEN, J. L. (1954). *Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 5(6), 466-489.
- [19] ERICKSEN, J. L. (1955). *Deformations possible in every compressible, isotropic, perfectly elastic material*. Journal of Mathematics and Physics, 34(1-4), 126-128.
- [20] FICHERA, G. (1979). *Il contributo italiano alla teoria matematica dell'elasticità*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 28(1), 5-26.
- [21] GENT, A.N. (1996) *A New Constitutive Relation for Rubber*. Rubber Chemistry and Technology: March 1996, Vol. 69, No. 1, pp. 59-61.
- [22] GRIOLI, G. (1962). *Mathematical theory of elastic equilibrium: recent results (ERG ANGEW MATHE, volume 7)*. Springer Science & Business Media. Chicago.
- [23] HASTINGS, S. P., & MCLEOD, J. B. (2011). *Classical methods in ordinary differential equations: with applications to boundary value problems (Vol. 129)*. American Mathematical Soc.
- [24] HORGAN, C. O. (2015). *The remarkable Gent constitutive model for hyperelastic materials*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 68, 9-16.
- [25] HORGAN, C. O., & SACCOMANDI, G. (1999). *Simple torsion of isotropic, hyperelastic, incompressible materials with limiting chain extensibility*. Journal of Elasticity, 56(2), 159-170.
- [26] HORGAN, C. O., & SACCOMANDI, G. (2002). *A molecular-statistical basis for the Gent constitutive model of rubber elasticity*. Journal of Elasticity, 68(1), 167-176.
- [27] HUMPHREY, J. D. (1995). *Mechanics of the arterial wall: review and directions*. Critical Reviews???? in Biomedical Engineering, 23(1-2).
- [28] KEARSLEY, E. A. (1989). *Note: Strain invariants expressed as average stretches*. Journal of Rheology, 33(5), 757-760.
- [29] KLEIMAN, S. L. (1997). *Bertini and his two fundamental theorems*. ArXiv preprint alg-geom/9704018.
- [30] MANGAN, R., DESTRADE, M., & SACCOMANDI, G. (2016). *Strain energy function for isotropic non-linear elastic incompressible solids with linear finite strain response in shear and torsion*. Extreme Mechanics Letters, 9, 204-206.
- [31] MARCOLONGO, R. (1907). *Progressi e sviluppo della teoria matematica della elasticità in Italia (1870-1907)*. Il Nuovo Cimento (1901-1910), 14(1), 371-393.
- [32] MOONEY, M. (1940). *A theory of large elastic deformation*. Journal of applied physics, 11(9), 582-592.
- [33] OGDEN, R. W. (1972). *Large deformation isotropic elasticity-on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 326(1567), 565-584.
- [34] OGDEN, R. W., SACCOMANDI, G., & SGURA, I. (2004). *Fitting hyperelastic models to experimental data*. Computational Mechanics, 34, 484-502.
- [35] PODIO-GUIDUGLI, P., & CAFFARELLI, G. V. (1991). *Extreme elastic deformations*. Archive for rational mechanics and analysis, 115, 311-328.
- [36] PUCCI, E., & SACCOMANDI, G. (1997). *On universal relations in continuum mechanics*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 9(2), 61-72.
- [37] PUCCI, E., & SACCOMANDI, G. (2002). *A note on the Gent model for rubber-like materials*. Rubber chemistry and technology, 75(5), 839-852.
- [38] PUCCI, E., & SACCOMANDI, G. (2013). *The anti-plane shear problem in nonlinear elasticity revisited*. Journal of Elasticity, 113(2), 167-177.
- [39] PUCCI, E., RAJAGOPAL, K. R., & SACCOMANDI, G. (2015). *On the determination of semi-inverse solutions of nonlinear Cauchy elasticity: The not so simple case of anti-plane shear*. International Journal of Engineering Science, 88, 3-14.
- [40] PUCCI, E., SACCOMANDI, G., & VITOLO, R. (2016). *Bogus transformations in mechanics of continua*. International Journal of Engineering Science, 99, 13-21.
- [41] PUGLISI, G., & SACCOMANDI, G. (2015). *The Gent model for rubber-like materials: an appraisal for an ingenious and simple idea*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 68, 17-24.

- [42] PUGLISI, G., & SACCOMANDI, G. (2016). *Multi-scale modeling of rubber-like materials and soft tissues: an appraisal*. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 472(2187), 20160060.
- [43] QUINTANILLA, R., & SACCOMANDI, G. (2007). *The importance of the compatibility of nonlinear constitutive theories with their linear counterparts*. J. Appl. Mech., 74(3): 455-460
- [44] RIVLIN, R. S. (1948). *Large elastic deformations of isotropic materials IV. Further developments of the general theory*. Philosophical transactions of the royal society of London. Series A, Mathematical and physical sciences, 241(835), 379-397.
- [45] SACCOMANDI, G. (2001). *Universal results in finite elasticity, Nonlinear elasticity: theory and applications*, volume 283 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., 97-134.
- [46] SACCOMANDI, G., & VERGORI, L. (2021). *Some Remarks on the Weakly Nonlinear Theory of Isotropic Elasticity*. Journal of Elasticity, 1-26.
- [47] SACCOMANDI, G., VERGORI, L., & ZANETTI, E. M. (2022). *Linear, weakly nonlinear and fully nonlinear models for soft tissues: which ones provide the most reliable estimations of the stiffness?* Philosophical Transactions of the Royal Society A, 380(2234), 20210321.
- [48] SACCOMANDI, G., & VIANELLO, M. S. (2024) *Antonio Signorini and the proto-history of the non-linear theory of elasticity*. Arch. Hist. Exact Sci. (2024). <https://doi.org/10.1007/s00407-024-00328-2>.
- [49] SIGNORINI, A. (1943). *Trasformazioni termoelastiche finite*. Annali di Matematica pura ed applicata, 22, 33-143.
- [50] SIGNORINI, A. (1945) *Recenti progressi della teoria delle trasformazioni termoelastiche finite* in Atti del Convegno matematico del 1942 Roma, Bardi, 153-168. 31, 35-53.
- [51] SIGNORINI, A. (1949). *Trasformazioni termoleastiche finite*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 30, 1-72.
- [52] SIGNORINI, A. (1961) *Risultati semplici della teoria non linearizzata dell'Elasticità*. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano 31, 35-53.
- [53] TAYLOR, G. I (1950) *Seventh International Congress for Applied Mechanics, 1948*. (1950) Nature.
- [54] TRELOAR, L. R. G. (1949) *Physics of Rubber Elasticity*. OUP.
- [55] TRUESDELL, C. (1956). *Das ungelöste Hauptproblem der endlichen Elastizitätstheorie*. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 36(3-4), 97-103.
- [56] WANG, C. C., & TRUESDELL, C. (1973). *Introduction to rational elasticity (Vol. 1)*. Springer Science & Business Media.
- [57] YAVARI, A., & GORIELY, A. (2023). *The universal program of nonlinear hyperelasticity*. Journal of Elasticity, 154(1), 91-146.



Giuseppe  
Saccomandi

Giuseppe Saccomandi è un cultore di meccanica razionale ed in particolare di meccanica dei continui. Ha insegnato presso la Sapienza e l'università di Lecce ed è attualmente ordinario di fisica-matematica a Perugia. In passato è stato presidente dell'International Society for the Interactions of Mathematics and Mechanics (ISIMM) ed è direttore pro-tempore del GNFM dell'INDAM. Membro di numerosi comitati editoriali di riviste internazionali e stato premiato con la Bourse de la Ville de Paris nel 2006 e dal Leverhume Trust nel 2024. Alla passione per la matematica applicata e le scienze meccaniche unisce anche quella per la musica come bassista e chitarrista di diverse bands punk e post-punk.