Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Fabio Bellissima

Eulero, Lambert e i musici

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (2024), n.1, p. 53–62.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_1_53_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2024.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 9, N. 1, aprile 2024, 53-62

Eulero, Lambert e i musici

FABIO BELLISSIMA
Università di Siena
E-mail: fabio.bellissima@unisi.it

Sommario: *In anni cruciali per la teoria armonica, nella Berlino di Federico il Grande, due insigni matematici, Eulero e Lambert, e due importanti teorici musicali, Kirnberger e Marpurg, interagiscono sul problema del temperamento della scala.*

Abstract: *In crucial years for harmonic theory, in the Berlin of Frederick the Great, two eminent mathematicians, Euler and Lambert, and two important musical theorists, Kirnberger and Marpurg, interacted on the problem of the temperament of the scale.*

1. – Introduzione

A pagina 180 del suo *Die Kunst des reinen Satzes in der Musik* (*L'arte della composizione severa in musica*) il musicista e teorico Johann Philipp Kirnberger, ([1]) parlando di una sua scoperta, dichiara:

> Ho mostrato questa scoperta al professor Eulero subito dopo averla fatta, cioè nel 1766, quando era ancora qui, e gli ho fatto notare che il rapporto 10935:16384 era il più vicino a una quinta temperata per ottenere un temperamento equabile in un ciclo di 12 quinte. Anche il compianto professor Lambert considerò questa scoperta così importante che non esitò a proporre queste 7 quinte e una terza maggiore come temperamento equabile nelle *Mémories de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres* del 1774, a pagina 64. ([2]) Alfine, la seguente recensione di un'opera eccellente dimostrerà che è stato possibile scrivere un intero libro sulla mia scoperta del rapporto 8192:10935 che ad alcuni può sembrare, se non impossibile, comunque molto strano.

Nel 1766, data in cui Kirnberger comunicò la sua scoperta ad Eulero, entrambi si trovavano a Berlino, alla corte di Federico II di Prussia. Vi era anche Lambert, invitato due anni prima dallo stesso Eulero. Sempre nel 1766 Eulero lasciò Berlino per tornare a San Pietroburgo (ecco perché, nel passo citato, compare l'espressione "ancora qui"); Kirnberger e Lambert invece rimasero a Berlino fino alla morte. Quella di Lambert avvenne nel 1777, due anni prima della pubblicazione dell'opera di Kirnberger (motivo per cui, nella citazione, questi parla del "compianto professor Lambert") e tre anni dopo la pubblicazione della sua *Memoria*. In essa Lambert cita come destinatario dell'opera Friedrich Wilhelm

Accettato: 14 maggio 2024.

([1]) Johann Philipp Kirnberger (1721-1783) fu, insieme a Friedrich Wilhelm Marpurg, uno dei maggiori teorici musicali del gruppo berlinese. Studiò con Johann Sebastian Bach ed ebbe Carl Philipp Emanuel Bach tra i suoi allievi. La sua grande ammirazione per il maestro lo portò a collaborare con il figlio per la raccolta e la pubblicazione dei corali a 4 voci. Sistemò inoltre le opere bachiane per la biblioteca di Anna Amalia di Prussia, sorella di Federico II, cui appartenne la partitura autografa dei concerti brandeburghesi. Non si limitò a trasmettere l'eredità di Bach conservandone le opere, ma si impegnò a diffonderne le idee attraverso l'insegnamento e le proprie pubblicazioni. In *Die Kunst des reinen Satzes in der Musik*, il suo lavoro principale, polemizza con Rameau, di cui rifiuta il concetto di *basso fondamentale* e l'idea che la melodia sia frutto dell'armonia. Nella sua produzione compositiva – parte in stile severo, parte in quello galante – rimase costantemente al di sotto dei suoi modelli.

([2]) Si tratta dell'Accademia di Berlino, le cui Memorie in quegli anni erano scritte in francese.

Marpurg, (3) anch'egli teorico musicale del gruppo berlinese e fiero avversario di Kirnberger. Alla corte di Federico troviamo dunque due grandi matematici e due importanti teorici musicali che interagiscono intorno a un problema di temperamento.

2. – Il rapporto di Kirnberger

Nel brano citato Kirnberger sostiene di avere scoperto il rapporto 8192:10935. Per spiegare cosa esso esprima, e perché si possa parlare di scoperta, ci limitiamo alle informazioni essenziali, sintetizzabili in due punti (per un inquadramento più ampio si vedano ad esempio [Is1] e [Be2]):

(P1) I rapporti numerici delle consonanze. Le consonanze fondamentali della musica occidentale, cioè l'*ottava* (ad esempio Do-do), la *quinta* (ad esempio Do-Sol), la *quarta* (ad esempio Do-Fa) e la *terza maggiore* (nel seguito semplicemente *terza*, ad esempio Do-Mi) sono ottenute da corde le cui lunghezze – a parità di tensione e spessore – sono nel rapporto 2:1 per l'ottava, 3:2 per la quinta, 4:3 per la quarta e 5:4 per la terza. Parleremo di questi rapporti come dei "rapporti corrispondenti agli intervalli" (4).

(3) Friedrich Wilhelm Marpurg (1718-1795) fu un importante esponente della scuola teorico-musicale berlinese. La sua mentalità razionalistica lo portò a tentare di definire i confini del contrappunto polifonico in termini matematici. Durante il soggiorno parigino conobbe Rameau e divenne il principale propugnatore delle sue teorie in Germania. A questo riguardo ebbe una accesa disputa con Kirnberger, fatto che non gli impedì di avere profonda stima del rivale. Ricoprì importanti cariche governative, tra cui quella di direttore delle lotterie di corte, e ricevette il titolo di *Consigliere di guerra*. Risale a lui l'opinione, durata a lungo, secondo cui Bach avrebbe adottato il temperamento equabile per il suo *Clavicembalo ben temperato*, mentre gli studiosi moderni sono ormai pressoché concordi nel ritenere che si trattasse di un temperamento lievemente ineguale. Come compositore ebbe un rilievo secondario; fu tuttavia uno dei primi esponenti della scuola liederistica berlinese, e proprio tra i lieder troviamo le sue opere più originali.

(4) Il concetto di consonanza ("termine designante la qualità gradevole di un intervallo o di un accordo" secondo la definizione pressoché uniforme delle enciclopedie della musica) ha subito una significativa evoluzione. Il mutamento più rilevante è quello che riguarda l'intervallo di terza, considerato dissonante dai Greci e assurto a ruolo di consonanza fondamentale nella musica tonale. Per un'analisi del concetto e dei problemi ad esso legati si vedano [Ba1] e [Ba2].

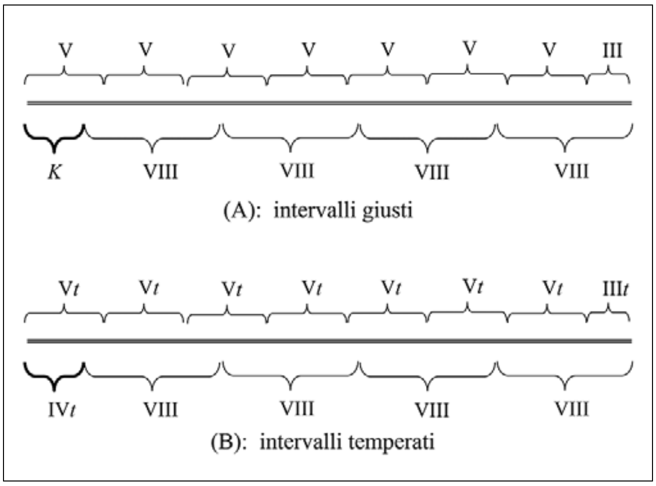

FIGURA 1 – L'intervallo K

(P2) Lo sfasamento logaritmico. Ciò che l'intuizione musicale percepisce come *somma* di due intervalli i cui rapporti corrispondenti sono $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ è l'intervallo il cui rapporto corrispondente è il *prodotto* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$; il rapporto corrispondente a ciò che viene percepito come *differenza* di tali intervalli è il *quoziente* $\frac{a}{b} / \frac{c}{d}$.

Ora scriviamo il rapporto di Kirnberger nella forma

$$\frac{10\,935}{8192} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \frac{5}{4}}{2^4}.$$

Considerando P1 e P2 vediamo che si tratta dell'intervallo che si ottiene sommando 7 intervalli di quinta e uno di terza, e sottraendo 4 intervalli di ottava (Figura 1A). Indicheremo questo intervallo con K. Dunque:

$$(1) \qquad 7V + 1III - 4VIII = K.$$

Con la sola eccezione dell'ottava, gli intervalli che si ottengono sui nostri strumenti a tasti, quali pianoforti e chitarre, sono lievemente diversi (peggiori) rispetto agli intervalli i cui rapporti abbiamo indicato in P1. I nostri strumenti sono infatti accordati secondo la *scala equabilmente temperata*, che divide l'ottava (il cui rapporto continua ad essere 2:1) ([5]) in 12 intervalli uguali. Questi intervalli sono definiti *semitoni temperati* (nel seguito semplicemente *semitoni*) e ad ognuno di loro corrisponde, per P2, il rapporto $\sqrt[12]{2}$. Sulla scala temperata l'intervallo di quinta si ottiene – o meglio, si approssima – sommando 7 semitoni, quello di quarta sommandone 5 o quello di terza sommandone 4. Pertanto, sempre per P2, i rapporti corrispondenti a questi intervalli temperati sono:

quinta temperata: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7$; quarta temperata: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^5$;

terza temperata: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^4$.

Gli scarti tra gli intervalli temperati e quelli indicati in P1, che per distinguerli dai temperati vengono detti *giusti* (o *puri*, o *naturali*), sono:

per le quinte: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1.4983... < 1.5 = \frac{3}{2}$;

per le quarte: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = 1.3348... > 1.\bar{3} = \frac{4}{3}$;

per le terze: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 = 1.2599... > 1.25 = \frac{5}{4}$.

Ora, se compiamo l'operazione fatta in precedenza di sommare 7 quinte e una terza e sottrarre 4 ottave, ma lo facciamo impiegando intervalli temperati anziché giusti, ciò che otteniamo è una quarta temperata (Figura 1B):

(2) $$7Vt + 1IIIt - 4VIII = IVt.$$

Infatti, poiché quinta, terza e ottava misurano rispettivamente 7, 4 e 12 semitoni, l'intervallo ottenuto misura $7 \cdot 7 + 4 \cdot 1 - 12 \cdot 4 = 5$ semitoni, che è appunto la misura della quarta temperata. Confrontando la quarta temperata con K scopriamo che i due intervalli sono sostanzialmente identici (in termini musicali la loro differenza è dell'ordine di un milionesimo di ottava):

(3) $$K = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \frac{5}{4}}{2^4} = 1.334838... \qquad IVt = \left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = 1.334839...$$

Dalla (quasi) uguaglianza

(4) $$K = IVt$$

e da (1) segue la (quasi) uguaglianza

(5) $$7V + 1III - 4VIII = IVt.$$

Ciò che Kirnberger dimostra è dunque la possibilità di ottenere un intervallo temperato componendo intervalli giusti. Chiameremo la (5) *uguaglianza di Kirnberger*.

3. – Intervalli giusti contro intervalli temperati

Che l'uguaglianza di Kirnberger sia tale "da poterci scrivere un libro intero" – per usare l'espressione del suo scopritore – non è un'affermazione del tutto priva di fondamento. La compresenza simultanea di intervalli giusti e temperati la rende un ponte tra le due impostazioni che hanno caratterizzato l'argomento con cui per secoli si è identificato il rapporto tra matematica e musica: l'accordatura della scala.

Da un lato troviamo il mondo degli intervalli giusti, ottenuti tramite rapporti tra numeri naturali. I suoi princìpi si sono sviluppati nel tempo. Secondo la stretta osservanza pitagorica, i rapporti degli intervalli dovevano coinvolgere solo potenze di 2 e 3; secondo la tradizione tolemaica gli intervalli tra suoni consecutivi della scala dovevano avere la forma *epimoria* $\frac{n+1}{n}$; ([6]) dal Rinascimento in poi il nume-

([5]) Il fatto che le corde di un pianoforte non siano "ideali" può rendere opportuno un piccolo aumento del rapporto 2:1 per le ottave agli estremi della tastiera (v. [Ba1]).

([6]) Nel proemio della *Sectio Canonis*, opera attribuita a Euclide, troviamo l'assioma secondo cui le consonanze devono corrispondere a rapporti *multipli*, cioè riconducibili alla forma $\frac{n}{1}$, o *epimori* (v. [Is2] e [Be1]). Nei *Libri Armonici* Tolomeo trasforma il principio, richiedendo che ad essere epimori siano gli intervalli (non consonanti) tra note adiacenti della scala.

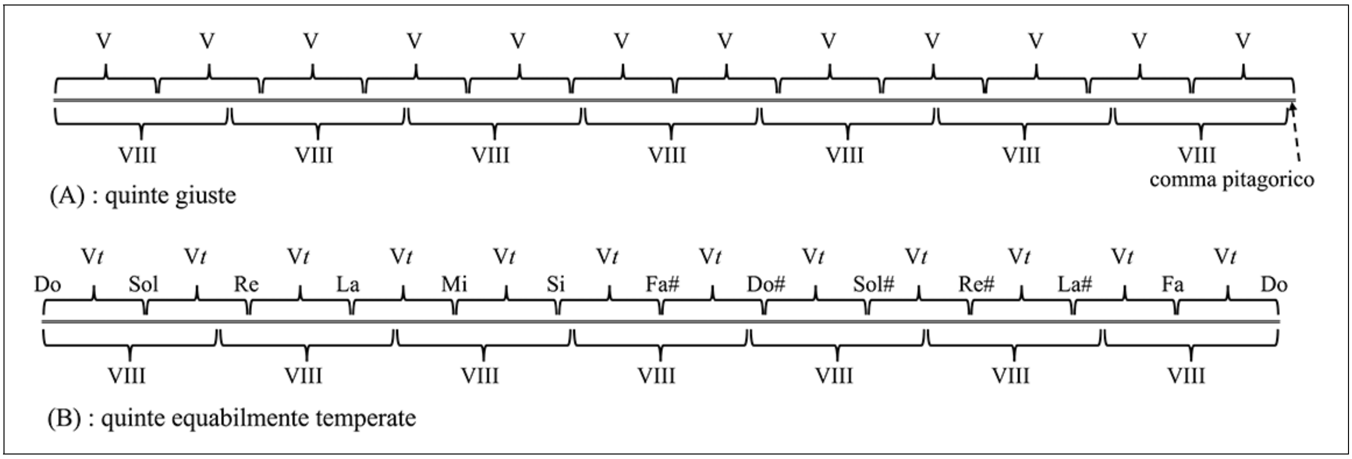

FIGURA 2 – Il comma pitagorico

ro 5, impiegato dai Greci solo in intervalli considerati dissonanti, fu elevato al rango di possibile produttore di consonanze, venendo così a costituire, insieme ai pitagorici 2 e 3, l'insieme dei *numeri sonori*. Differenze a parte, l'elemento unificante di questa impostazione è stato il rifiuto delle grandezze irrazionali.

Dall'altro lato troviamo il mondo dell'equidivisione dell'ottava, che ebbe in Aristosseno il più noto precursore e che, pur con significative eccezioni, fu frequentato più dai musici che dai matematici (v. [Li] e [Sc]). L'inconciliabilità dei due mondi, apparentemente non incompatibili, deriva dal più antico teorema di cui si abbia una testimonianza: il Teorema di Archita, secondo cui tra due numeri naturali in rapporto epimorio $\frac{n+1}{n}$ non esistono né uno né più medi proporzionali. Dal fatto che l'ottava corrisponde al rapporto $\frac{2}{1}$ segue allora, per P2, che nessuna sua divisione in intervalli uguali è esprimibile mediante rapporti razionali. L'impossibilità di equidividere razionalmente non solo l'ottava ma anche gli altri intervalli di cui le scale di impostazione pitagorica erano composte $\left(\text{quinta}: \frac{3}{2}; \text{quarta}: \frac{4}{3}; \text{terza}: \frac{5}{4}; \text{tono}: \frac{9}{8}\right)$ riempì la teoria armonica di *commi*, di microintervalli che misuravano incontri mancati. Quello che ci riguarda da vicino è il *comma pitagorico*, che misura il mancato incontro tra 12 quinte e 7 ottave (Figura 2A):

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.0136....$$

Se al posto delle quinte giuste impieghiamo quinte temperate, allora l'incontro ha luogo, essendo $\left(\sqrt[12]{2}\right)^{7\cdot 12} = 2^7$. La quinta temperata corrisponde pertanto a una quinta giusta a cui è stato sottratto $\frac{1}{12}$ di comma pitagorico. Inoltre, con i 12 salti di quinta temperata si ottengono, a meno di ottave, le 12 note della scala equabilmente temperata (Figura 2B). ([7]) Anche il rapporto $\frac{K}{IVt}$ può essere considerato un comma; tuttavia è talmente piccolo (circa un ventimillesimo di comma pitagorico) che può essere ignorato. Così facendo la (quasi) uguaglianza (4) diventa il punto di incontro ravvicinato tra il mondo degli intervalli giusti e quello dell'equidivisione dell'ottava.

La scoperta di Kirnberger non ha solo un interesse teorico. Nel Settecento il temperamento degli intervalli, con il conseguente abbandono delle scale formate da rapporti giusti, stava diventando un'esigenza irrinunciabile. Le composizioni musicali presentavano sempre più spesso cambi di tonalità al loro interno e le scale con i rapporti giusti non erano in grado di produrli in modo soddisfacente. Per contro, gli intervalli giusti sono quelli che l'orecchio umano è in grado di riconoscere e produrre con maggior facilità. La scoperta di Kirnberger, mostrando come ottenere un intervallo temperato mediante intervalli

([7]) Poiché due note a distanza di ottava sono considerate equivalenti, la successione delle quinte viene abitualmente rappresentata in modo circolare. Per questo motivo si usa dire che il circolo delle quinte temperate "si chiude".

giusti (v. (5)), offriva un metodo per accordare le scale temperate a orecchio.

4. – Eulero e i musici

Non conosciamo la reazione di Eulero quando Kirnberger gli parlò della sua scoperta, ma possiamo immaginarla. Nel *Tentamen novae Theoriae Musicae*, pubblicato nel 1739, Eulero costruisce una elaborata teoria per generare in modo algoritmico scale musicali con intervalli giusti e con un numero variabile di note per ottava (fino a 24); l'aumento del numero delle note era infatti una parziale risposta al problema del cambio di tonalità. Egli basa la sua teoria su una concezione fisica del suono che gli permette di definire quello che chiama il *gradus suavitatis* dei vari intervalli, tutti rigorosamente espressi da rapporti tra numeri naturali. Un qualunque tentativo di equidivisione, aprendo la porta agli irrazionali, distruggerebbe la teoria dalle fondamenta.

> Questo genere [la scala equabilmente temperata] va considerato massimamente contrastante con l'armonia, anche se le orecchie meno acute percepiscono appena la differenza. ([Eu1], IX.17)

La sua condanna del temperamento è dunque totale. Ventisette anni dopo – nello stesso 1766 in cui Kirnberger gli comunica la scoperta – Eulero torna sull'argomento con una memoria dell'Accademia (v. [Eu2]) in cui attribuisce la quasi generale accettazione del temperamento ad una correzione automatica della mente umana, che approssima le consonanze "false" ai valori giusti. Non si tratta di un avvicinamento all'equidivisione, ma di un tentativo di giustificare il "paradosso" che colpisce la teoria del *gradus suavitatis*, secondo cui uno scostamento anche impercettibile dai rapporti giusti porterebbe il misuratore di dissonanza su valori altissimi.

Spostandoci dal piano teorico ad uno più comportamentale, ciò che emerge dalla corrispondenza di Eulero con altri musicisti rafforza l'ipotesi che egli non abbia mostrato grande entusiasmo verso ciò che Kirnberger gli comunicava. Al celebre violinista e compositore Giuseppe Tartini, il quale gli aveva inviato una copia del suo *Trattato di musica secondo la vera scienza dell'armonia*, Eulero scrisse:

> Tutto ché io sia poco informato della lingua italiana, ho procurato di comprendere le idee del celebre virtuoso signor Tartini sopra la Teoria dell'armonia, che tanto più importar deggiono perché sono opere del maggior compositore di questi tempi. Ora io non credo che sia duopo estimare il merito di quest'opera dai principii e dall'armonia, li quali essendo bastemente stabiliti sembrano piuttosto appartenenti alli Geometri ed ai Fisici che ai gran Musici. ([Ta], p. 260)

Al di là delle cortesie di circostanza, la risposta si può così sintetizzare: la pratica ai musici, la teoria ai fisici e ai matematici (ai *geometri*, come si diceva allora). Ovviamente, una tale risposta irritò Tartini che, se pur con altrettanta cortesia, accusò Eulero di aver mancato il bersaglio:

> Se bastasse fisica e geometria sola, vi è al bisogno l'uomo del secolo, ed è lei. Dico di più. Se nelle di lei ricerche avesse avuto a fianchi un Musico che giustamente l'avesse informato del vero bisogno dell'arte nostra, ella avrebbe colto il punto.([Ta], p. 265)

Sullo stesso tenore si pone la corrispondenza tra Eulero e Rameau, il padre della teoria tonale. Nel 1752 il musicista inviò al matematico una copia delle sue *Riflessioni sui principi dell'armonia* (v. [Ra1]) perché "votre suffrage, Monsieur, m'est trop précieux pour que je néglige de l'obtenir". Eulero rispose al "Très Excellent Musicien" evidenziando gli elementi di concordanza con la sua teoria, salvo osservare che "la diversità delle ottave non cambia per niente la natura di una consonanza, sebbene ne cambi il piacere" (v. [Ra2]). A questo punto il musicista inviò al matematico una memoria per meglio giustificare la sua posizione riguardo al problema dell'*identità delle ottave* (v. [Ra3]), ma non ebbe risposta.

Almeno una volta i rapporti scesero ben al di sotto di questo livello di educata incomprensione. Nel *Tentamen* Eulero osservò che la sua scala dodecafonica coincideva, salvo una piccola differenza sul Si*b*, con quella del teorico e musicista Johann Mattheson, (8) invitandolo implicitamente a sanare questo piccolo errore al fine di raggiungere il "vero genere armonico". Come risposta, Mattheson definì

(8) Johann Mattheson, 1681-1764, fu compositore, cantante d'opera, clavicembalista, teorico musicale, oltreché importante diplomatico tedesco. Singolare fu il suo rapporto con Händel. Dopo averlo quasi ucciso con un colpo di spada durante una lite, divenne suo amico fraterno e, alla morte del grande musicista, ne pubblicò la biografia a sue spese.

Eulero "un pedante direttore di proporzioni e un mercante di *Ratio*".

5. – Il metodo di Lambert

Con Lambert il quadro cambia, sia nei rapporti con il temperamento che in quelli con i musici. Nella memoria *Remarques sur le tempérament en Musique* citata da Kirnberger, egli converte sul nascere ogni rapporto intervallare nel suo logaritmo, ponendosi così nella condizione di eseguire tutti i calcoli in modo additivo azzerando le difficoltà procurate dallo sfasamento tra il linguaggio degli intervalli musicali e quello dei rapporti numerici (v. P2). Lambert non è il primo matematico a impiegare i logaritmi in musica. La primogenitura spetta a Juan Caramuel de Lobkowitz, che nel *Mathesis biceps: vetus et nova* del 1670 adottò per i suoi "logarithmi musici" la base 2 in quanto rapporto corrispondente all'ottava. Stessa scelta fece Eulero, che impiegò i logaritmi per comparare più facilmente gli intervalli giusti con quelli temperati. Nessuno di costoro ne fece però un uso sistematico comparabile a quello di Lambert. Innanzitutto, questi è il primo autore a impiegare come scala di riferimento quella equabilmente temperata; e poiché gli intervalli di questa scala sono tutti multipli in senso logaritmico del semitono, la cui misura è $\sqrt[12]{2}$, prende questo valore come base. In tal modo il logaritmo di qualunque intervallo equamente temperato è un numero intero, pari al numero dei semitoni da cui è composto; per contro, agli intervalli giusti esclusa l'ottava spettano logaritmi irrazionali. Ed è qui che risiede il motivo per cui la singolarità del lavoro di Lambert si percepisce già ad una prima lettura. Dal Teorema di Archita in poi, gli intervalli giusti avevano sempre avuto il ruolo dei "buoni", mentre gli intervalli frutto di equidivisione erano i "cattivi", i *sordi*, gli irrazionali, accettati solo per motivi di pratica musicale. In Lambert gli intervalli giusti continuano ad essere i buoni, ma solo per l'orecchio; i buoni per i calcoli sono diventati gli intervalli equabili, essendo i numeri naturali passati dalla loro parte.

Nel passo che abbiamo riportato all'inizio, Kirnberger afferma che Lambert realizzò il temperamento equabile impiegando una uguaglianza come la sua: "non esitò a proporre queste 7 quinte e una terza maggiore come temperamento equabile nelle *Mémories*". In quest'opera del matematico non vi è però alcun riferimento al musicista, il quale peraltro non mostra segni di risentimento, compiangendo anzi la prematura morte del professore. Data la loro compresenza in un ambiente in cui erano entrambi figure di rilievo, è improbabile che Lambert – interessato alla musica in modo non occasionale ([9]) – non fosse a conoscenza dei risultati di Kirnberger. Tuttavia, nell'opera del matematico l'importanza dell'intervallo K deriva soprattutto dal suo inserimento in una complessa teoria che va ben oltre il temperamento equabile. Per comprenderla, partiamo comunque da quest'ultimo.

In Figura 2B abbiamo visto come con salti di quinta (7 semitoni) e ritorni di ottava (12 semitoni) si ottengano tutte le note di questa scala. Ciò deriva dal fatto che l'equazione

$$7x + 12y = q, \tag{6}$$

dove q è un numero intero che indica la misura in semitoni di un qualunque intervallo temperato, ha sempre soluzioni intere (essendo 7 e 12 primi tra loro). Ad esempio, ponendo $q = 1$ abbiamo, tra le infinite soluzioni,

$$7 \cdot (-5) + 12 \cdot 3 = 1, \qquad 7 \cdot 7 + 12 \cdot (-4) = 1. \tag{7}$$

Quindi, partendo dal Do, possiamo ottenere il Do# scendendo di 5 quinte e salendo di 3 ottave, oppure salendo di 7 quinte e scendendo di 4 ottave. Se al posto delle quinte temperate impiegassimo quinte giuste, nel primo caso mancheremmo il bersaglio Do# per un difetto di $\frac{5}{12}$ di comma pitagorico, nel secondo per un eccesso di $\frac{7}{12}$, tanti quante le quinte impiegate: il dodicesimo di comma è infatti l'eccesso della quinta giusta rispetto a quella temperata. Tuttavia, mentre la quinta giusta è maggiore della temperata, la terza giusta ne è minore, il ché rende possibile, come mostra l'uguaglianza (5), impiegare intervalli giusti e compensare gli eccessi delle quinte con i difetti delle terze. Kirnberger era pervenuto alla (5) attraverso una serie di rapporti tra commi sempre più piccoli. Lambert procede in modo di-

([9]) Nell'anno seguente le *Mémories* Lambert pubblica il trattato *Observations sur les flûtes* in cui, partendo dai risultati ottenuti da Eulero, studia i toni prodotti da vari tipi di tubo comparandoli con le corde vibranti.

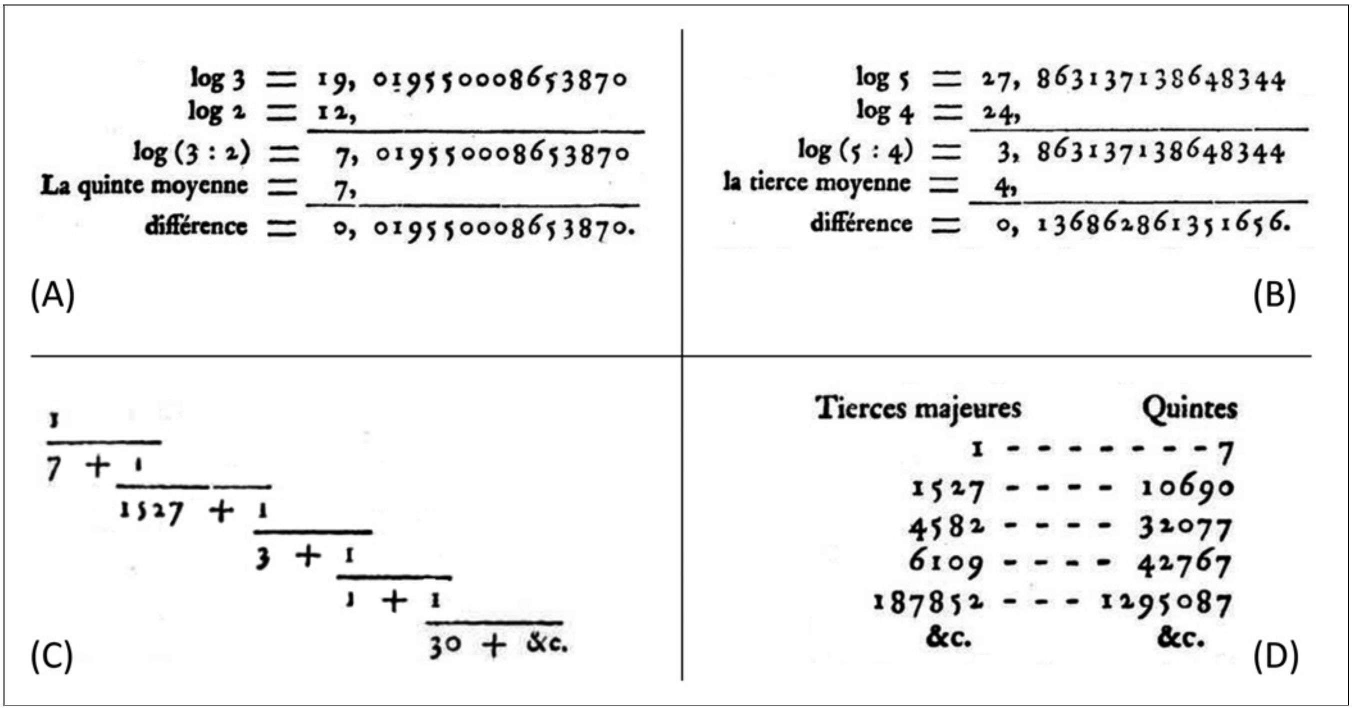

FIGURA 3 – Ec. *V*/Dif.*III*

retto. Usando i suoi logaritmi con 15 cifre decimali (Eulero, più ragionevolmente, si era limitato a 6) calcola prima l'eccesso della quinta giusta su quella temperata (*moyenne*, Figura 3A), poi il difetto della terza giusta su quella temperata (Figura 3B) ed infine il rapporto tra l'eccesso e il difetto, $\frac{0,0195...}{0,1368...}$, che sviluppa in frazione continua (Figura 3C).

Questa frazione ha una particolarità evidente: il secondo quoziente parziale è molto grande rispetto al primo. Ciò comporta che già la prima ridotta, $\frac{1}{7}$, sia molto accurata e che il passaggio dalla prima alle successive ridotte non aumenti significativamente la bontà dell'approssimazione. La (quasi) uguaglianza (4) trova dunque una sua giustificazione. Lambert, come prova di competenza in un campo di cui è stato uno dei più importanti studiosi ([10]), calcola anche alcune ridotte successive (Figura 3D). Vediamo così come la seconda ridotta già proponga di compensare 10690 quinte con 1527 terze ([11]), e la quinta ridotta ci chieda di intonare oltre un milione di quinte e quasi duecentomila terze. Per fortuna, subito dopo questi calcoli, egli osserva che "nella musica pratica il rapporto di 1 a 7 potrà essere più che sufficiente, essendo il risultante errore impercettibile". Adotta quindi la (quasi) uguaglianza

$$7V + 1III = 7Vt + 1IIIt, \tag{8}$$

che deriva dalla (2) e dalla (5) di Kirnberger, esprimendola nella forma

$$7Ec.V = 1Dif.III. \tag{9}$$

Ora, poiché qualunque intervallo equamente temperato è ottenibile da quinte temperate e ottave (v. (6)), esso sarà ancor più facilmente ottenibile aggiungendo anche le terze temperate, cioè impiegando le soluzioni intere dell'equazione

$$7x + 4y + 12z = q, \tag{10}$$

([10]) Nel 1761, impiegando lo sviluppo in frazione continua di $tan(x)$, dimostrò che se $tan(x)$ è razionale allora x è irrazionale, da cui si ottiene, essendo $tan(\pi/4) = 1$, che $\pi/4$ e – finalmente – π sono irrazionali. Nella seconda parte del suo *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* (1770) diede poi alle ricerche sulle frazioni continue una sistemazione organica.

([11]) Poiché $1527 \cdot 7 = 10\,689$, impiegando la prima anziché la seconda ridotta si commette un errore di una sola quinta su 10690.

Quintes n	Tierces majeures p	demi-tons. q	ton.
0	0	0	C
+ 7	+ 1	+ 5	F
+ 14	+ 2	+ 10	B
+ 21	+ 3	+ 3	Dis
+ 28	+ 4	+ 8	Gis
+ 35	+ 5	+ 1	Cis
+ 42	+ 6	+ 6	Fis
— 7	— 1	+ 7	G
— 14	— 2	+ 2	D
— 21	— 3	+ 9	A
— 28	— 4	+ 4	E
— 35	— 5	+ 11	H
— 42	— 6	+ 6	Fis

FIGURA 4 – Temperamento equabile

dove x, y e z sono rispettivamente il numero delle quinte, delle terze e delle ottave. Ad esempio, considerando ancora il caso $q = 1$, cioè il semitono, che in (7) abbiamo ottenuto rispettivamente nelle forme $-5Vt + 3VIII$ e $7Vt - 4VIII$, ora, impiegando anche le terze, si ricava molto più agevolmente nella forma $-1Vt + 2IIIt$:

$$7 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 12 \cdot 0 = 1. \tag{11}$$

Anche in questo caso però, se sostituiamo gli intervalli temperati con intervalli giusti manchiamo il bersaglio. Per poter attuare la sostituzione conservando la correttezza del risultato è necessario che, come nella (5) di Kirnberger, il numero delle quinte impiegate sia il settuplo di quello delle terze. Non è dunque più sufficiente soddisfare l'equazione (10); bisogna soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 7x + 4y + 12z = q \\ x = 7y. \end{cases} \tag{12}$$

Solo in questo caso l'interpretazione di x, y, z con i valori degli intervalli giusti darà lo stesso risultato dell'interpretazione con i valori temperati. Da (12) otteniamo l'equazione

$$53y + 12z = q \tag{13}$$

che, essendo 53 e 12 coprimi, ci fornisce infinite soluzioni intere del sistema. Torniamo quindi per l'ultima volta all'esempio $q = 1$. La migliore soluzione della (13) è $y = 5,\ z = -22$, da cui si ricava $x = 35$ e dunque

$$7 \cdot (-35) + 4 \cdot 5 + 12 \cdot (-22) = 1. \tag{14}$$

Contrariamente alle (7), la (14) ammette l'interpretazione delle variabili con intervalli giusti:

$$-35V + 4III - 22VIII = St. \tag{15}$$

Pertanto, il semitono St, che è il generatore di tutti gli intervalli equamente temperati, è ottenibile con intervalli giusti.

La grandezza dei numeri coinvolti vanifica però il valore pratico del risultato, che può essere più facilmente ottenuto con l'uguaglianza di Kirnberger. L'intervallo di quarta temperata, parimenti all'intervallo di quinta temperata di cui è il *complementare* (12), è in grado di generare con l'ottava tutti gli intervalli temperati, e lo fa nell'ordine inverso rispetto a quello della quinta (Figura 2B). Anche Lambert ricorre a questo sistema nella tabella in Figura 4, che spieghiamo: n e p (i nostri x e y) indicano il numero delle quinte e delle terze giuste, q la misura in semitoni temperati dell'intervallo equabile, mentre la colonna finale ci dice la nota a q semitoni dal Do. Il numero delle ottave non è specificato. La nomenclatura per le note è quella latina, che coincide con l'odierna germanico-anglosassone, con la differenza che B indica il Sib e non il Si, indicato con H; *is* sta per diesis. La seconda riga della tabella corrisponde all'equazione (5) di Kirnberger: 7 quinte ed una terza producono una quarta temperata, che ha $q = 5$ e che da Do (C) raggiunge Fa (F). Invece, con $q = 1$, da Do (C) si raggiunge Do# (*Cis*), in corrispondenza del quale la tabella dà i valori 35 e 5 della nostra (15).

Come abbiamo anticipato, la definizione del temperamento equabile è solo un passaggio dell'opera di Lambert, la cui costruzione mostra la sua potenza nella possibilità di temperare gli intervalli

(12) Due intervalli sono *complementari* se la loro somma è un'ottava.

anche in modo non equabile. Nel Settecento si ebbero numerose proposte di scale dodecafoniche "temperate", così chiamate perché si allontanavano dagli intervalli giusti distribuendo in vari modi il comma pitagorico tra i dodici intervalli di quinta che ogni scala dodecafonica possiede (v. [Br] e [Ba2]). La scala equabile, le cui quinte sono calanti di un dodicesimo di comma rispetto alle quinte giuste e quindi tutte uguali tra loro (Figura 2), fu solo una tra le tante, anche se quella vincente. Per ottenere intervalli temperati in modo non equabile basta arricchire la seconda equazione del sistema (12) con un parametro k, ottenendo

$$\begin{cases} 7x + 4y + 12z = q \\ x = 7y + k. \end{cases} \tag{16}$$

Se con (12), cioè con $k = 0$, le soluzioni intere x, y, z ci portavano – mediante x quinte giuste, y terze giuste e z ottave – all'intervallo equabilmente temperato di q semitoni, ora, con $k \neq 0$, le nuove soluzioni di (16) ci portano a k eccessi di quinta da tale intervallo, verso l'acuto se $k > 0$, verso il grave altrimenti. Poiché, come sappiamo, l'eccesso di quinta è $\dfrac{1}{12}$ di comma pitagorico, possiamo, agendo su k, spostarci micrometricamente lungo tutta l'ottava.

È nella parte conclusiva dell'opera che Lambert cita Marpurg (v. Nota 3):

> Questa Memoria era già stata letta all'Accademia quando il signor Consigliere di Guerra Marpurg, che è un grande amatore della musica ed è molto conosciuto per le sue numerose opere su questo argomento, mi ha proposto di cercare come, per mezzo di consonanze giuste (*pures*), potremmo produrre un temperamento in cui le quinte Do-Sol, La-Mi, Fa#-Do# e Re#-Si*b* rimangano in difetto di $2\frac{1}{2}$ eccessi di quinta, la quinta Fa-Do di 2 eccessi e le restanti quinte restino giuste.

La richiesta di Marpurg indica eccessi e difetti rispetto agli intervalli giusti e non, come fa Lambert, rispetto agli intervalli equabilmente temperati. Come prima cosa questi deve, per poter impiegare il sistema (16), tradurre le richieste riferendole alla scala equabile. A questo punto la soluzione arriva rapidamente e chiude il lavoro.

6. – Conclusione

Né il corposo *Tentamen* di Eulero né la breve memoria di Lambert ebbero un gran seguito. Nikolaus Fuss, il devoto segretario del primo, sostenne che il *Tentamen* non ebbe la fortuna che meritava perché conteneva "troppa geometria per i musicisti e troppa musica per i matematici". Ma questa è solo una delle ragioni, che peraltro accomuna tutti i lavori interdisciplinari, e in questo caso non fu neppure la più rilevante [13]. Nella storia della teoria armonica occidentale, alla cautela con cui i musici si muovevano tra i numeri e al loro desiderio di comunicare ai matematici le scoperte fatte, non sono quasi mai corrisposte, da parte dei matematici, né una pari cautela nel muoversi tra gli accordi, né la volontà di confrontarsi con chi poi gli accordi li doveva impiegare. Ciò portò alcuni di loro a costruire una (interessantissima, nel caso di Eulero) realtà musicale parallela, come osservò uno sconsolato Tartini scrivendo al suo nobile allievo Michele Stratico: "Mi confermo sempre più nel credere che il concetto dell'armonia formato da' dotti sia ben diverso da quello di noialtri professori. Le umilio i miei cordialissimi rispetti, la ringrazio di tutto cuore e mi rassegno sempre più."

La rapida scomparsa del metodo di Lambert ebbe invece una causa più specifica: il consolidarsi, negli stessi anni, di un nuovo metodo per temperare gli intervalli basato sui battimenti tra i suoni, metodo che si rivelò molto efficace e liberò i musicisti dal dover intonare lunghe sequenze di intervalli giusti. Ma al di là di questo insuccesso applicativo, la *Memoria* ci presenta una situazione che, pensiamo, sia unica nella storia della teoria musicale: un musicista che fa una precisa domanda, un matematico che dà una precisa risposta.

([13]) Glottlob Frege, per spiegare la freddezza con cui i suoi *Principi* furono accolti, osservava che "i matematici, quando si imbattono in espressioni logiche quali 'concetto', 'relazione', 'giudizio' pensano: *methaphisica sunt, non leguntur!*, e i filosofi, alla vista di una formula, esclamano: *mathematica sunt, non leguntur!*". Ciò non impedì all'opera di diventare un riferimento fondamentale nello sviluppo della Logica matematica.

BIBLIOGRAFIA

[Ba1] P. Barbieri, *Consonanze, scale e temperamenti*, in *Acustica musicale e architettonica*, Cingolani S. e Spagnolo R. eds., UTET, Torino, 2005, pp. 31-70, 913-916.

[Ba2] P. Barbieri, *Tuning and temperament: practice vs science 1450-2020*, Gangemi, Roma, 2023.

[Br] J. M. Barbour, J. M., *Tuning and Temperaments. A Historical Survey*, East Lansing Mich., 1951, reprint: New York, 1972.

[Be1] F. Bellissima, *La Sectio Canonis di Euclide e il suo errore logico*, Bollettino di Storia delle Scienze matematiche, vol. XXIII, 2002, pp. 5-45.

[Be2] F. Bellissima, *La scala musicale: una storia tra matematica e filosofia*, Carocci Editore, Roma, 2022.

[Eu1] L. Euler, *Tentamen novae theoriae musicae*, Petropoli, Ex Typographia Academiae Scientiarum, 1739. Edizione moderna in “Leonhardi Euleri Opera Omnia”, Lipsia, 1926, III. 1, pp. 197-427. Trad. it. a cura di De Piero, A., Memorie dell’Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche, V. 34, Torino, 2010.

[Eu2] L. Euler, *Conjecture sur la raison de quelques dissonances*, Berlin, 1766. Edizione moderna in “Leonhardi Euleri Opera Omnia”, Lipsia, 1926, III. 1, pp. 508-515

[Ki] J. P. Kirnberger, *Die Kunst des reinen Satzes in der Musik*, Deker und Hartung, Berlin und Könisberg, 1776-1779.

[Is1] S. Isola, *Su alcuni rapporti tra matematica e scale musicali*, Matematica, Cultura e Società. Rivista dell’Unione Matematica Italiana, 2016, ser. 1, vol. 1, n. 1, pp. 31-50.

[Is2] S. Isola, *L’antica acustica musicale e la Sectio Canonis: quello che resta di un prodotto della scienza ellenistica*, Rend. Acc. Naz. Sci. detta dei XL, Mem. e Rend. di Chim., Fis., Mat. e Sci. Net., 2021, ser. VI, v. 2, fasc. 1, pp. 25-51.

[La] J. H. Lambert, *Remarques sur le tempérament en Musique*, Mémories de l’Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Berlin, 1776, Tom. XX.

[Li] M. Litchfield, , *Aristoxenus and Empiricism: A Reevaluation Based on His Theories*, Journal of Music Theory, 1988, vol. 32, n. 1, pp. 51-73.

[Ra1] J. P. Rameau, *Nouvelles Réflexions de M. Rameau sur sa Démonstration du principe de l’harmonie*, Paris, 1752, in *Complete Theoretical Writings*, edited by E. R. Jacobi, American Institute of Musicology, 1967-72, vol. V, pp. 96-142.

[Ra2] J. P. Rameau, *Letter to the Swiss mathematician Leonhard Euler*, Paris, 1752, in *Complete Theoretical Writings*, edited by E. R. Jacobi, American Institute of Musicology, 1967-72, vol V, pp.146-148.

[Ra3] J. P. Rameau, *Extrait d’une reponse de M. Rameau à M. Euler sur l’identité des octaves*, Paris, 1752, in *Complete Theoretical Writings*, edited by E. R. Jacobi, American Institute of Musicology, 1967-72, vol V, pp. 167-188.

[Sc] B. Scimemi, *The Use of Mechanical Devices and Numerical Algorithms in the 18th Century for the Equal Temperament of the Musical Scale*, in *Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum*, Assayag, G. et al. eds., Springer-Verlag, Berlin, 2002, pp. 49-63.

[Ta] G. Tartini, *Lettere e documenti*, a cura di G. Malagò, EUT, Trieste, 2020.

Fabio Bellissima

Fabio Bellissima è stato ordinario di Matematiche Complementari presso l’Università di Siena. I suoi interessi di ricerca hanno riguardato la logica modale, l’algebra della logica e i rapporti tra matematica e teoria armonica. Su questo argomento, nel 2022, ha pubblicato La scala musicale. Una storia tra matematica e filosofia.