Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Alessandra Celletti

Suoni, colori e parole delle formule matematiche

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (2024), n.1, p. 29–38.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2024_1_9_1_29_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2024.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 9, N. 1, aprile 2024, 29-38

Suoni, colori e parole delle formule matematiche

ALESSANDRA CELLETTI
Università di Roma Tor Vergata
E-mail: celletti@mat.uniroma2.it

Sommario: *La Luna riveste un ruolo fondamentale per l'abitabilità del nostro pianeta. A questa conclusione si giunge dopo aver passato in rassegna alcune nozioni della meccanica celeste e della teoria dei sistemi dinamici. Gli ingredienti scientifici fondamentali sono il problema dei due corpi di Keplero, la legge di gravitazione di Newton, il problema dei tre corpi, la teoria del caos, il problema spin-orbita. Tuttavia, il filo conduttore di questa esposizione sarà di mostrare alcuni esempi di interazione tra scienza e arte. Cominciamo con l'osservare come Keplero coniuga sapientemente astronomia e musica, mentre Newton associa elementi di ottica alle note musicali. Osserviamo poi il ruolo della gravità nella pittura e come essa è stata interpretata da alcuni artisti; la teoria del caos si ritrova in letteratura, nel cinema, e viene addirittura proposta per la datazione di alcuni dipinti. Concludiamo sottolineando l'importanza della Luna che, dal punto di vista artistico, è stata fonte di ispirazione di numerosi scrittori e che, dal punto di vista scientifico, contribuisce a mantenere stabile l'asse di rotazione terrestre, svolgendo quindi un ruolo di stabilizzatore climatico per il nostro pianeta.*

Abstract: *The Moon plays a special role for the abitability of our planet. This conclusion is reached after having reviewed some notions of Celestial Mechanics and Dynamical Systems theory. The main scientific ingredients are Kepler's two-body problem, Newton's law of gravity, chaos theory, the spin-orbit problem. However, the main theme of this work will be to show some examples of interaction between science and art. We start by observing how Kepler skilfully combines astronomy and music, while Newton associates elements of optics with musical notes. We then observe the role of gravity in painting and how it has been interpreted by some artists; chaos theory is found in literature, cinema, and it is even proposed for dating some paintings. We conclude by stressing the importance of the Moon which, from an artistic point of view, has been a source of inspiration for many writers and which, from a scientific point of view, helps to keep the Earth's axis of rotation stable, thus playing a role of climate stabiliser for our planet.*

1. – Introduzione

Nel suo celebre libro [1] "Hasard et chaos" ([12]), il fisico matematico belga David Ruelle scrive:

> "Ci sono diversi modi di onorare la bellezza. Là dove un artista traccerebbe uno schizzo, scriverebbe una poesia o comporrebbe una melodia, lo scienziato immagina una teoria scientifica".

Sulla base della motivazione offerta da questa frase, viene spontaneo affermare che una formula matematica può essere bella alla stessa stregua di un quadro d'artista. Un teorema matematico può essere rassicurante come una delicata poesia, perché garantisce il risultato in maniera assoluta. Una teoria matematica può risultare dalla composizione di diversi strumenti, dalla teoria dei numeri alla probabilità, che si assemblano come in un'orchestra per comporre una sinfonia astratta.

Per restare in tema musicale, osserviamo che il concetto di armonia trova molte affinità con i problemi della Meccanica Celeste. Un esempio tra i

Accettato: 13 maggio 2024.

(1) Traduzione italiana: D. Ruelle, *Caso e caos*, Bollati Boringhieri (1992).

tanti è rappresentato dalla risonanza di Laplace tra i satelliti galileiani di Giove: Io, Europa, Ganimede. Infatti, nel 1799 il matematico francese P.-S. Laplace (1749-1827) osserva che i periodi dei satelliti di Giove soddisfano una relazione di *risonanza*, ovvero sono in rapporto commensurabile tra loro: il periodo di Europa è il doppio di quello di Io, il periodo di Ganimede è il doppio di quello di Europa. La conseguenza di tale relazione di risonanza è che Io, Europa e Ganimede non sono mai in congiunzione tra loro, ovvero non si trovano mai in una configurazione collineare e quindi non si trovano mai pericolosamente attratti tutti dalla stessa parte.

Curiosamente, in un suo studio sulla risonanza di Laplace, il fisico matematico olandese Willem de Sitter (1872-1934), associa in maniera efficace la matematica alla giurisprudenza ([4]): "Mathematics, like justice, is blind, and does not know what it does. Or, rather, it does the rigorously correct thing, even if asked to have considerations to circumstances. Mathematics can have no considerations. Also, of course, it can make no mistakes".

Nelle prossime sezioni il racconto si sdoppia in due direzioni volte a mostrare alcuni esempi di interazione tra scienza e arte. Da una parte, si cerca di spiegare il ruolo della Luna nello stabilizzare le variazioni dell'asse di rotazione terrestre (conclusione a cui giungiamo nella Sezione 6); questo obiettivo necessita di alcune nozioni fondamentali, come le leggi di Keplero per il problema dei due corpi (Sezione 2), la legge di gravitazione di Newton (Sezione 3), il problema dei tre corpi e la teoria del caos (Sezione 4). Dall'altra parte, ciascuna sezione contiene esempi di come la scienza ha influenzato la pittura, la letteratura, la musica, arrivando addirittura a diventare uno strumento per riconoscere e datare alcuni dipinti (Sezione 5).

Per concludere, è opportuno aggiungere una breve osservazione. Sebbene possa sembrare che il trasferimento di conoscenze ed informazioni vada solo nella direzione che va dalla scienza all'arte, non dobbiamo trascurare anche il flusso nella direzione opposta. Un esempio tra i tanti; Albert Einstein ha dichiarato: "Dostoevskij mi ha dato più di qualsiasi pensatore, più di Gauss". Ad esempio, nell'opera "I fratelli Karamazov", Dostoevskij discute della geometria non euclidea, come mostra il brano qui riportato: "Eppure si sono trovati e si trovano tuttora geometri e filosofi, anche tra i più illustri, che dubitano che tutta la natura, o più in generale tutto l'universo, sia stata creata secondo la geometria euclidea, e ardiscono persino ipotizzare che due linee parallele, che secondo Euclide non possono assolutamente incontrarsi sulla Terra, potrebbero invece incontrarsi in qualche punto dell'infinito".

2. – Keplero, l'armonia del cielo

Johannes Kepler (1571-1630), italianizzato in Giovanni Keplero, nasce in Germania nel 1571. Nel 1599 Keplero viene assunto come assistente di Tycho Brahe (1546-1601), un astronomo danese, famoso al punto da ricevere in dono l'isola di Hven dal re Federico II di Danimarca e Norvegia. Su quest'isola Brahe fa costruire l'osservatorio di Uraniborg, dove effettua osservazioni astronomiche, raccogliendo numerosi dati con una notevole precisione, soprattutto in relazione agli strumenti usati all'epoca. Keplero analizza accuratamente i dati astronomici raccolti da Tycho Brahe sulla posizione dei pianeti. Pur non conoscendo la legge di gravitazione universale (Newton nasce nel 1642, 12 anni dopo la scomparsa di Keplero), sulla base dei dati astronomici Keplero elabora tre leggi che descrivono i moti planetari e che si applicano anche alla dinamica della Luna sotto l'azione gravitazionale della Terra. Tuttavia, vedremo che la formulazione matematica di tali leggi non è abbastanza per Keplero, che invece ritiene che la descrizione del modo in cui i pianeti si muovono debba essere coniugata alla ricerca di un'armonia che sottende le traiettorie celesti.

Entrando nello specifico della teoria elaborata da Keplero, egli assume un modello di partenza semplificato e precisamente considera solo l'interazione tra due oggetti, trascurando l'attrazione esercitata dagli altri corpi del sistema solare. Questo modello è noto come "problema dei due corpi", e si applica ad esempio al Sole e un pianeta, oppure al Sole e un asteroide, od a un pianeta e un suo satellite. Studiando il problema dei due corpi, Keplero giunge alla conclusione che il movimento di ogni coppia di oggetti è regolato da tre leggi fondamentali, che per semplicità enunciamo qui di seguito, adattandole allo studio delle orbite dei pianeti attorno al Sole:

1. ciascun pianeta si muove su un'ellisse ed il Sole occupa uno dei due fuochi;
2. ogni pianeta spazza aree uguali in tempi uguali; pertanto, i pianeti, sono più veloci quando transitano vicino al Sole;
3. il quadrato del periodo necessario per compiere un'orbita completa attorno al Sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse; di conseguenza, il periodo orbitale cresce con la distanza dal Sole.

Queste tre leggi, ottenute su basi sperimentali nell'approssimazione del problema a due corpi, consentono di stabilire, con buona approssimazione, quali sono le traiettorie dei pianeti (ellissi), come le orbite vengono percorse (più velocemente al perielio e più lentamente all'afelio) e come tali orbite sono disposte in base al periodo del moto. In formule matematiche, la prima legge di Keplero si traduce come segue:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}\ , \tag{2.1}$$

dove r è distanza del pianeta dal Sole lungo l'ellisse, f è l'angolo descritto dal pianeta lungo l'orbita, mentre p è il parametro dell'ellisse, che dipende dal semiasse maggiore a e dall'eccentricità e.

Keplero lascia numerosi scritti in cui l'astronomia viene miscelata con la matematica, la fisica, la filosofia e la musica. Le prime due leggi di Keplero vengono enunciate nel trattato scritto nel 1609 ed intitolato "Astronomia nova", mentre la terza legge di Keplero viene enunciata nel trattato "Harmonices Mundi" del 1619. Il progetto di quest'ultima opera rinnova e trasforma il quadrivio di Boezio, che indica le quattro arti liberali, che diventano il fondamento dell'insegnamento scolastico: aritmetica, astronomia, geometria, musica. La suddivisione tradizionale della quantità include aritmetica e musica nel discreto, geometria e astronomia nel continuo. Per Keplero, invece, il discreto è rappresentato dall'aritmetica, mentre il continuo da geometria, musica e astronomia. In questo rinnovato contesto scientifico, Keplero scrive l'"Harmonices Mundi". L'opera consiste di cinque capitoli: il primo capitolo contiene una discussione sui poligoni regolari, il secondo si concentra sulla congruenza dei poliedri, per poi passare allo studio delle proporzioni armoniche in geometria e in musica nel terzo capitolo; il quarto capitolo è dedicato alla metafisica e all'astrologia; infine, l'armonia mostrata dalle orbite dei pianeti è discussa nel capitolo conclusivo, che rappresenta l'obiettivo principale del libro, l'anello di congiunzione tra l'armonia musicale e quella celeste.

FIGURA 1 – Le velocità angolari dei pianeti sul pentagramma, "Harmonices Mundi", Keplero (1619).

I pianeti conosciuti all'epoca di Keplero sono Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno. Dopo aver tentato di incastonare i pianeti in poliedri regolari, nell' "Harmonices Mundi" Keplero intende coniugare la fisica alla musica, proponendo un'analogia tra le leggi del cielo e l'armonia musicale. Questa idea si concretizza nel disegno sul pentagramma delle note corrispondenti alle velocità dei pianeti lungo l'orbita osservata, come mostrato nella figura 1.

Keplero considera le ellissi percorse dai pianeti, in cui il Sole occupa uno dei due fuochi; quindi, misura le velocità orbitali ai punti di minima e massima distanza dal Sole, il perielio e l'afelio. Infine, trova che i rapporti tra le velocità al perielio e all'afelio sono simili a quelli di una successione armonica. Ad esempio, per la Terra il rapporto è simile al semitono tra il *Mi* e il *Fa*. Ed è per questo motivo che Keplero afferma:

> "La terra canta *Mi, Fa, Mi*: potete dedurre persino dalle sillabe che in questo mondo non vi è che *Mi*seria e *Fa*me" ([7]).

Come mostrato nella figura 1, il numero di note associate a ciascun pianeta cresce con l'eccentricità; risulta quindi che Mercurio è il pianeta con il maggior numero di note, poiché la sua eccentricità è molto grande, $e = 0.2056$, mentre all'altro estremo si ha Venere con una sola nota, essendo la sua eccentricità molto bassa, $e = 0.0067$.

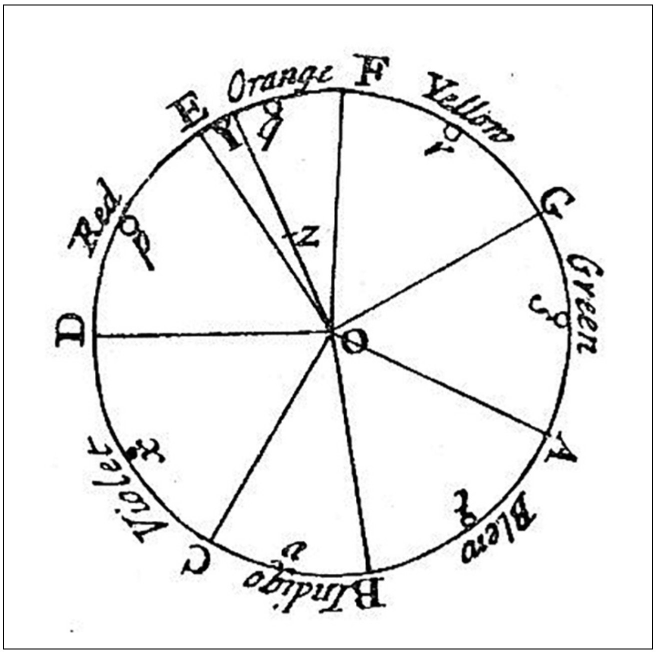

FIGURA 2 – Raffigurazione in [11] dell'associazione tra colori e note musicali, da wikipedia.

3. – Newton, musica e colori

La ricerca sull'armonia è uno dei temi di studio di Isaac Newton (1642-1726), che arriva ad elaborare una teoria scientifica in cui coniuga la musica con i colori. Egli è infatti convinto che ci sia una correlazione tra le sette note musicali e i colori dell'arcobaleno, e precisamente tra le frequenze di oscillazione della luce e del suono. A questo scopo, introduce l'indaco ([2]) e nel suo trattato intitolato "Opticks" ([11]) stabilisce che i colori rosso, arancione, giallo, verde, blu, indaco, viola sono proporzionali alle differenze di lunghezza di un monocordo che suona i toni di un ottava: *sol, la, fa, sol, la, mi, fa, sol.* Questa associazione tra colori e note musicali è rappresentata nella figura 2.

Gli studi di Newton su colori e musica arrivano qualche anno dopo la scoperta della legge di gravitazione universale, enunciata nel trattato "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" pubblicato nel 1687. In questa opera Newton introduce la ben nota formulazione della forza di attrazione gravitazionale F, che si esercita tra due corpi di masse m_1, m_2 posti a distanza r:

$$F = -\frac{G\, m_1 m_2}{r^2} \ , \tag{3.1}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, il cui valore è pari a $G = 6.67\, 10^{-11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$. Sulla base delle equazioni del moto di due corpi celesti, soggetti reciprocamente alla influenza gravitazionale espressa dalla forza (3.1), è possibile derivare formalmente le tre leggi di Keplero esposte nella Sezione 2.

Il carattere universale della gravitazione implica che tale forza si esercita tra ogni coppia di oggetti dotati di massa, siano essi due pianeti, oppure la Terra e la Luna, ovvero la Terra e una mela che cade da un albero (per usare un esempio iconico).

Passando dalla scienza all'arte, il concetto di un corpo in assenza di gravità si ritrova nelle opere di molti pittori. Qui ci limitiamo a due esempi. Marc Chagall (1887-1985) dipinge un mondo magico, in cui la gravità diventa un'illusione. In alcuni dei dipinti di Marc Chagall i personaggi fluttuano sospesi nell'aria sfidando la forza di gravità; a titolo esemplificativo citiamo i dipinti intitolati "L'amore che supera la forza di gravità", "Oltre la città", "La passeggiata", in cui i personaggi sono sospesi nell'aria.

Sono molteplici gli esempi di quadri di René Magritte (1898-1967) che mostrano come l'arte possa librarsi al di sopra della materia, eludendo la forza di gravità. Tra questi ricordiamo la famosa opera intitolata "Golconda" con decine di uomini sospesi nell'aria oppure "La battaglia delle Argonne" in cui una nuvola e un grosso sasso sfidano la forza di gravità, sospesi nell'aria alla stessa altezza, al cospetto di una falce di Luna.

4. – Il problema dei tre corpi e la teoria del caos

Le leggi di Keplero sono solo un'approssimazione della dinamica planetaria, in quanto lo studio è limitato all'interazione tra due corpi, ad esempio la Terra attorno al Sole, trascurando quindi l'azione gravita-

([2]) L'indaco, una particolare cromia tra blu e violetto, è uno dei colori dello spettro che può essere percepito dall'occhio umano; la sua frequenza è compresa tra 420 e 450 nanometri.

zionale degli altri pianeti. Un modello più realistico richiede che si consideri l'interazione con altri oggetti del sistema solare, in particolare l'azione gravitazionale di Giove, il più grande oggetto del sistema solare dopo il Sole. Si passa così dal problema dei due corpi di Keplero, Sole-Terra, al problema dei tre corpi Sole-Terra-Giove. Il *problema dei tre corpi* è il modello più celebre della Meccanica Celeste e studia, appunto, la dinamica di un oggetto (tipicamente di massa trascurabile), che si muove nel campo gravitazionale di due corpi primari dotati di massa. Essa si applica a qualsiasi terna di oggetti dotati di massa, inclusa la Luna, soggetta all'attrazione gravitazionale di Terra e Sole.

Sebbene il problema a due corpi ammetta una soluzione semplice, ovvero un'orbita a forma di ellisse, non altrettanto si può dire per il problema dei tre corpi. Questo problema è stato oggetto di uno studio approfondito da parte di numerosi matematici e in particolare di Henri Poincaré (1854-1912). Nella sua memoria "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", con cui si inizia "una nuova era nella storia della meccanica celeste" (per dirla con le parole di Karl Weierstrass), Poincaré dimostra che il problema a tre corpi non può essere risolto esattamente, come avviene nel caso del problema di Keplero. Tuttavia, in molte situazioni di interesse astronomico, il rapporto della massa dei corpi primari è piccola. Nell'esempio Sole-Terra-Giove, i corpi primari sono rappresentati dal Sole e da Giove, e il rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole è circa 10^{-3}. Pertanto, il problema dei tre corpi può essere rappresentato da un sistema *quasi integrabile,* che risulta essere la somma del problema (integrabile) a due corpi (Sole-Terra) e della perturbazione dovuta al terzo corpo (Terra-Giove).

Utilizzando variabili azione angolo $(\underline{I},\underline{\varphi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$, dove n denota il numero dei gradi di libertà del problema, $\underline{I}$ sono le azioni, $\underline{\varphi}$ sono gli angoli, l'Hamiltoniana che descrive il problema dei tre corpi di un oggetto di massa relativamente trascurabile soggetto all'azione gravitazionale di due corpi primari si scrive nella forma

$$\mathcal{H}(\underline{I},\underline{\varphi}) = h(\underline{I}) + \varepsilon f(\underline{I},\underline{\varphi}) \ , \tag{4.1}$$

dove h è l'Hamiltoniana che descrive il problema a due corpi, ε rappresenta il rapporto delle masse dei primari, f denota la perturbazione esercitata dal terzo corpo. Poiché si assume che ε sia un parametro relativamente piccolo, l'Hamiltoniana (4.1) è quasi integrabile, perché risulta integrabile per $\varepsilon = 0$. Infatti, le equazioni di Hamilton associate all'Hamiltoniana (4.1) per $\varepsilon = 0$ sono date da:

$$\dot{\underline{I}} = \underline{0}$$
$$\dot{\underline{\varphi}} = \frac{\partial h(\underline{I})}{\partial \underline{I}} \ ,$$

la cui soluzione è data da

$$\underline{I}(t) = \underline{I}(0)$$
$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}(0) + \frac{\partial h(\underline{I}(0))}{\partial \underline{I}}\, t \, .$$

Pertanto il sistema è integrabile, poiché le azioni sono costanti e gli angoli sono funzioni lineari del tempo.

Lo studio del problema dei tre corpi riveste un'importanza fondamentale per introdurre la teoria del caos. Infatti, correggendo un errore nella versione originale della sua memoria, Poincaré scopre l'esistenza di traiettorie caotiche, proprio studiando le soluzioni relative al problema dei tre corpi. Più precisamente, Poincaré trova che esistono alcune soluzioni delle equazioni che descrivono il problema dei tre corpi, che mostrano un'estrema sensibilità alla scelta delle condizioni iniziali. Una rappresentazione schematica è fornita dalla figura 3, che illustra un esempio di dinamica regolare e un

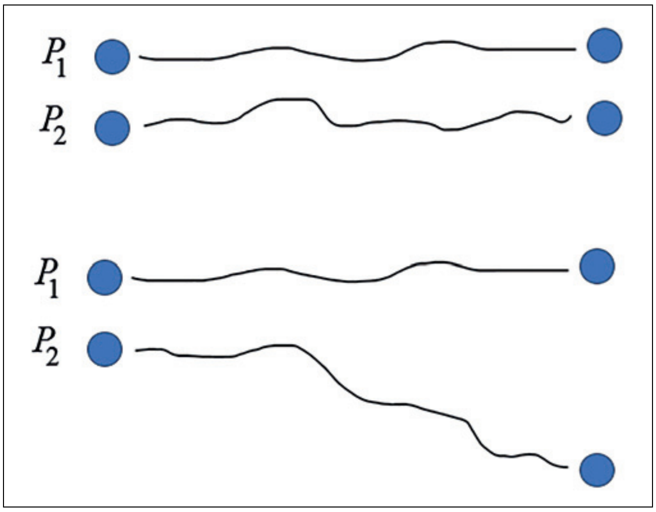

FIGURA 3 – Traiettorie regolari (in alto) e caotiche (in basso) di due oggetti P_1 e P_2 che partono con dati iniziali vicini.

esempio di dinamica caotica. Nel primo caso, le due traiettorie degli oggetti P_1 e P_2 partono da dati iniziali molto vicini e si mantengono vicine nel tempo; nel secondo caso, le due traiettorie di P_1 e P_2, pur partendo sempre da dati iniziali molto vicini, si allontanano nel tempo.

Il tasso di allontanamento delle due orbite è fornito dal cosidetto *esponente di Lyapunov* λ, secondo cui la distanza $d(t)$ tra le traiettorie al tempo t è ottenuta dalla distanza iniziale $d(0)$ moltiplicata per l'esponenziale $e^{\lambda t}$:

$$d(t) = d(0)\ e^{\lambda t}\ . \tag{4.2}$$

La teoria del caos rimane appannaggio di pochi matematici fino alla scoperta negli anni intorno al 1960, ad opera del meteorologo Edward Lorenz (1917-2008), di un semplice sistema autonomo di tre equazioni differenziali ([9]):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - xz - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\ , \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove σ, ρ, β sono costanti reali positive. Questo sistema di equazioni viene introdotto per studiare previsioni metereologiche; Lorenz osserva che le sue soluzioni mostrano una grande sensibilità alla scelta delle condizioni iniziali. Proprio partendo da questa osservazione, Lorenz intitola una sua conferenza "Predicibilità: può il battito delle ali di una farfalla in Brasile scatenare un tornado in Texas?". Sulla base della motivazione offerta dal titolo della conferenza di Lorenz, il caos viene identificato con il celeberrimo *effetto butterfly.*

Le equazioni differenziali (4.3) mostrano l'esistenza di un attrattore, ovvero un sottoinsieme dello spazio delle fasi con le seguenti proprietà:

1. è un insieme invariante;
2. quando il tempo tende all'infinito, l'insieme attrae tutte le soluzioni che partono in un suo intorno;
3. non ci sono sottoinsiemi propri con le proprietà (1) e (2).

Ci sono diversi tipi di attrattore; un attrattore si definisce "strano" se è sensibile alla scelta delle condizioni iniziali, ovvero ha un comportamento caotico. Questa proprietà è ulteriormente coniugata ad una complessa geometria, secondo cui l'attrattore strano ha una dimensione di Hausdorff non finita. In questo caso l'attrattore, come quello di Lorenz, si definisce *frattale.* Più precisamente si tratta di un oggetto geometrico con omotetia interna, ovvero con la proprietà di auto-similarità in cui la forma originale si ripete a scale diverse. La dimensione, appunto frattale, può essere non intera e determina il grado di irregolarità dell'attrattore. Un metodo per calcolare la dimensione frattale è chiamato metodo del *box-counting.* Esso consiste nel calcolare il numero minimo di scatole che sono necessarie per ricoprire a diverse scale l'oggetto frattale ([10], [5]). Questo metodo non viene utilizzato soltanto nella teoria dei sistemi dinamici, ma è alla base di alcune scoperte per analizzare e datare alcuni quadri, come vedremo nella Sezione 5.

5. – Arte e caos

Elementi della teoria del caos si trovano nei dipinti di numerosi artisti, laddove la regolarità lascia spazio al disordine del caso, pur preservando l'armonia complessiva dell'opera. Elementi di caos nella pittura si trovano ad esempio nelle opere del pittore fiammingo Hieronymus Bosch (1453-1516), come evidenziato nel trittico intitolato "Il giardino delle delizie", di cui è mostrato il pannello centrale nella figura 4, a sinistra. Più recentemente, l'artista svizzero Jean Tinguely (1925-1991) introduce l'arte cinetica nota come "Métamatic", che si realizza con la produzione di macchine artistiche che forniscono opere d'arte generative. Tra le opere di Tinguely ricordiamo *Chaos I,* una scultura di oltre 9 metri, esposta nel centro *The Commons* della città Columbus (Indiana, USA), oppure la scultura Heureka, una macchina tuttora funzionante, esposta a Zurigo (Svizzera), figura 4 a destra, realizzata assemblando sbarre di ferro, ruote di acciaio e altri pezzi metallici.

La nozione di caos ha permeato l'immaginario collettivo estendendosi alla letteratura e persino al cinema. In queste categorie, tra i tanti esempi citiamo il romanzo (a cui fece seguito il film) "Jurassic Park" di Michael Crichton in cui il protagonista è un matematico specializzato nella teoria del caos con cui spiega che la complessità dell'ecosistema di Jurassic Park viene messa a repentaglio da un errore in una minima porzione di DNA anfibio utilizzato per i dinosauri da laboratorio. Nell'ambito

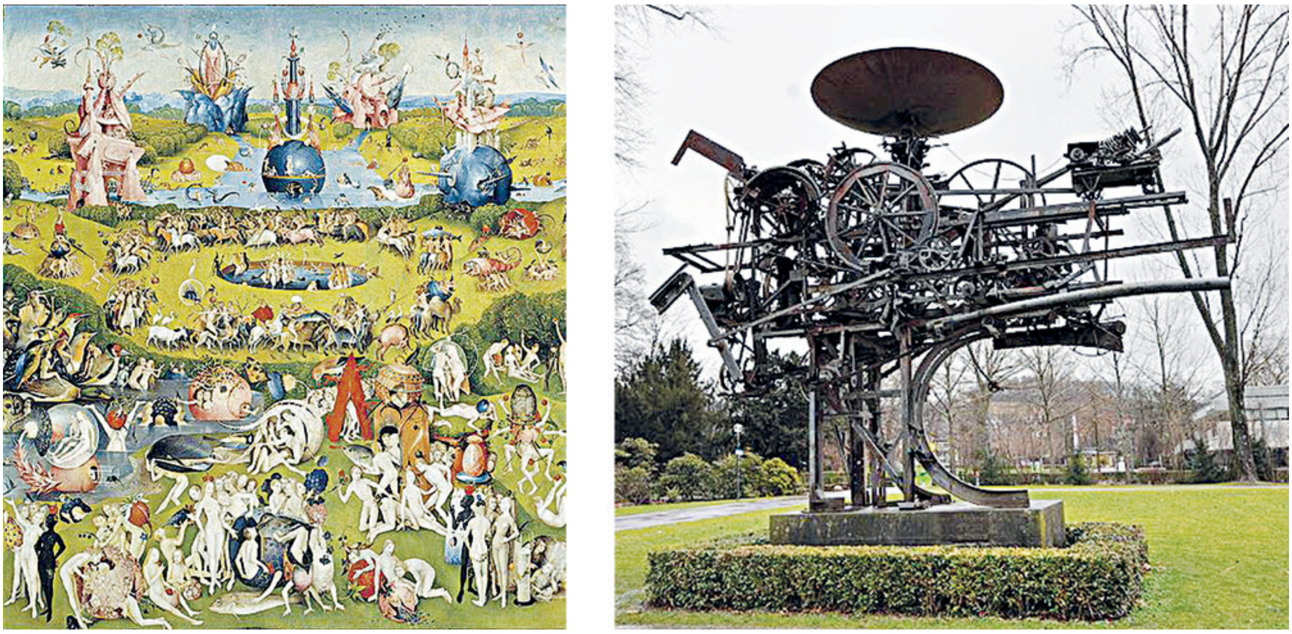

FIGURA 4 – Pannello centrale de "Il giardino delle delizie" di H. Bosch (sinistra), da Wikipedia; la scultura "Heureka" di J. Tinguely (destra), da Wikipedia, Micha L. Rieser.

cinematografico, il film "Sliding doors" fornisce un ottimo esempio di dinamica caotica; il film racconta la vita della protagonista in due condizioni diverse, ma estremamente vicine tra loro. Una mattina la protagonista prende la metropolitana per recarsi al lavoro; questa è la prima *traiettoria* del film. C'è però una seconda possibilità; si torna leggermente indietro nel tempo, al momento in cui la protagonsta scende le scale della metropolitana, ma questa volta, a causa di un piccolissimo imprevisto (deve evitare una bambina che gioca sulle scale), la protagonista perde un attimo prezioso, perde la metropolitana (in cui prosegue la prima versione della storia della protagonista) e quindi deve prendere la metropolitana successiva, iniziando così la seconda versione della storia della stessa protagonista. Una piccola perturbazione causa grandi conseguenze, portando le vite delle due donne (nella prima o seconda metropolitana) a percorrere destini divergenti.

Il caos non è solamente oggetto di studio di artisti, scrittori e registi, ma diventa anche uno strumento per analizzare le opere d'arte. Un valido esempio è fornito dallo studio esposto in [14], che riguarda un'analisi dei quadri del pittore statunitense Jackson Pollock (1912-1956). Rappresentante della corrente artistica denominata *action painting*, Pollock usa la tecnica del *dripping*, che consiste nello stendere la tela sul pavimento e nello sgocciolare il colore attraverso pennelli induriti o bastoncini. Pollock si allontana dall'arte figurativa e inconsapevolmente si avvicina alla teoria del caos, ben prima dell'introduzione dell'effetto butterfly.

Alcuni dipinti di Pollock, tra cui l'opera intitolata "Alchemy" (1947), sono analizzati in [14], calcolando la dimensione frattale dei dipinti con il metodo del box-counting (si veda la Sezione 4). I risultati mostrano che, con il passare del tempo, Pollock raffina la sua tecnica di sgocciolamento e corrispondentemente aumenta la dimensione frattale dei suoi dipinti.

Gli autori di questo studio calcolano che la dimensione frattale dei quadri di Pollock nel 1943 era vicina a 1, mentre è approssimativamente pari a 1.72 nel 1952. La differenza in termini di dimensione frattale è spiegabile in base all'evoluzione nel tempo della tecnica usata da Pollock: nel 1943 dipinge un singolo strato che occupa il 20% della tela, mentre nel 1952 utilizza multipli strati che occupano il 90% della tela. In base a questa osservazione, gli autori concludono che la misura della dimensione frattale può essere usata come strumento quantitativo per datare i dipinti di Pollock. Un'altra ingegnosa applicazione della teoria del caos.

FIGURA 5 – Terra e Luna a confronto (NASA).

6. – L'importanza della Luna

La Luna compie un'orbita attorno alla Terra ogni 27 giorni, 7 ore, 43 minuti e 12 secondi; la Luna compie una rotazione attorno a se stessa nello stesso tempo impiegato per effettuare un'orbita (Terra e Luna sono mostrate nella figura 5).

La condizione in cui coincidono i periodi di tempo impiegati per la rotazione e per l'orbita si chiama *risonanza spin-orbita* sincrona ([2], [3]); il termine "risonanza" ha una chiara attinenza all'armonia musicale che abbiamo già incontrato nelle precedenti sezioni. La Luna non è l'unico esempio di risonanza spin-orbita sincrona nel sistema solare, poiché nella stessa condizione si trovano, ad esempio, Phobos e Deimos (satelliti di Marte), Io, Europa, Ganimede, Callisto (satelliti di Giove), Encelado, Teti, Dione, Rea (attorno a Saturno), Miranda, Ariel, Umbriel, Titania, Oberon (satelliti di Urano), Proteus e Tritone (attorno a Nettuno), Caronte (satellite di Plutone). Questa lista parziale ci fa comprendere quanto sia comune la condizione di risonanza tra la rotazione e la traiettoria.

Il problema spin-orbita in Meccanica Celeste descrive un modello in cui si considera un satellite in rotazione attorno al proprio asse di spin e il cui centro di massa orbita su una traiettoria kepleriana attorno ad un corpo centrale. Considerando il satellite come un corpo rigido, e quindi trascurando la dissipazione causata dall'attrito mareale, assumendo che l'asse di rotazione sia perpendicolare all'orbita, il problema spin-orbita è descritto da un'equazione differenziale del secondo ordine della forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon V(x,t) = 0 \ , \tag{6.1}$$

dove x rappresenta l'angolo di rotazione, ε è un parametro che misura lo schiacciamento equatoriale del satellite (tipicamente piccolo per oggetti quasi sferici), e V è il potenziale che rappresenta l'interazione tra l'orbita e la rotazione. La dipendenza dal tempo del potenziale è dovuta al fatto che abbiamo assunto che l'orbita descritta dal centro di massa del satellite sia un'ellisse kepleriana, e pertanto le coordinate polari del centro di massa sono funzioni note del tempo.

L'assunzione che l'asse di rotazione sia perpendicolare al piano orbitale non è sempre soddisfatta con sufficiente approssimazione da pianeti e satelliti. Ad esempio, se invece di studiare la rotazione della Luna, ci concentriamo sulla rotazione della Terra, si osserva immediatamente che l'asse terrestre è inclinato rispetto alla perpendicolare al piano dell'orbita, chiamato *piano dell'eclittica,* di una quantità pari a $23^o 27'$. Questa inclinazione, chiamata *obliquità*, è, appunto, la causa delle stagioni che osserviamo sul nostro pianeta. Poiché le stagioni hanno influenza sul clima, l'obliquità dell'asse di rotazione determina l'abitabilità della Terra. In particolare, con temperature molto basse o molto alte si avrebbero solo forme di vita estremofile.

A valle di queste considerazioni, ci chiediamo cosa accadrebbe se la Terra non avesse un satellite, la Luna, così come accade per gli altri pianeti interni, Mercurio e Venere. Come mostrato in [8], senza la Luna l'asse di rotazione terrestre avrebbe un'obliquità non costante; l'asse di rotazione terrestre sarebbe dunque soggetto ad un movimento caotico e il suo comportamento nel tempo dipenderebbe fortemente dalle condizioni iniziali. Gli autori di [8] hanno dato evidenza numerica che senza la Luna, nell'arco di tempo di un milione di anni, si potrebbero avere variazioni dell'asse di rotazione terrestre comprese tra 18^o e 30^o, fino ad aumentare a 50^o in pochi milioni di anni.

Al contrario, se rimettiamo la Luna al suo posto, si osserva che l'asse di rotazione terrestre si mantiene ad un'obliquità costante di circa 23.3^o e si può avere al massimo una piccola variazione di circa 1.3^o.

In definitiva, la Luna agisce come regolatore climatico, perché grazie alla sua presenza l'inclinazione terrestre rimane stabile nel tempo. Questa condizione garantisce la stabilità climatica del pianeta, almeno dal punto di vista astronomico.

L'importanza della Luna a livello letterario è testimoniata da una quantità notevole di scritti. La lista sarebbe troppo lunga e pertanto ricordiamo qui soltanto alcuni autori italiani. Nel *Paradiso* Dante dibatte circa la natura delle macchie lunari: "Ma ditemi: che son li segni bui [le macchie lunari] / di questo corpo, che là giuso in terra / fan di Cain favoleggiare altrui?". Giacomo Leopardi ne "Il Canto notturno di un pastore errante dell'Asia" si chiede "Che fai tu, Luna, in ciel? Dimmi che fai, silenziosa luna?". E concludiamo con Italo Calvino; impossibile non menzionare il celebre racconto "La distanza della Luna" in "Le Cosmicomiche", che inizia dicendo "Una volta, secondo George H. Darwin, la Luna era molto vicina alla Terra. Furono le maree che a poco a poco la spinsero lontano: le maree che lei Luna provoca nelle acque terrestri e in cui la Terra perde lentamente energia". Oltre alla celebre raccolta di racconti, ricordiamo anche una lettera di Italo Calvino intitolata "Il rapporto con la Luna", pubblicata sul *Corriere della Sera* nel 1967 in risposta ad Anna Maria Ortese e successivamente ripubblicata in [1], in cui così scrive: "Chi ama la luna non si accontenta di contemplarla come un'immagine convenzionale, vuole entrare in un rapporto più stretto con lei, vuole vedere di più nella luna, vuole che la luna dica di più".

7. – Conclusioni

Le interazioni tra arte e scienza non si limitano ovviamente al campo della meccanica celeste e dei sistemi dinamici, come descritto nelle sezioni precedenti. In questo lavoro ci siamo fermati alla teoria della gravità di Newton, ma avremmo potuto proseguire, ad esempio, con la teoria della relatività di Einstein, in cui la percezione del mondo è determinata dalla posizione dell'osservatore. Manifestazioni artistiche della teoria della relatività sono rappresentate ad esempio dallo sviluppo del cubismo, in cui si mette in atto una profonda revisione dello spazio, e successivamente del futurismo, basato su una revisione del tempo ([6], [13], [15]).

Le formule principali di questo lavoro partono dalla descrizione dall'orbita della Luna, che assume la forma di un'ellisse (2.1), essendo soggetta all'attrazione gravitazionale della Terra (3.1). L'orbita ellittica è solo una prima approssimazione, perché quando si considerano le influenze gravitazionali degli altri oggetti celesti, la dinamica è descritta da un sistema quasi-integrabile (4.1), che può manifestare traiettorie caotiche (4.2). Quando si studia la rotazione del nostro pianeta (6.1), si scopre che la Luna riveste un ruolo determinante nel mantenere la stabilità climatica del nostro pianeta. In conclusione, poche formule bastano per comprendere alcuni ingredienti fondamentali per l'esistenza della vita sulla Terra.

Qualcuno ha raccontato storie analoghe attraverso un quadro, un romanzo o un'opera musicale; allo stesso modo la bellezza della conoscenza può essere espressa (ricordando la frase di D. Ruelle) attraverso una teoria scientifica.

D'altro canto Calvino, sempre nella lettera pubblicata sul *Corriere della Sera* nel 1967, conclude dando un esempio di sintesi tra il mondo scientifico e quello umanistico: "Il più grande scrittore della letteratura italiana di ogni secolo, Galileo, appena si mette a parlare della luna innalza la sua prosa ad un grado di precisione e di evidenza ed insieme di rarefazione lirica prodigiose". Ricordiamo anche la serie di acquerelli che Galileo dipinse per rappresentare le diverse fasi della Luna.

Galileo scienziato, Galileo scrittore, Galileo pittore. Poco conta che il racconto sia formulato attraverso un dipinto, la lingua italiana o piuttosto attraverso formule matematiche. Sono tutte espressioni di armonia.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] I. CALVINO, *Saggi 1945-1985*, a cura di M. Barenghi, Mondadori, Tomo primo, Milano (1995)

[2] A. CELLETTI, *Analysis of resonances in the spin-orbit problem in Celestial Mechanics: the synchronous resonance (Part I)*, J. Applied Math. Phys. (ZAMP), vol. 41, 174-204 (1990)

[3] A. CELLETTI, *Analysis of resonances in the spin-orbit problem in Celestial Mechanics: Higher order resonances and some numerical experiments (Part II)*, J. Applied Math. Phys. (ZAMP), vol. 41, 453-479 (1990)

[4] W. de Sitter, *Jupiter's Galilean satellites*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 91, 706-738 (1931)

[5] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Hoboken, NJ: John Wiley   Sons (2003)

[6] N.K. Hayles, *Chaos bound*, Cornell University Press (1990)

[7] J. Kepler, *Harmonices Mundi*, Linz (Austria), Johann Planck (1619), English translation *The Harmony of the World*, E. J. Aiton, A. M. Duncan, and J. V. Field, trans., American Philosophical Society (1997)

[8] J. Laskar, P. Robutel, *The chaotic obliquity of the planets*, Nature, vol. 361, 608-612 (1993)

[9] E.N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmos. Sci., vol. 20, 130-141 (1963)

[10] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature,* W. H. Freeman and Co. (1983)

[11] I. Newton, *Opticks*, S. Smith and B. Walford publ., London (1704)

[12] D. Ruelle, *Hasard et chaos*, Odile Jacob, Paris (1991)

[13] L. Shlain, *Art   Physics*, William Morrow and C. publ., New York (1991)

[14] R.P. Taylor, A.P. Micolich, D. Jonas, *Fractal analysis of Pollock's drip paintings*, Nature, vol. 399, n. 6735, 422 (1999)

[15] D. Wilcox, *What does Chaos Theory have to do with Art?*, Modern Drama (1996)

Alessandra Celletti

Alessandra Celletti è Professoressa ordinaria all'Università di Roma Tor Vergata, vice-Presidente e membro del Consiglio Direttivo dell'ANVUR. I suoi interessi scientifici riguardano la meccanica celeste e la teoria dei sistemi dinamici, con particolare riferimento alla teoria KAM, alle traiettorie interplanetarie e alla dinamica dei detriti spaziali. Nel 2023 ha ricevuto il "Dirk Brouwer Career Award". L'asteroide 2005 DJ1, n. 117539 porta il suo nome.