Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Francesco Bologna, Enrico Rogora

Matematica e insegnamento interdisciplinare

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2023), n.3, p. 271–291.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2023_1_8_3_271_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2023.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 8, N. 3, dicembre 2023, 271-291

Matematica e insegnamento interdisciplinare

FRANCESCO BOLOGNA
Sapienza Università di Roma
E-mail: francesco.bologna@uniroma1.it

ENRICO ROGORA
Sapienza Università di Roma
E-mail: rogora@mat.uniroma1.it

Sommario: *Si presentano cinque percorsi laboratoriali interdisciplinari pensati per coprire l'intera programmazione quinquennale di un Liceo Matematico [1] e si discute la metodologia utilizzata nella loro progettazione. In particolare si illustra l'uso di una particolare forma di dialogo scritto nel percorso laboratoriale dedicato all'argomentazione e alla dimostrazione.*

Abstract: *We discuss a proposal of five interdisciplinary laboratories for the project "Liceo Matematico" [1] and we discuss the methodology that we have used in their planning. In particular we illustrate the use of a particular form of written dialogue in the laboratorial path dedicated to argumentation and demonstration.*

1. – Introduzione.

Questo lavoro è un approfondimento della conferenza "Matematica e Insegnamento interdisciplinare", svolta nell'ambito dei *seminari di ricerca promossi dalla Giunta del Gruppo UMI sul Liceo Matematico* [21]. Il tema è quello dell'interdisciplinarità, uno dei pilastri del progetto del Liceo Matematico [6, 23, 22], insieme alla metodologia didattica laboratoriale [2] e alla sperimentazione di percorsi di insegnamento/apprendimento di contenuti matematici legati a sviluppi scientifici o tecnologici recenti.

Lo scopo principale dei percorsi che andiamo a descrivere è quello di restituire alla matematica la dimensione culturale e sociale che le compete, mettendo in rilievo il rapporto con le altre discipline senza sacrificare i propri obiettivi specifici di apprendimento.

Nel progettare e sperimentare questi laboratori ci siamo convinti che affrontare alcuni nodi cruciali dell'insegnamento/apprendimento della matematica da un punto di vista interdisciplinare può risultare molto efficace.

Negli anni abbiamo rivolto la nostra attenzione ai processi di apprendimento che riguardano: *Astrazione, Argomentazione, Osservazione, Visualizzazione, Linguaggio, Intuizione, Creatività, ecc*. Se aggiungiamo a queste parole l'aggettivo "matematica/o" riconosciamo alcuni dei temi più importanti della didattica della matematica [29]. Cambiando aggettivo, molti di questi temi li ritroviamo nella didattica della Filosofia, della Storia, delle Scienze, della Letteratura, delle Lingue, ecc. a testimonianza dell'opportunità di coltivare un approccio interdisciplinare.

Con gruppi di insegnanti di diverse materie abbiamo scelto di progettare cinque percorsi laboratoriali che ruotano intorno a questi temi e che complessivamente costituiscono una programmazione organica per le attività di un *liceo matematico* da svolgersi nell'arco di cinque anni. La progetta-

Accettato: il 10 gennaio 2024.

zione mira a promuovere il valore specifico di una trattazione interdisciplinare degli argomenti scelti nei processi di apprendimento della matematica e il valore didattico di un lavoro in copresenza degli insegnanti con le classi. Sinteticamente, i laboratori sono:

Titolo	Tema principale	Classe	Altre discipline
Educare lo sguardo	Pensiero creativo	Prima	Arte e ...
Argomentare e dimostrare	Pensiero razionale	Seconda	Filosofia e ...
Governare l'incertezza	Pensiero probabilistico	Terza	Italiano e ...
Sollevare lo sguardo	Pensiero scientifico	Quarta	Fisica e ...
Analizzare i cambiamenti	Pensiero critico	Quinta	Educazione civica e ...

In ognuno di questi laboratori si affronta inizialmente un aspetto trasversale e cruciale nei processi di apprendimento (p.e. *argomentare*) in un contesto non disciplinare per poi trasportarlo nei contesti disciplinari specifici (p.e. *dimostrare*, in matematica o *costruire un'argomentazione*, in filosofia) senza perdere di vista i riferimenti alle radici comuni. Siamo infatti convinti che stimolare un processo di apprendimento evidenziando queste radici possa promuovere una visione più olistica e meno rigida dell'insegnamento, mantenendo nel contempo la messa a fuoco degli obiettivi disciplinari specifici.

Lo scopo di questi laboratori non è di mescolare le discipline per renderle "digeribili" ma di collegare le discipline per comprenderle meglio. A tal fine, la progettazione del laboratorio viene realizzata insieme a gruppi di insegnanti di diverse materie. Ogni attività viene prima sperimentata e discussa dagli insegnanti e poi proposta agli studenti con gli insegnanti in copresenza.

Per quanto riguarda gli strumenti didattici impiegati nella progettazione e nella sperimentazione, si è fatto ampio uso di una metodologia originale, che abbiamo battezzato *costruzione di dialoghi scritti condivisi* a cui è dedicata la sezione 5. I dialoghi sono stati utilizzati sia con gli insegnanti, per stimolare la collaborazione, sia con gli studenti, per collegare gli stimoli didattici proposti nelle attività e inserirli nei loro percorsi di apprendimento. Questa forma di dialogo si è rivelata particolarmente efficace come strumento di *valutazione formativa*.

Alcune caratteristiche peculiari di questi *laboratori globalmente interdisciplinari* (GIL), cfr. [23] sono:

- il ruolo degli studenti, chiamati a valorizzare le proprie abilità specifiche e condividere le proprie difficoltà e i propri errori nel processo di apprendimento personale e dell'intera classe, anche assumendo il ruolo di "guida" nei confronti degli insegnanti non esperti (per esempio gli insegnanti di lettere o di inglese in una attività di carattere prevalentemente matematico, cfr. Figura 1);

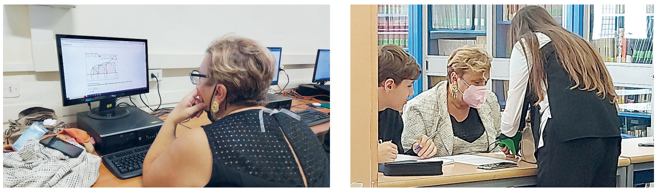


FIGURA 1 – Nell'immagine a sinistra una docente di inglese impegnata nella risoluzione di un'attività di costruzione geometrica. Nell'immagine a destra la successiva discussione con il docente di matematica e uno studente.

- il ruolo degli insegnanti, chiamati a partecipare al processo di apprendimento anche assumendo il ruolo di "studenti esperti". Durante le attività in copresenza dei GIL, la distinzione tra insegnante e studente diventa meno netta. Gli insegnanti condividono osservazioni, dubbi e domande che contribuiscono a chiarire il percorso, per esempio articolando difficoltà in maniera più consapevole rispetto a quanto riescono a fare inizialmente gli studenti e contribuendo in maniera significativa alla costruzione di un sapere condiviso dalla classe;
- il ruolo della particolare relazione tra studenti e insegnanti che si istaura nello svolgimento di un GIL e che abbiamo chiamato *relazione interdisciplinare completa* su cui torneremo nella sezione 2
- il ruolo dello strumento del *dialogo scritto condiviso* nella costruzione dei significati, nell'apprendimento delle tecniche, disciplinari e nel collegamento tra i contenuti, su cui ritorneremo nella sezione 5.

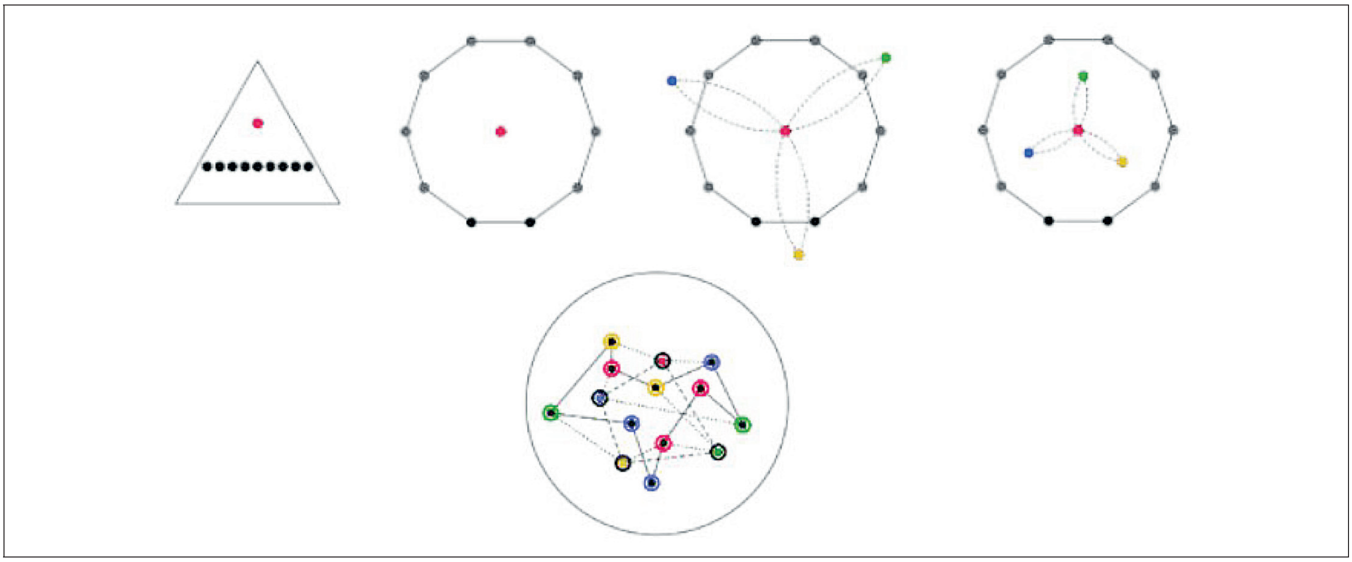


FIGURA 2 – Relazioni tra i diversi attori del processo di apprendimento/insegnamento in diversi contesti didattici.

2. – Relazioni interdisciplinari complete

Caratteristica specifica di un *laboratorio globalmente interdisciplinare* è l'importanza che assegniamo ad una particolare relazione tra insegnanti e docenti, che abbiamo chiamato *globalmente interdisciplinare*.

Nella Figura 2 abbiamo cercato di sintetizzare le differenze tra un *insegnamento tradizionale* (prima immagine a sinistra) e diversi tipi di *insegnamento laboratoriale.*:

- *disciplinare*, caratterizzato da un insegnante e la sua classe (seconda immagine da sinistra);
- *multidisciplinare*, caratterizzato da un coordinamento tra gli insegnanti di materie diverse che intervengono uno per uno in classe (terza immagine da sinistra);
- *interdisciplinare*, caratterizzato da un coordinamento nella progettazione e dalla copresenza degli insegnanti in classe (quarta immagine da sinistra);
- *globalmente interdisciplinare*, caratterizzato da una progettazione in copresenza di più insegnanti, da una sperimentazione iniziale del percorso con gli insegnanti e dalla copresenza degli insegnanti in classe durante la fase del lavoro in classe. Nell'immagine della seconda riga, che rappresenta un laboratorio globalmente interdisciplinare, abbiamo cercato di illustrare la caratteristica di uno scambio parziale dei ruoli, sia in fase di progettazione e sperimentazione sia nel lavoro in classe, usando per ogni attore una rappresentazione con due colori. Il colore nero rappresenta il ruolo di studente, un colore diverso quello di insegnante di una particolare disciplina. In ogni cerchio, il colore interno rappresenta il ruolo prevalente, quello esterno il ruolo occasionale.

Le immagini non implicano un giudizio di merito sulle diverse modalità ma vogliono solo aiutare a chiarire le differenze.

Non abbiamo riservato un'immagine all'insegnamento transdisciplinare perché ci interessa mantenere la centralità dell'apprendimento/insegnamento delle discipline. L'interdisciplinarità, nei nostri laboratori, non è un fine ma un mezzo per migliorare l'insegnamento disciplinare, in particolare quello della matematica.

Abbiamo qualificato *globalmente interdisciplinare* un laboratorio in cui l'interazione tra gli attori (insegnanti e studenti) del processo educativo (insegnamento e apprendimento) sia *completa*, nel senso che gli studenti e gli insegnanti scambiano i ruoli in maniera fluida collaborando al processo di apprendimento/insegnamento. Secondo il pedagogista brasiliano Paulo Freire

> *Fin dall'inizio del processo di insegnamento, è necessario che diventi più e più evidente un fatto: nonostante la differenza tra insegnante e studente, l'insegnante apprende e continua ad apprendere*

nell'atto stesso di insegnare, mentre lo studente apprende e, nello stesso momento, diviene insegnante (...) Non esiste insegnamento senza apprendimento. [13]

La progettazione delle attività dei laboratori mira a favorire la dialettica tra insegnamento e apprendimento cui fa riferimento Freire, creando un ambiente e delle attività che riteniamo particolarmente adatto a questo scopo, per la copresenza di insegnanti di diverse materie, chiamati quindi a ricoprire, nel senso precisato nella sezione 1, p. 3, ruoli diversi nel corso delle attività.

Per chiarire ulteriormente la differenza tra un laboratorio interdisciplinare e un laboratorio globalmente interdisciplinare proponiamo un'altra coppia di immagini che sintetizza la differenza degli obiettivi. La prima immagine rappresenta un *intreccio interdisciplinare*, obiettivo di un laboratorio interdisciplinare mentre la seconda rappresenta un *percorso interdisciplinare*, obiettivo di un laboratorio globalmente interdisciplinare.

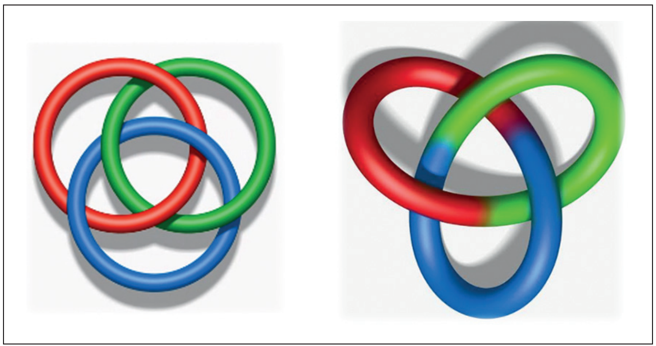


FIGURA 3 – La figura a destra è il logo che abbiamo scelto per i laboratori globalmente interdisciplinari.

3. – Cinque laboratori "globalmente" interdisciplinari.

Prima di entrare nei dettagli del laboratorio "Argomentare e dimostrare" riassumiamo in maniera sintetica gli aspetti comuni e le principali caratteristiche specifiche dei laboratori proposti.

Ogni laboratorio prevede incontri tra insegnanti e docenti universitari e incontri tra insegnanti e studenti (alcuni con la partecipazione anche dei docenti universitari). I primi sono incontri in cui, dopo aver sperimentato tra insegnanti le attività dell'anno precedente, si discutono gli scopi, le motivazioni didattiche e le modifiche da apportare, sia prima della sperimentazione in classe, sia dopo, sulla base dei risultati osservati. I secondi sono incontri in cui tutti gli insegnanti lavorano insieme ai ragazzi sulle stesse attività sperimentate negli incontri riservati agli insegnanti. In media ogni laboratorio prevede una decina di incontri tra insegnanti e docenti universitari e almeno altrettanti tra insegnanti in copresenza e studenti.

Per partecipare a un laboratorio chiediamo che gli insegnanti siano disponibili a sperimentare il laboratorio in almeno una delle proprie classi e che per ogni classe partecipi, oltre all'insegnante di matematica, almeno un insegnante di altra materia. Per i laboratori "Educare lo sguardo" e "Governare l'incertezza" il gruppo di insegnanti comprendeva anche insegnanti della scuola secondaria di primo grado.

Ogni laboratorio si costruisce intorno a un percorso già sperimentato negli anni precedenti ma ogni *unità di insegnamento* (gruppo di insegnanti associato a una classe, cfr. [23]) è stimolata ad adattarlo prima di proporlo alla propria classe. L'unico vincolo è che i materiali prodotti siano accessibili a tutti i partecipanti e che ci sia disponibilità a discutere e a confrontare le proprie scelte con quelle adottate nelle altre unità di insegnamento, anche partecipando alla costruzione dei *dialoghi scritti condivisi* (cfr. Sezione 6).

Ogni laboratorio è stato concepito per un anno preciso del percorso di studi ma si può adattare ad altri anni o anche spalmare su più anni.

FIGURA 4 – Nella figura è rappresentato schematicamente il ciclo di vita annuale di un laboratorio.

Sinteticamente, i cinque laboratori sono i seguenti.

Educare lo sguardo	
Ambiti prevalenti	Matematica e arte
Tema interdisciplinare	Stimolare il pensiero creativo e la curiosità intellettuale (cfr. [7, 28])
Classe	Prima
Principali attività matematiche	Esplorare configurazioni geometriche costruibili con riga e compasso e analizzare le loro proprietà Utilizzare il teorema di Desargues per costruire disegni in prospettiva Definire e congetturare
Principali attività non matematiche	Interpretare un'opera d'arte Partecipare attivamente alla visita di una galleria d'arte
Argomentare e dimostrare	
Ambiti prevalenti	Matematica e filosofia
Tema interdisciplinare	Stimolare il pensiero argomentativo
Classe	Seconda
Principali attività matematiche	Sperimentare la logica della scoperta matematica Analizzare la struttura logica degli Elementi Studiare criticamente le proposizioni del primo libro Confrontare diverse dimostrazioni e diverse generalizzazioni del teorema di Pitagora
Principali attività non matematiche	Sperimentare attività di dibattito argomentativo Costruire dialoghi Progettare e realizzare oggetti multimediali di contenuto scientifico
Governare l'incertezza	
Ambiti prevalenti	Matematica e italiano
Tema interdisciplinare	Riflettere sul significato delle parole usate per esprimere l'incertezza e costruire le basi del pensiero probabilistico
Classe	Terza
Principali attività matematiche	Analizzare e confrontare le proprietà di sequenze binarie prodotte da diverse tipologie di fenomeni aleatori Analizzare alcuni classici "paradossi probabilistici". Utilizzare teorema di Bayes per modificare in maniera razionale le proprie valutazioni su un fenomeno in presenza di nuove informazioni
Principali attività non matematiche	Interpretare criticamente le informazioni quantitative riportate nei principali organi di informazione Partecipare al laboratorio teatrale "le parole dell'incertezza"
Sollevare lo sguardo	
Ambiti prevalenti	Matematica e scienza
Tema interdisciplinare	Conoscere e riconoscere il metodo scientifico
Classe	Quarta
Principali attività matematiche	Studiare le diverse "spiegazioni" del moto del sole, della luna e dei pianeti Implementare con un software di Geometria dinamica i modelli cosmologici di Eudosso, Tolomeo, Copernico e Keplero Studiare l'evoluzione storica dei concetti matematici necessari per formulare le leggi della fisica inerziale di Galileo e la teoria gravitazionale di Newton
Principali attività non matematiche	Organizzare un'escursione notturna per osservare le stelle Percepire la commozione della scoperta scientifica attraverso la traduzione di brani originali di Tycho Brahe, Copernico, Keplero e Galileo
Analizzare i cambiamneti	
Ambiti prevalenti	Matematica ed educazione civica
Tema interdisciplinare	Riflettere sul significato e sul valore della previsione scientifica
Classe	Quinta
Principali attività matematiche	Esplorare l'efficacia e i limiti dei modelli matematici del meteo e del clima attraverso l'impiego del calcolatore
Principali attività non matematiche	Organizzare e partecipare a una conferenze stampa Partecipare a un laboratorio di scrittura creativa

Alcuni dei collegamenti interdisciplinari proposti avrebbero bisogno di maggiori dettagli per non apparire forzati, ad esempio l'attività di scrittura creativa proposta nel quinto laboratorio. Questa attività mira a fornire consapevolezza e strumenti idonei a raccontare le nuove sfide mescolando linguaggio scientifico e linguaggio letterario. Scrive in proposito il massimo scrittore indiano contemporaneo Amitav Ghosh in [15]

> *Sono arrivato a convincermi che le sfide che il cambiamento climatico pone agli scrittori contemporanei, per quanto specifiche sotto certi aspetti, siano anche dovute a qualcosa di più antico e profondo; e derivino in ultima analisi dalla griglia di forme e convenzioni letterarie che hanno modellato l'immaginario narrativo.*

4. – Il laboratorio "Argomentare e dimostrare"

L'obiettivo del laboratorio "Argomentare e dimostrare", sperimentato a partire dal 2013 in più di 30 classi di Istituti di secondo grado, è quello di introdurre la dimostrazione matematica nel contesto interdisciplinare dell'argomentazione, facendo ripercorrere alle classi e ai loro insegnanti lo stesso percorso storico che ha portato all'affermarsi delle esigenze di argomentare nella società greca del VI e V secolo a.C, alla nascita della filosofia e della matematica argomentativa greca e infine alla matematica euclidea.

Il percorso è incentrato sul processo di trasformazione della matematica, dalle sue origini rituali e applicative alla sistemazione assiomatica della geometria euclidea e presta particolare attenzione a mettere in evidenza il ruolo cruciale giocato dalla matematica ellenica in questa evoluzione (VI e V sec. a.C.) per i suoi stretti collegamenti con i processi che hanno portato alla nascita e allo sviluppo della filosofia e delle scienze in Grecia. Il laboratorio parte dal presupposto che ripercorre consapevolmente le principali tappe di questa evoluzione, oltre a un importantissimo valore culturale, ha anche un valore didattico specifico. Trascurare l'importanza di alcuni di questi passaggi, come è pratica abituale nella scuola, rende più difficile il processo di apprendimento della matematica, non riconoscendo adeguatamente la gravità di alcuni ostacoli epistemologici nell'apprendimento, che il processo storico mette chiaramente in luce. Ci riferiamo, per esempio, al valore formativo di attività quali le costruzioni geometriche (matematica vedica), la codifica di algoritmi di risoluzione numerica di problemi (matematica babilonese), la specificità delle definizioni matematiche, l'importanza del confronto dialettico nel fare matematica (matematica ellenica), ecc. ecc.

Questo approccio interdisciplinare vuole facilitare la comprensione del complesso processo storico attraverso cui si sono formati alcuni dei concetti principali della matematica, in particolare quelli di assioma, definizione, teorema e dimostrazione, apprezzandone l'importanza e il significato non solo per la matematica ma anche per la filosofia, le scienze e la tecnologia, mettendolo a confronto con lo sviluppo parallelo dei concetti legati all'argomentazione filosofica e all'arte della retorica.

Viene dedicata particolare attenzione al teorema di Pitagora, guardando alle sue numerose dimostrazioni come a un paradigma illustrativo dell'evoluzione dell'argomentazione matematica.

Come gli altri GIL, questo laboratorio, prima di essere portato in classe, viene sperimentato con gli insegnanti. La possibilità di lavorare con insegnanti di diverse materie permette di osservare il percorso da diverse prospettive, che si completano e si collegano. Per esempio, in una attività di spiccato carattere matematico, gli insegnanti di materie diverse dalla matematica non hanno, analogamente agli studenti, conoscenze matematiche specifiche ma hanno, a differenza degli studenti, grande esperienza didattica e uno sguardo culturale più ampio. Sono quindi in grado di articolare le difficoltà di chi si accosta al percorso con una consapevolezza e una capacità di collegamento ad altre attività che si è rivelata spesso preziosa nella progettazione e nella contestualizzazione.

Per esempio, riportiamo un frammento della discussione avuta durante un incontro con gli insegnanti nel quale si è riflettuto, subito dopo averla provata, su una della attività relative alla definizione. In sintesi, l'attività proponeva di contare in una opportuna classe di oggetti, quelli che godono di una particolare proprietà, non data a priori, ma definita dalla classe al termine di un processo di riflessione su un insieme di esempi proposti dagli insegnanti ([1]). Un insegnante di italiano osserva:

> *"L'argomento di oggi è interessantissimo e più che mai interdisciplinare. Si può applicare, non solo in maniera estesa, ma anche a più livelli, quindi non solo in orizzontale ma anche in verticale. Allora è applicabile davvero a più discipline e non mi riferisco, ovviamente, solo agli insegnanti di italiano. Pensate alla grammatica, alla definizione grammaticale. Nella definizione grammaticale lì c'è davvero molto punto di contatto con la matematica, moltissimo quasi totale direi* ([2])*, ma il problema della definizione si pone anche in letteratura quando bisogna definire un'opera, quando bisogna definire il genere di appartenenza di un'opera, quando bisogna definire un genere letterario. Mi capita spessissimo, quando chiedo una definizione di dire "guarda la definizione è come la stessa la definizione che dai in matematica" ... uguale, ci devi mettere la stessa attenzione che dai alla definizione matematica."*

Nel frammento, l'insegnante, evidenzia il collegamento tra le riflessioni relative all'attività proposta con quelle che riguardano alcune attività da lei svolte abitualmente e le difficoltà degli studenti a riguardo. Questo tipo di interazione ci ha fornito diversi suggerimenti su come modificare le attività, sia riconoscendo che alcune difficoltà hanno carattere non solo matematico, sia sfruttando quanto era già stato fatto in altri contesti. Nel seguito della discussione da cui è tratto il frammento abbiamo approfondito non solo i collegamenti ma anche le differenze tra le problematiche didattiche relative alla definizione nei diversi contesti disciplinari.

Il laboratorio "Argomentare e dimostrare" si articola in dieci sezioni ognuna delle quali corrisponde a uno o due incontri con gli studenti, di due ore ciascuno.

Primo	Carattere rituale della matematica vedica
Secondo	Carattere applicativo della matematica babilonese
Terzo	Le forme del confronto democratico
Quarto	Carattere argomentativo della matematica greca
Quinto	Riflessioni intorno alle molte dimostrazioni del teorema di Pitagora
Sesto	Presentazione digitale di una dimostrazione del teorema di Pitagora
Settimo	Agorà matematica e confronto con Euclide
Ottavo	Organizzazione del primo libro degli Elementi di Euclide
Nono	Perché dimostrare?
Decimo	Un nuova dimostrazione per la proposizione 47 del primo libro degli Elementi

Riassumiamo brevemente i contenuti di ciascun incontro. Le attività del percorso si possono svolgere liberamente collegandosi alla classe GeoGebra https://www.geogebra.org/classroom/v7nfyzqh

4.1 – *Carattere rituale della matematica vedica*

Nel primo incontro si affronta il tema dell'origine rituale della matematica: la matematica come linguaggio per esprimere la perfezione e in particolare la costruzione geometrica esatta come simbolo di perfezione e di tramite tra uomo e dio. Attraverso l'uso di un *software* di geometria dinamica, si sviluppano attività di ricostruzione di figure geometriche e di progettazione di nuove figure di carattere simbolico.

([1]) Cfr. le attività 4a, 4b e 4c della classe GeoGebra https://www.geogebra.org/classroom/v7nfyzqh.

([2]) Nella successiva discussione si sono puntualizzate le differenze e i punti di contatto tra le definizioni matematiche e quelle grammaticali e l'importanza di farle cogliere agli studenti.

FIGURA 5 – A sinistra un altare indù. Gli elementi geometrici sono costruiti rispettando precisi rapporti matematici. A destra, uno degli esercizi proposti. Negli esercizi precedenti si chiedeva, tra l'altro, di ricostruire la figura con la riga e il compasso.

4.2 – *Carattere applicativo della matematica babilonese.*

Nel secondo incontro si affronta l'origine pratica della matematica: evoluzione della matematica come lento accumularsi di saperi che ingloba nuovi elementi in base alla utilità dei loro contenuti. Si propongono attività di scoperta di algoritmi per la soluzione di problemi numerici attraverso la ricerca di regolarità nell'organizzazione tabellare di dati usando il foglio di calcolo del *software* di geometria dinamica *GeoGebra*.

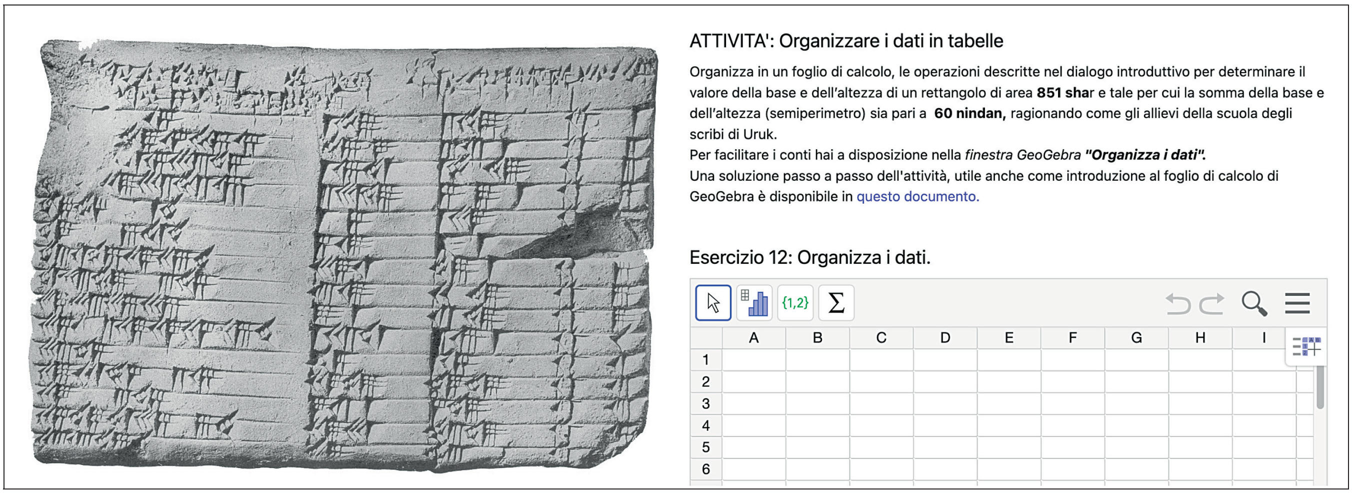


FIGURA 6 – La matematica Babilonese presta particolare attenzione agli algoritmi di calcolo e all'organizzazione di dati e di calcoli in tabelle numeriche. Gli studenti sono condotti alla scoperta delle formule di risoluzione delle equazioni di secondo grado e dell'algoritmo di bisezione per la risoluzione approssimata di un'equazione algebrica attraverso lo studio delle proprietà strutturali di queste tabelle.

4.3 – *Le forme del confronto democratico*

Nel terzo incontro si affronta l'emergere del dibattito argomentativo come metodo di confronto democratico nella società greca. Dopo una prima fase di approfondimento, gli allievi si cimentano in attività di dibattito argomentativo su tematiche relative ai rapporti tra scienza e società.

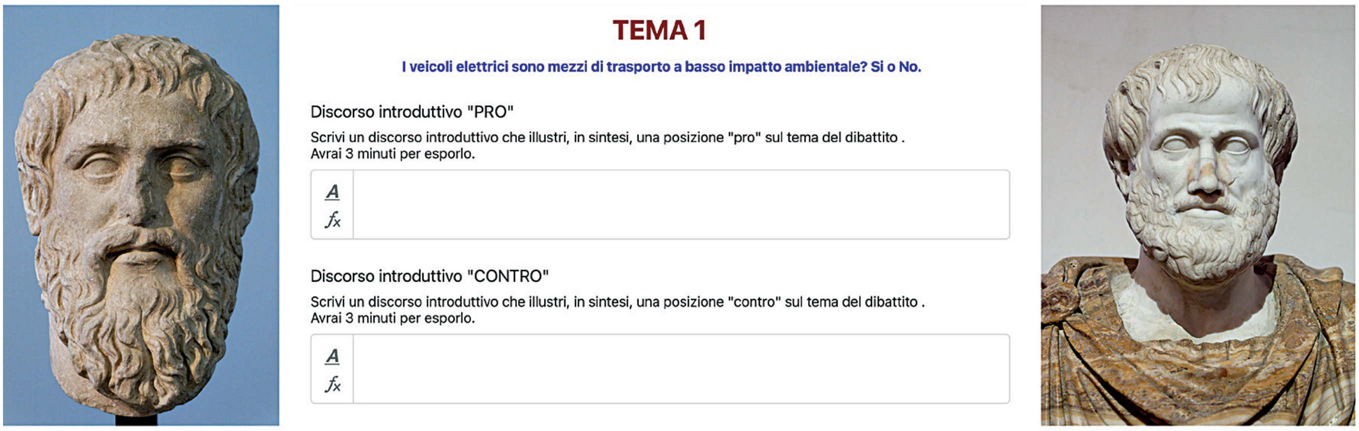


FIGURA 7 – La dialettica di Platone come metodo della ricerca filosofica e la retorica di Aristotele come scienza della persuasione vengono illustrate con riferimento a un'attività di dibattito argomentativo.

4.4 – *Carattere argomentativo della matematica greca*

Nel quarto incontro si affronta il problema della definizione.

A partire dall'esigenza di precisare le definizioni dei termini impiegati nell'uso quotidiano della lingua per comunicare, si confrontano le definizioni sul vocabolario con quelle della matematica e della filosofia mettendo in evidenza lo scopo e la natura diversa della definizione in modo da facilitare la comprensione del ruolo specifico della definizione matematica e aiutare lo studente a superare le difficoltà di apprendimento connesse [26].

L'attività ruota intorno al problema della definizione di figura con riferimento al Menone e ad una attività sulle figure del Tangram ispirata a Lakatos [19].

La celebre lezione di Socrate sulla duplicazione del quadrato, riportata nel Menone è stata oggetto di numerose riflessioni e rivisitazioni in chiave didattica e di riflessione sulla matematica.

Si presta infatti a mettere in evidenza collegamenti profondi tra la matematica e la filosofia e a tracciare l'origine di riflessioni sul concetto di numero, sviluppata anche in altri dialoghi platonici, e sui rapporti tra aritmetica e geometria [27, 11, 12].

Nel nostro percorso il Menone viene utilizzato con un altro scopo. Innanzitutto, come spunto per riflettere su varie tipologie di definizione: del vocabolario, in filosofia, in matematica e confron-

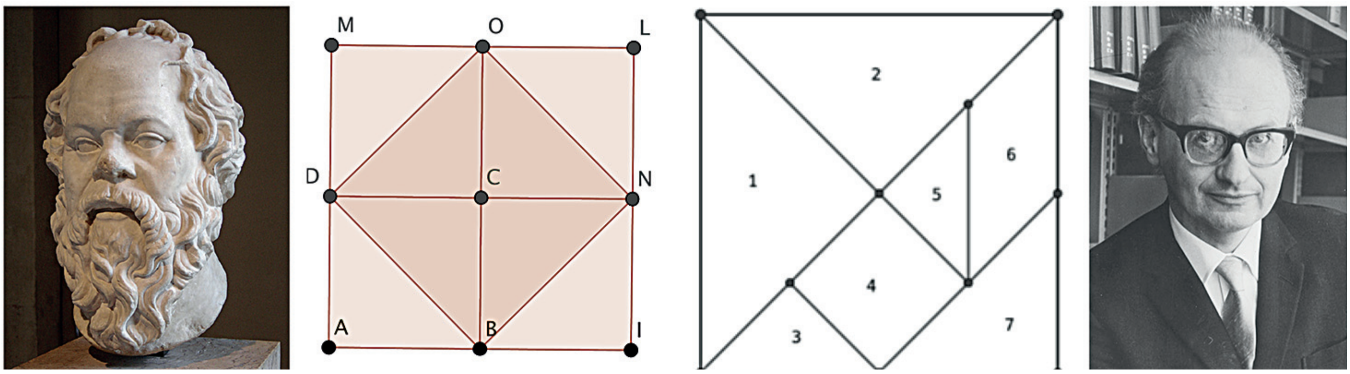


FIGURA 8 – Socrate (a sinistra) e l'approccio maieutico al problema di duplicazione del quadrato trattato nel Menone. Imre Lakatos (a destra) e un'attività col Tangram sul carattere della definizione matematica.

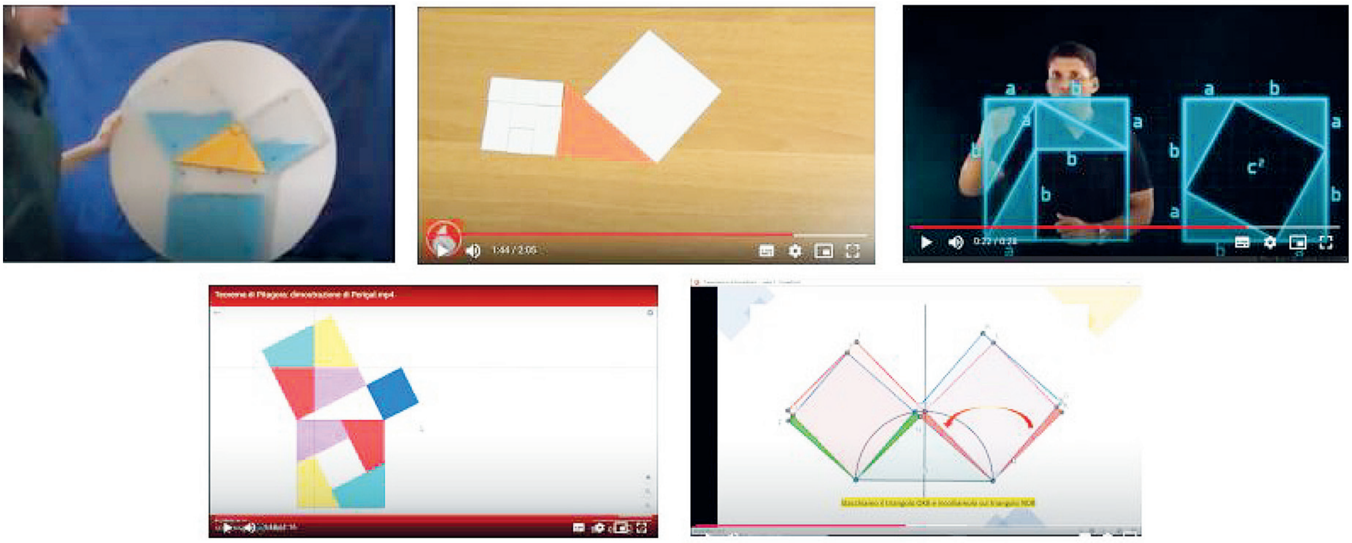


FIGURA 9 – Un fotogramma tratto da ognuno dei video mostrati agli studenti. Dall'alto in basso e da sinistra a destra il primo video (*verifica idraulica*) mostra una verifica sperimentale del teorema. Il secondo (*verifica geometrica*), una verifica geometrica di un caso particolare. Il terzo (*argomento di Laisnez* ([4])), un argomento corretto ma compresso. Il quarto (*argomento di Perigal* ([5])), un argomento corretto ma non adeguatamente giustificato. Il quinto (*argomento fallace*), una dimostrazione con un errore.

tarle con quelle proposte dai ragazzi nella parte dell'attività relativa al conteggio delle figure del Tangram. Inoltre, viene usato per fornire un esempio di dialogo scientifico ([3]) cui ispirarsi per scrivere i dialoghi richiesti agli studenti e ai docenti durante il percorso. Infine ci è servito in quanto presenta una semplice dimostrazione del teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli isosceli, a partire dalla quale abbiamo costruito il video con la quinta dimostrazione proposta ai ragazzi, che discuteremo nel prossimo paragrafo. Abbiamo volutamente tralasciato di approfondire i collegamenti con i numeri irrazionali, che l'insegnante di matematica potrà presentare ed approfondire nel corso del percorso curricolare, in quanto lo scopo del percorso è quello di comprendere la struttura del primo libro degli Elementi di Euclide e di produrre dimostrazioni che si inseriscano perfettamente in quella struttura. L'aspetto numerico è, per questo, irrilevante e potenzialmente in grado di distogliere gli insegnanti e gli studenti dal focus dell'attività.

([3]) Insieme al famoso dialogo di Lakatos [19] sulla dimostrazione del teorema di Eulero sui poliedri e ad altri dialoghi appositamente preparati.

4.5 – *Riflessioni intorno alle molte dimostrazioni del teorema di Pitagora*

Nel quinto incontro si focalizza l'attenzione su tre domande:

- Cos'è una dimostrazione?
- Come si dimostra?
- Perché si dimostra?

Non si risponde direttamente a queste domande ma si suggeriscono attività per chiarire il significato delle domande e acquisire strumenti per poter rispondere. Si comincia presentando cinque filmati con cinque "dimostrazioni" del teorema di Pitagora.

([4]) L'attribuzione a Leisnez, che si trova per esempio in https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/, è certamente errata. Si tratta di un argomento ben noto nel XIX secolo (cfr. [9], vol. 1, p. 354) e più volte proposto come plausibile dimostrazione pitagorica o addirittura pre-pitagorica. Ci riferiamo all'argomento di Leisnez per semplicità e perché quando Leisnez ha proposto questa dimostrazione era uno studente di Liceo, il che rende simpatica questa attribuzione nel lavoro in classe.

([5]) Henry Perigal (1801-1898) è un agente di borsa inglese e matematico dilettante famoso per la sua dimostrazione del teorema di Pitagora basata sull'argomento di dissezione riassunto nella figura.

Ogni filmato è stato scelto per mettere in evidenza diverse caratteristiche delle argomentazioni proposte per aiutare la classe a capire cosa manca in ognuna di esse dal punto di vista logico e argomentativo. Sinteticamente. le ragioni per la scelta di ognuno di questi filmati sono le seguenti.

- *Verifica idraulica.* Non si tratta di un argomentazione matematica ma semplicemente di una verifica sperimentale di un caso particolare. La verifica, inoltre, si basa su numerose assunzioni implicite che vengono accettate senza soffermarsi. Per esempio, che lo spessore dei recipienti sia uguale.
- *Verifica geometrica.* Anche in questo caso l'argomento si riferisce a un caso particolare cioè al triangolo rettangolo di lati di lunghezza proporzionale ai numeri 3, 4 e 5. L'argomento geometrico proposto, cioè la suddivisione dei quadrati in quadrati più piccoli non ha validità generale (cfr. la discussione p. 30).
- *Argomento di Leisnez.* L'argomento è corretto ma viene presentato senza spiegarne la logica. L'argomento si basa sulla possibilità di mettere quattro copie congruenti del triangolo rettangolo di partenza in due modi diversi dentro un quadrato di lato pari alla somma dei due cateti. Il complemento è in un caso uguale al quadrato sull'ipotenusa e nell'altro uguale alla somma dei quadrati sui cateti.
- *Argomento di Perigal.* L'argomento è corretto ma il video non giustifica i passaggi delle argomentazioni lasciando all'evidenza delle immagini il compito di convincere della loro correttezza. L'argomento mostra come suddividere il quadrato sul cateto maggiore in quattro quadrilateri congruenti tracciando la perpendicolare e la parallela all'ipotenusa per il centro del quadrato e come traslare questi quattro quadrilateri dentro il quadrato sull'ipotenusa in maniera che il pezzo mancante sia congruente al quadrato sul cateto minore.
- *Argomento fallace.* Questo argomento modifica una dimostrazione da noi elaborata a conclusione del lavoro fatto sul Menone. Questa dimostrazione si presta a introdurre un argomento fallace che non è immediato individuare. Inoltre ha un carattere più formale delle precedenti e quindi è stata scelta perché è più vicina all'idea di dimostrazione "incomprensibile" che hanno gli studenti. Infatti, come ci aspettavamo, non pochi l'hanno indicata come quella più rigorosa e sono rimasti sorpresi dal fatto che fosse la più sbagliata.

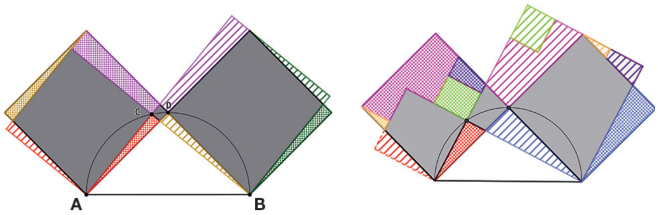


FIGURA 10 – A sinistra, la figura per la dimostrazione errata. A destra la figura per la dimostrazione corretta.

Con riferimento alla Figura 10, sia nell'immagine a sinistra, sia in quella a destra, completando i quadrilateri grigi con le figure retinate otteniamo la somma dei quadrati sui cateti di un triangolo rettangolo isoscele; completando i quadrilateri grigi con le figure tratteggiate, otteniamo la somma dei quadrati sui cateti del triangolo rettangolo assegnato. Se ogni figura retinata è congruente alla figura tratteggiata dello stesso colore, il teorema di Pitagora segue dal caso speciale trattato nel Menone, relativo al triangolo rettangolo isoscele. Nella immagine a sinistra queste congruenze *sembrano vere*, ma non lo sono. Nell'immagine a destra le congruenze si possono invece dimostrare. Questa non è ovviamente una strada consigliabile per dimostrare il teorema di Pitagora ma, nel nostro percorso, ha offerto un utile spunto per diverse discussioni. Innanzitutto, è un esempio di come fidarsi di quello che si vede può essere ingannevole. Poi suggerisce di non affidarsi al formalismo nelle dimostrazioni ma di controllarlo sempre con l'intuizione e con la ricerca di dimostrazioni più semplici e più facilmente verificabili. Inoltre, mette in evidenza come sia importante imparare ad analizzare gli errori, che spesso possono suggerire modifiche per ottenere la soluzione di un problema o la dimostrazione di un teorema. Ciò stimola pazienza, fiducia e perseveranza, caratteristiche indispensabili per fare matematica.

L'analisi di questi filmati ha riguardato anche una discussione sui pregi e sui limiti comunicativi. Questi aspetti sono a nostro avviso di grande importanza nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica e devono essere trattati prestando particolare attenzione a mettere in luce le insidie di una comunicazione superficiale che non stimola la riflessione. È risultato particolarmente utile discutere gli aspetti comunicativi dei filmati proposti con la copresenza degli insegnanti di matematica, filosofia, lettere, storia e inglese.

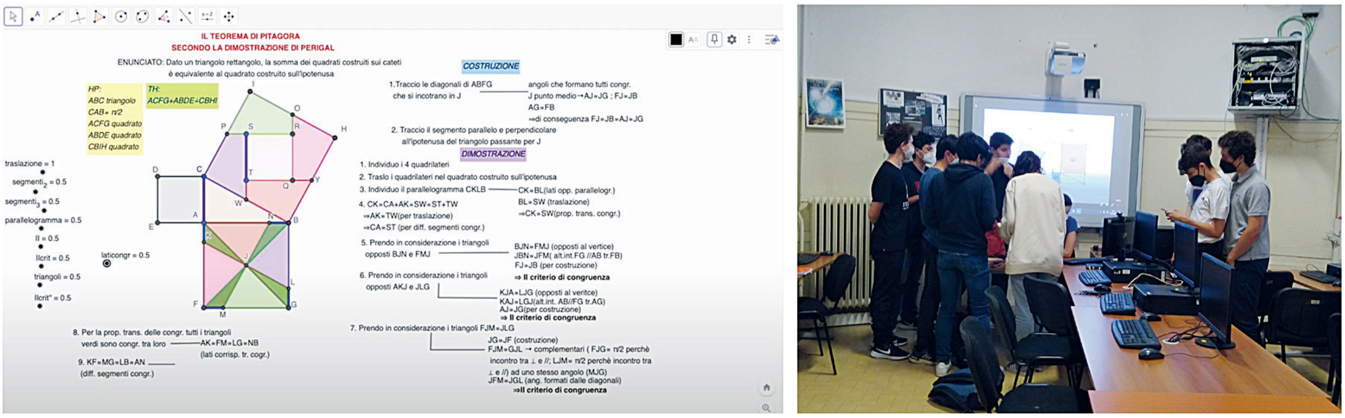


FIGURA 11 – I ragazzi impegnati nella preparazione del video e un fotogramma tratto dalla proposta di uno dei gruppi.

4.6 – *Filmato con una dimostrazione del teorema di Pitagora*

Nel sesto incontro si divide la classe in gruppi di tre/quattro studenti e si chiede ad ogni gruppo di preparare un filmato con una dimostrazione del teorema di Pitagora. A metà dei gruppi viene chiesto di elaborare tutti i dettagli dell'argomento di Leisnez, all'altra metà di quello di Perigal. Si chiede di illustrare le costruzioni con il software di geometria dinamica utilizzato nelle precedenti attività e di presentare le argomentazioni nella forma di dialogo, che abbiamo fatto praticare agli studenti nella prima, seconda e quarta attività.

Al termine dell'attività ogni gruppo ha prodotto un filmato di circa 5 minuti e la trascrizione della sceneggiatura.

Ogni gruppo ha ricevuto un report scritto dettagliato sul lavoro svolto, preparato dagli insegnanti che hanno visionato e discusso ogni filmato con attenzione.

Gli insegnanti hanno quindi diviso la classe in due gruppi ad ognuno dei quali è stato richiesto di preparare un nuovo filmato con la dimostrazione di Leisnez e uno della dimostrazione di Perigal che tenesse conto delle valutazioni contenute nei report, in preparazione alla successiva attività.

La richiesta di costruire un filmato è stata posta agli studenti con la convinzione che il lavoro di progettazione ed realizzazione di un oggetto digitale potesse risultare particolarmente utile per affinare le competenze argomentative. comunicative e di lavoro collaborativo. Abbiamo osservato come questa richiesta abbia effettivamente stimolato gli studenti a interrogarsi su come e cosa dimostrare e a confrontare le proprie opinioni a riguardo. Nel tema proposto dalla professoressa di italiano al termine del percorso, in cui veniva richiesto un consuntivo dell'esperienza fatta, una studentessa ha scritto:

> *Non scorderò mai le quattro giornate della settimana dello studente che ho passato in aula studio cercando di capire come sviluppare da zero una dimostrazione abbastanza complessa. Come non scorderò le ore spese nella mia camera a registrare il primo video. (...) Queste attività mi hanno insegnato a apprezzare le formule e le dimostrazioni che incontro tutti i giorni. (...) Per questo posso dire che il mio rapporto con la matematica è cambiato. (...) Oggi la considero un'arte ricchissima la cui bellezza però è difficile da cogliere senza ripercorrere interamente la sua storia. (...) Il confronto sulle dimostrazioni che ho avuto con gli altri elementi del mio gruppo e poi con tutta la classe è stato avvincente. Sono rimasta stupita che ci siamo fatti tutti coinvolgere.*

4.7 – *Agorà matematica e confronto con Euclide*

Nel settimo incontro si propone agli studenti un dibattito argomentativo sui due nuovi filmati, al fine di scegliere quello che rappresenterà la classe nel confronto con la dimostrazione di Euclide. I temi intorno a cui dibattere sono quelli intorno ai quali si era chiesto di riflettere nel quinto incontro.

Dopo il dibattito, la scelta del filmato vincitore è stata fatta dagli insegnati e dai ragazzi che hanno partecipato al progetto dell'anno precedente, che hanno letto una relazione dettagliata su ogni "opera in concorso".

FIGURA 12 – Il dibattito argomentativo sulla scelta del filmato viene strutturato in maniera analoga a quello svolto nel corso della terza attività, cfr. 4.3.

4.8 – *Organizzazione del Primo Libro degli Elementi di Euclide.*

Nell'ottavo incontro si discute l'organizzazione logica degli Elementi di Euclide come modello dimostrativo rispetto a cui confrontare le dimostrazioni presentate dagli studenti nei video. L'uso del *software* di geometria dinamica *GeoGebra* permette di collegare, in maniera naturale, le attività svolte precedentemente con la riflessione sulla struttura degli Elementi [5].

In particolare, il confronto tra una costruzione geometrica (fig. a sinistra) e il protocollo di costruzione (figura a destra) può essere utilizzato, come descritto in [5], per mettere in evidenza alcune proprietà nascoste che Euclide assume senza poterle dimostrare dai postulati che ha posto a fondamento degli Elementi. Per esempio il fatto che, dato un segmento AB, la circonferenza di centro A e raggio AB interseca quella di centro B e raggio AB. A partire dal disagio provocato negli studenti da queste osservazioni sulla solidità dell'edificio euclideo si è accennato ai fondamenti proposti da Hilbert in [17].

In [16] Hilbert scrive

> *La sequenza dei nostri teoremi sarà assai diversa da quella che si trova usualmente nei testi di geometria elementare. Risulterà però frequentemente la stessa che si trova negli Elementi di Euclide. Saremo così condotti dalle nostre indagini moderne ad apprezzare la penetrante visione di questo antico matematico e ad ammirarlo al massimo grado*

Rispetto all'organizzazione logica l'assiomatizzazione di Hilbert si può riguardare quindi come un completamento e un raffinamento della costruzione Euclidea, ma non un suo stravolgimento, tanto che Hilbert stesso afferma a p. 75 di [16]

> *essenzialmente i nostri assiomi sono gli stessi di Euclide* (6)

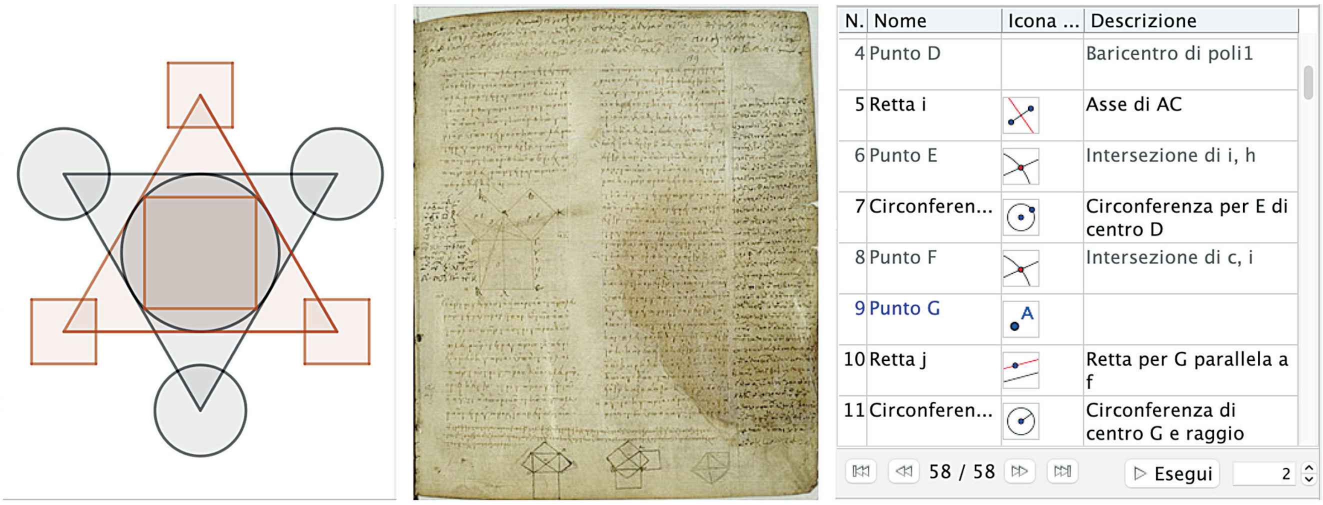
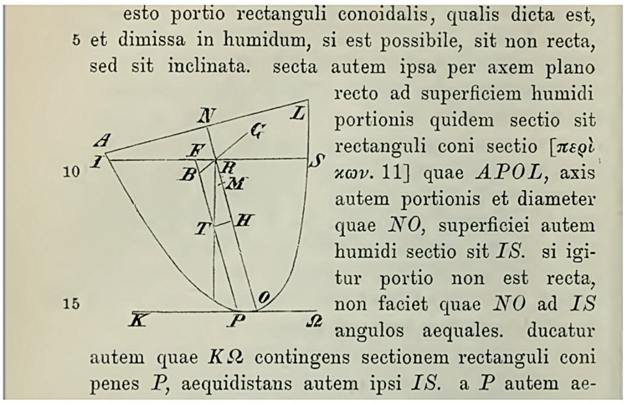


FIGURA 13 – Uso del *software* di geometria dinamica *GeoGebra* per esplorare la struttura del primo libro degli Elementi. Al centro, la pagina del manoscritto conservato presso la biblioteca vaticana con la dimostrazione della proposizione I.47 (Teorema di Pitagora).

(6) Un'importante differenza sta invece nella concezione degli oggetti della matematica che, per Hilbert, sono oggetti creati dal pensiero (oggetti di *un nuovo mondo creato dal nulla*, usando le parole impiegate da Bolyai per descrivere la geometria non euclidea).



esto portio rectanguli conoidalis, qualis dicta est, et dimissa in humidum, si est possibile, sit non recta, sed sit inclinata. secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi portionis quidem sectio sit rectanguli coni sectio [περὶ κων. 11] quae $APOL$, axis autem portionis et diameter quae NO, superficiei autem humidi sectio sit IS. si igitur portio non est recta, non faciet quae NO ad IS angulos aequales. ducatur autem quae $K\Omega$ contingens sectionem rectanguli coni penes P, aequidistans autem ipsi IS. a P autem ae-

FIGURA 14 – La struttura assiomatica di una teoria è la chiave della progettazione scientifica, cfr. [25]. Per esempio, una rigorosa progettazione garantisce, deducendolo dai principi dell'idrostatica, il galleggiamento di una nave analogamente a come una dimostrazione garantisce la deducibilità di un teorema a partire dagli assiomi. L'immagine a destra rappresenta un esempio clamoroso di costruzione non supportata da una adeguata progettazione. Il galeone Wasa, costruito tra il 1626 e il 1628 dal re di Svezia per dominare le rotte del Baltico, affondò il giorno del varo. Antichi scrittori tramandano invece che la nave Siracusia, progettata da Archimede sulla base dei principi contenuti nell'opera "I galleggianti" e ben più grande del Wasa, solcasse i mari senza problemi. Archimede, a differenza delle maestranze svedesi, conosceva le condizioni per l'equilibrio stabile di un segmento di paraboloide, che aveva dedotto con rigore euclideo dai semplici principi dell'idrostatica, come illustrato nell'immagine a sinistra, tratta dalla traduzione latina [3] dell'opera di Archimede ad opera di Heiberg.

4.9 – *Perché dimostrare?*

Nel nono incontro gli studenti hanno partecipato a una conferenza sull'importanza della dimostrazione, organizzata presso il dipartimento di matematica dell'Università, durante la quale si è posto particolare rilievo sul collegamento tra dimostrazione matematica e progettazione scientifica [24]. Alla conferenza ha fatto seguito un ampio e partecipato dibattito con gli studenti. Si è chiesto, per esempio, se condividevano le opinioni del relatore sull'utilità del dimostrare e se e in quale senso si può definire una dimostrazione più bella di un'altra.

4.10 – *Un nuova dimostrazione per la proposizione 47 del primo libro degli Elementi*

Nel decimo e ultimo incontro si è chiesto agli studenti di riscrivere la dimostrazione presentata nel video secondo il canone euclideo.

Abbiamo cercato di formulare la richiesta in maniera da motivare gli studenti a compiere con il massimo impegno quest'ultimo passo, che è per noi il punto d'arrivo dell'intero percorso. Ecco la formulazione della richiesta, che ha riscosso un'appassionata adesione da parte dei ragazzi.

> *"La casa editrice degli Elementi di Euclide, Alexandria University Press intende bandire un concorso per sostituire la dimostrazione della proposizione 47, conosciuta come "Teorema di Pitagora". Le dimostrazioni proposte vanno inviate per e-mail al coordinatore dell'editorial board della casa editrice Alexandria University Press, euclide@unialexandria.el che le sottoporrà al vaglio scientifico secondo la procedura del referaggio a doppio cieco.*
>
> *Si richiede che lo stile e il linguaggio usato nella dimostrazione siano il più vicino possibile a quelli utilizzati nell'edizione UTET curata da Attilio Frajese[10], i cui diritti sono stati acquisiti da Alexandria University Press. La dimostrazione deve essere accompagnata da un disegno esplicativo ed eventualmente da un secondo disegno, ove gli autori lo ritenessero necessario. Anche i disegni devono essere preparati in conformità con quelli della citata edizione [10], preferibilmente con il software di geometria dinamica GeoGebra."*

Ringraziamo i colleghi che si sono prestati al gioco e hanno inviato ai ragazzi i loro giudizi anonimi. Le dimostrazioni dei ragazzi sono disponibili online. (7)

(7) https://drive.google.com/file/d/1Tl5xy4iJQPEoHA-v1EKJwlTaQ52kcfsl0/view?usp=sharing

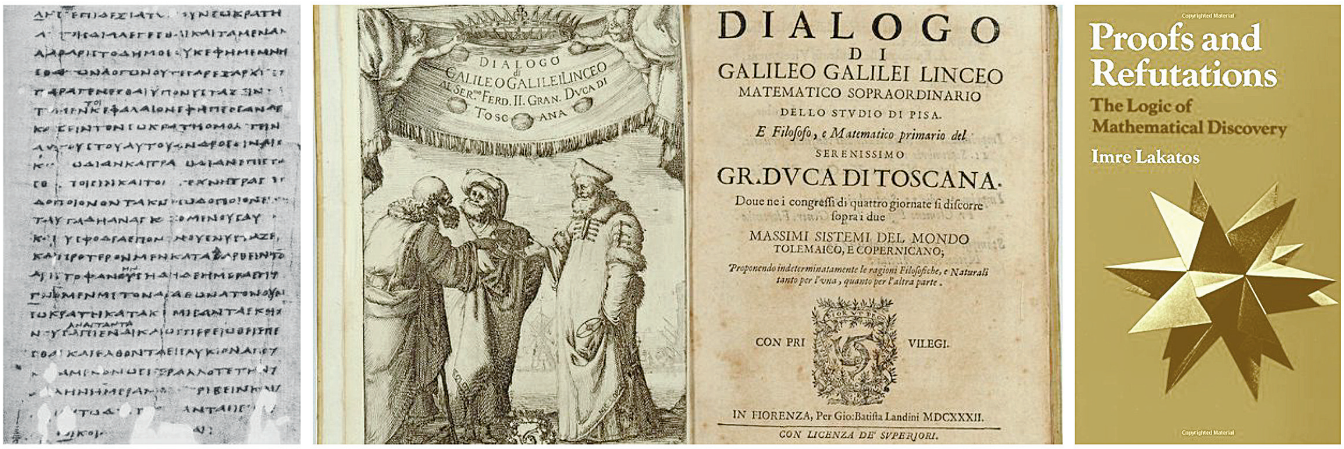


FIGURA 15 – L'uso del dialogo scritto nella filosofia e nella scienza ha una tradizione bimillenaria. Da sinistra a destra: Platone (frammento di papiro con un brano del Simposio); Galileo (Frontespizio del Dialogo sopra i massimi sistemi, [14]); Lakatos (Copertina della prima edizione di Proofs and Refutations, [19]).

5. – I Dialoghi scritti condivisi (DSC)

Al fine di costruire le relazioni *complete* tra gli attori di un GIL ([8]), che riteniamo fondamentali nei processi di apprendimento/insegnamento in un contesto interdisciplinare, è necessario stimolare il dialogo tra tutti i partecipanti (ricercatori, insegnanti, studenti). Riteniamo che uno strumento particolarmente efficace a questo scopo sia *il dialogo scritto condiviso* a cui è dedicato questo paragrafo.

Il secondo autore ha cominciato ad utilizzare il dialogo scritto come forma di valutazione formativa nei corsi di Storia della Matematica a partire dal 2003.

Il lavoro di ricerca sull'uso dei dialoghi scritti condivisi nei GIL è parte della tesi di dottorato del primo autore.

Ogni incontro con gli insegnanti ha inizio con la lettura di un dialogo, preparato dai ricercatori, che introduce l'attività sotto il profilo storico, culturale e disciplinare (*Dialogo di contestualizzazione (DC)*). Viene poi sperimentata l'attività dagli insegnanti e successivamente discussa con i ricercatori, utilizzando un secondo dialogo (*dialogo di riflessione (DR)*) elaborato inizialmente dai ricercatori per stimolare la discussione sul significato didattico delle attività. Questo dialogo viene aggiornato con le osservazioni principali emerse durante le discussioni con gli insegnanti. Il dialogo di riflessione prepara gli insegnanti alla trasposizione della attività in classe. Infine, dopo la trasposizione in classe, la riflessione sui collegamenti delle attività proposte con i contenuti presenti nelle indicazioni nazionali è stimolata dalla lettura del (*dialogo di trasposizione (DT)*).

Questo dialogo viene aggiornato con le riflessioni degli insegnanti su ciò che è successo in classe.

Insegnanti e ricercatori sono invitati a partecipare ai dialoghi intervenendo, durante la lettura oppure successivamente, per integrare e modificare il testo con osservazioni critiche, domande, suggerimenti, approfondimenti, ecc. La costruzione, la condivisione e l'uso dei dialoghi scritti, è resa possibile dall'impiego di strumenti per la modifica di risorse elettroniche condivise quali le classi *GeoGebra* ([9]) o i *Google Documents* ([10]).

Anche agli studenti è proposta la costruzione di alcuni dialoghi, come riflessione su alcuni degli snodi principali del percorso, per esempio la sceneggiatura delle dimostrazioni digitali della sesta attività.

In conclusione di questo paragrafo riportiamo la riflessione di una delle insegnanti che hanno partecipato al laboratorio "Argomentare e dimostrare",

([8]) cfr. Laboratori Globalmente Interdisciplinari.

([9]) https://www.geogebra.org/m/sh6xprmx
([10]) https://www.google.it/intl/it/docs/about/

presentata durante un seminario per i docenti dei Licei Matematici di Roma.

> *"Nei nostri incontri abbiamo utilizzato il dialogo scritto condiviso, un dialogo che abbiamo integrato dopo ogni incontro. Devo dire che è stato un confronto per me bellissimo, direi intellettuale. Un confronto che purtroppo si fa poco a scuola.*
>
> (...)
>
> *Rileggendo questi dialoghi, invece, il confronto l'ho proprio respirato. Un confronto non solo sul piano intellettuale, ma anche sui diversi aspetti delle prassi didattiche, sui ragazzi e su come le materie potessero supportarsi nello sviluppo del tema in modo globale. È stato utilissimo per me leggere questi dialoghi a distanza di tempo, non solo da un punto di vista matematico ma anche perché hanno messo in luce l'importanza del percorso e di come il portare in classe l'attività abbia modificato e fatto evolvere quelle che erano le mie convinzioni iniziali. È stato un lavoro faticoso, per chi li ha preparati e per noi che ci abbiamo lavorato, ma credo ne sia valsa la pena."*

6. – Esempi

Per dare un'idea più concreta del ruolo dei dialoghi scritti condivisi nei GIL, riportiamo alcuni stralci dei dialoghi relativi al quinto incontro del laboratorio "*Argomentare e dimostrare*" dedicato alle molte "dimostrazioni" del teorema di Pitagora.

Le attività del quinto incontro consistono nella visione e nella riflessione guidata di cinque filmati relativi al Teorema di Pitagora, descritti sinteticamente nella sezione 4.5, p. 16 e visionabili al link riportato nella sezione 4, p. 12. Lo scopo è quello di far riflettere la classe sui diversi tipi di argomentazione proposti nei filmati per far arrivare gli studenti a elaborare una definizione informale di dimostrazione matematica, basata su esempi e controesempi che sarà il modello argomentativo che guiderà i ragazzi nella *dimostrazione digitale* che dovranno costruire nella fase successiva. Nell'ultima fase del laboratorio si ritorna sul *modello di argomentazione* elaborato dalla classe per metterne in luce i limiti rispetto al *modello di dimostrazione* proposto da Euclide negli Elementi.

Riassumendo le attività degli insegnanti si articolano in quattro momenti.

1. Sperimentazione dell'attività che verrà portata in classe a partire dalla lettura del *dialogo di contestualizzazione* ([11]).
2. Riflessione sull'attività svolta e discussione delle modifiche da apportare prima di portarla in classe utilizzando il *dialogo di riflessione*.
3. Trasposizione dell'attività in classe e in copresenza.
4. Discussione del risultato dell'attività in classe utilizzando il *dialogo di trasposizione*.

6.1 – *Dialogo di contestualizzazione (DC).*

È il dialogo di raccordo con le attività svolte negli incontri precedenti e di introduzione alla nuova attività. Il dialogo di contestualizzazione viene letto e discusso prima che gli insegnanti svolgano l'attività.

6.1.1 – **Stralcio**

I personaggi del dialogo sono Pitagora e due pitagorici.

Primo pitagorico Vi ho raccontato del mio recente viaggio in Oriente? Sono rimasto colpito dalla precisione, la perfezione oserei dire, con cui gli indiani costruiscono gli altari ([12]).

Pitagora Intendi col disegno di forme perfette, quali la circonferenza, il quadrato, ecc.

Primo Pitagorico Non solo. Essi pongono estrema cura nel cercare e mantenere proporzioni esatte fra gli elementi delle figure. Per esempio, da una forma quadrata, sanno come costruirne una esattamente doppia e, più in generale, come sommare due forme quadrate per averne una equivalente della stessa forma.

(...)

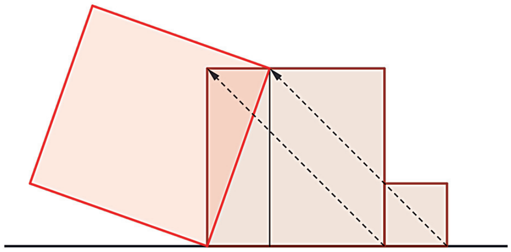
Ecco cosa scrivono in uno dei libri in cui hanno raccolto le norme per la costruzione degli altari.

> *Per sommare due differenti quadrati, togli dal più grande una porzione rettangolare con un lato del*

([11]) Cfr. sezione 5 del libro GeoGebra, https://www.geogebra.org/classroom/z2qnputy

([12]) Richiamo alle attività svolte nel primo incontro dedicato alla origine rituale della matematica.

più piccolo. La diagonale di questa parte sarà il lato della somma (13).



Pitagora In altre parole, il quadrato sull'ipotenusa è somma dei quadrati sui cateti.

(...)

Il libro con le norme per la costruzione degli altari contiene un argomento che spiega le ragioni di questa costruzione?

Primo Pitagorico Non che io sappia. Ma non mi pare neanche che qualcuno ne senta l'esigenza. La cosa è accettata in virtù dell'autorità di chi ha scritto il libro. La fede nella loro religione è sufficiente a fornire prova della correttezza della costruzione: altrimenti il dio manifesterebbe la sua contrarietà.

Secondo Pitagorico Non posso pensare che questo sia sufficiente.

Pitagora A me invece non sorprende. Sono molte le cose che, chi non è abituato a dubitare delle opinioni comuni, accetta perché tutti le accettano! Noi abbiamo cominciato a dubitare di tutto e a discutere su tutto, per il piacere di farlo (14).

(...)

Primo Pitagorico È possibile, in matematica conoscere senza dimostrare?

Secondo Pitagorico Ho letto di un matematico che aveva sviluppato una forte intuizione geometrica

e ciò Lo rendeva sicuro della verità della proposizione in questione e Lo appagava pienamente: certamente ad ogni modo non Gli impediva di procedere oltre. AvendoGli una volta dichiarato di non vedere la verità di un'affermazione, che egli riteneva evidente, ma che invano avevamo tentato di dimostrare logicamente, Egli si fermò di botto (eravamo nel corso di una delle [nostre] abituali passeggiate) e, invece di tentare un'ultima dimostrazione, roteò il Suo bastone appuntandolo sopra un cagnolino sul davanzale di una finestra, dicendomi, «Non vede? Per me è come se mi dicesse che non vede quel cagnolino!». (15)

(...)

6.2 – *Dialogo di riflessione (*DR*).*

Il dialogo di riflessione sintetizza le ragioni didattiche dell'attività e stimola le riflessioni degli insegnanti su di esse. Viene letto dopo che gli insegnanti si sono cimentati con l'attività ed è successivamente rielaborato alla luce delle loro riflessioni. La lettura viene fatta assegnando le parti tra i presenti e lasciando libertà di intervenire con commenti, osservazioni e richieste di spiegazioni. Questa modalità di impiego del dialogo si è dimostrata molto efficace per stimolare la discussione sui dubbi e le difficoltà relative alle attività e per preparare adeguatamente gli insegnanti alla trasposizione in classe. Ne riportiamo due stralci.

6.2.1 – **Primo stralcio**

I personaggi del primo stralcio sono un ricercatore (R1) e tre insegnanti (I1,I2,I3). Lo scopo di questo stralcio è quello di chiarire l'attività nel contesto del percorso. La parte assegnata a R1 è di provocazione. Le sue osservazioni hanno lo scopo di stimolare le reazioni degli insegnanti. Se le reazioni non arrivano si leggono le parti assegnate ai personaggi I1, I2, ecc. Le reazioni allargano la riflessione. Quelle più significative vengono inserite nella rielaborazione del dialogo che verrà utilizzato l'anno successivo.

R1 L'attività propone cinque video in cui sono presentate argomentazioni relative al teorema di Pitagora. Vengono richiesti commenti sulla correttezza, sulla completezza e sulla chiarezza delle argomentazioni e sulla qualità comunicativa dei video.

I1 Qual è la dimostrazione giusta?

(13) Le istruzioni sono tratte da un *sulbasutras* [4] di epoca posteriore che molto probabilmente riporta però conoscenze databili al tempo di Pitagora.

(14) Richiamo alle attività del terzo incontro dedicato al dibattito argomentativo.

(15) Citazione di un famoso brano in cui Fabio Conforto ricorda il suo maestro Federigo Enriques [8].

R1 Lo scopo dell'attività non è quello di rispondere a questa domanda.

I1 Qual è, allora?

R1 Che la classe costruisca uno standard condiviso di qualità per giudicare l'accettabilità di una argomentazione matematica.

I2 Noi chiediamo alla classe di decidere "democraticamente" quando una dimostrazione è giusta?

R1 Sì. Più precisamente, chiediamo alla classe di guardare attentamente cinque filmati, di discutere pregi e difetti delle argomentazioni proposte e del modo in cui vengono comunicate, con lo scopo di costruire, nell'attività successiva, un video con una dimostrazione del teorema di Pitagora che sia migliore e più accattivante di quelle che hanno visionato.

I3 Ma il giudizio su cosa sia migliore chi lo darà?

R1 La classe.

I2 Come?

R1 Votando.

I1 Su cosa?

R1 Divideremo la classe in gruppi. Ogni gruppo preparerà un video con la sua dimostrazione del teorema di Pitagora e la classe sceglierà la sua dimostrazione del teorema di Pitagora al termine di un dibattito argomentativo, strutturato come quello proposto nel terzo incontro.

Tutta la classe lavorerà poi sul video scelto per farlo diventare il video della classe.

I2 Mi sembra che così facendo diamo l'idea sbagliata che ci si possa mettere d'accordo su cosa si debba intendere per una dimostrazione. Credo che sia molto pericoloso. Se la classe decide quando una dimostrazione è accettabile, la qualità delle dimostrazioni peggiorerà rapidamente.

R1 La classe deciderà dopo un lungo lavoro di riflessione e di discussione al suo interno e con i suoi insegnanti. Poi, nelle attività successive, il video scelto verrà messo a confronto con quello preparato sulla base della dimostrazione di Euclide, come è riportata negli Elementi. Nell'ultima attività infine verrà chiesto agli studenti di produrre una dimostrazione nello stile euclideo che verrà giudicata da un gruppo di esperti esterno alla classe.

I1 Ma per quale ragione dobbiamo rendere tutto così lungo e complicato?

R1 Perché il percorso che ha portato alla dimostrazione euclidea è stato lungo e complicato e ha attraversato fasi in cui si è dovuto costruire lo standard del rigore in base al quale giudicare la correttezza di una dimostrazione, riflettendo su cosa si debba e su cosa non si debba intendere per dimostrazione e perché. Questo percorso è quello che vogliamo che i ragazzi ripercorrono per comprendere il significato, l'importanza e le caratteristiche specifiche della dimostrazione matematica

(...)

6.2.2 – Secondo stralcio

I personaggi del secondo stralcio sono due ricercatori (R1,R2) e quattro insegnanti (I1,I2,I3,I4). I2 è l'insegnante di matematica. Si riflette sulla qualità della argomentazioni proposte nei cinque filmati e quali di queste possono essere considerate dimostrazioni.

(...)

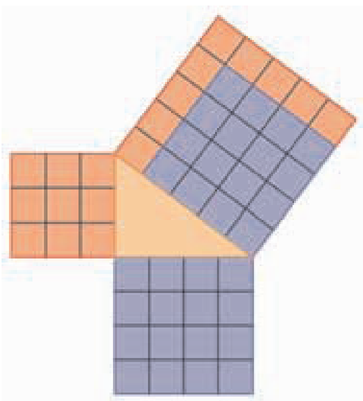


FIGURA 16 – L'argomento proposto funziona solo per i cateti in proporzione 3,4.

I2 A me invece il secondo filmato non convince per niente. L'argomento funziona solo perché i lati misurano 3,4,5.

I4 Dovremmo provare con 5,6,7 ... chissà se funziona.

I3 Ho provato...non funziona affatto.

R1 Perché non funziona?

I4 Perché, procedendo come nel video, il quadrato sul primo segmento è fatto di 25 quadratini di lato unitario, quello sul secondo segmento di 36 e quello sul terzo di 49 e 25 più 36 è più grande di 49.

I2 Ma è evidente che non debba funzionare! Un triangolo i cui lati hanno lunghezza 5, 6 e 7 non può essere rettangolo!

R1 Quindi, l'argomento funziona solo per i triangoli rettangoli che hanno lati in rapporti interi?

I2 Si, perché in tal caso, detti m, n e q le lunghezze dei lati, $m^2 + n^2 = q^2$.

R2 Questo perché vale il teorema di Pitagora, che è esattamente quello che vorremmo dimostrare. Quindi possiamo *illustrare* il teorema di Pitagora come nel primo video se troviamo tre interi m, n e q che soddisfano la relazione $m^2 + n^2 = q^2$, ma questa non è una dimostrazione del teorema di Pitagora. Assume quello che vorremmo dimostrare. È solo la condizione perché si possa illustrare il teorema ritagliando e spostando quadretti. Tra l'altro, i triangoli rettangoli i cui lati stanno in rapporti interi sono molto particolari, mentre il Teorema di Pitagora vale per triangoli rettangoli qualsiasi.

(...)

6.3 – *Dialogo di trasposizione (* DT*).*

Lo scopo del dialogo di trasposizione, che viene letto dopo la sperimentazione dell'attività in classe, è quello di riassumere tutte le informazioni che possono essere utili all'insegnante per "istituzionalizzare l'attività", cioè discutere gli elaborati degli studenti per pianificare le lezioni di *restituzione*, durante le quali gli insegnanti collegano l'attività svolta nel laboratorio al programma istituzionale attraverso le difficoltà e le sollecitazioni emerse negli elaborati e i commenti raccolti.

Ne riportiamo due stralci.

6.3.1 – **Primo stralcio**

I personaggi del primo stralcio sono due ricercatori (R1, R2) e l'insegnante di matematica (I1).

R1 Qual è, secondo voi, il collegamento delle attività proposte con i contenuti istituzionali?

I2 Dal mio punto di vista l'attività ben si colloca nel percorso curricolare dove si cerca, a volte senza riuscirci, di analizzare e far comprendere i procedimenti caratteristici del pensiero matematico: definire, dimostrare, generalizzare, assiomatizzare.

R2 Le indicazioni nazionali ([16]) sono abbastanza chiare su questo punto. Infatti possiamo leggere che *"Il primo biennio ha come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano chiarendo l'importanza e il significato della dimostrazione e del dimostrare"*. Nelle indicazioni si richiede inoltre che l'*approccio euclideo non sia ridotto a una formulazione puramente assiomatica*. Credo che l'attività sia del tutto coerente

6.3.2 – **Secondo stralcio**

I personaggi del secondo è un ricercatore (R1) e un insegnante (I1). Si passano in rassegna le reazioni degli studenti durante l'attività svolta in classe per confrontarle con quello che ci si aspettava di raccogliere e di decidere cosa restituire alla classe.

R1 Analizziamo i commenti al terzo video della prima serie.

I2 Quale? Quello "dell'indiano" ([17])?

R1 Sì. La mia idea era di mostrare qualcosa che apparisse come un gioco di prestigio. Che reazione avete avuto voi davanti al video dell'indiano e che reazione hanno avuto i ragazzi?

(...)

R1 È interessante approfondire la discussione sulla differenza nelle argomentazioni tra il secondo video, quello della verifica geometrica, e il terzo video. Perché diciamo che il secondo è un caso particolare e il terzo no? Pure nel terzo quello che si vede è un caso particolare. Il punto è che nel terzo video l'argomento illustrato con le figure ha carattere generale. Nel secondo no. L'argomento proposto nel secondo video si basa sul fatto che i lati del triangolo mostrato stanno tra loro come 3, 4, 5. L'argomento proposto nel terzo video è un modo per ricombinare quattro copie di un triangolo rettangolo dentro un quadrato di lato pari alla somma dei cateti il cui complemento è una volta il quadrato sull'ipotenusa e una volta i quadrati sui cateti. Il triangolo iniziale e il quadrato entro cui fare gli spostamenti possono cambiare ma la ricetta per costruire il quadrato grande e muovere le copie del triangolo fissato è la stessa.

([16]) D.P.R. 15 marzo 2010, n. 89.

([17]) Ci riferiamo al video con l'argomento di Leisnez (cfr sezione 4.5, pag. 16).

7. – Difficoltà di un insegnamento interdisciplinare

I laboratori globalmente interdisciplinari sono stati occasioni di collaborazioni estremamente stimolanti ma non bisogna nascondere che le difficoltà di realizzazione sono molte. Tra le maggiori criticità segnaliamo i problemi relativi a:

1. insegnare in copresenza;
2. partecipare in maniera continuativa alla costruzione dei dialoghi;
3. comunicare utilizzando linguaggi specialistici diversi: matematico, filosofico, letterario, ecc.;
4. comprendere il significato del percorso e riuscire a trasmetterlo alla classe prima di averlo completato.

Nonostante le difficoltà siamo convinti dell'importanza e dell'efficacia di questo approccio per promuovere uno sguardo interdisciplinare sull'insegnamento e sui problemi di apprendimento. Per sottolineare le virtù dello sguardo interdisciplinare ci piace condividere la metafora suggerita dall'immagine riportata in Figura 17, dove è rappresentato un gruppo di personaggi che guardano un complicato disegno sul tavolo, che non riescono a interpretare. Per dar senso al disegno è necessario guardarlo riflesso nello specchio cilindrico, metafora dello *sguardo interdisciplinare* con cui conviene secondo noi affrontare alcuni problemi di insegnamento/apprendimento.

Concludiamo queste riflessioni con una testimonianza di uno dei ragazzi che hanno partecipato al laboratorio, che ben sintetizza le ragioni dell'efficacia di questo approccio storico ed interdisciplinare:

> *Ho cominciato a guardare criticamente alla dimostrazione del teorema di Pitagora e a pormi il problema di spiegare le mie affermazioni quando i compagni hanno cominciato a chiedere giustificazioni, per fare bella figura nella sfida contro Euclide. Mi sono reso conto che stavo guardando al teorema di Pitagora da una nuova prospettiva. Le pignolerie che mi infastidivano erano diventate argomenti di dibattito appassionato, come quelli che abbiamo fatto durante l'incontro dedicato al dibattito argomentativo nella civiltà greca.*

FIGURA 17 – Simon Vouet (1590-1649), Otto satiri che guardano l'anamorfosi di un elefante.

Ringraziamenti

Il nostro ringraziamento va a tutti gli insegnanti e a tutti gli studenti che hanno costruito insieme a noi questi laboratori e in particolare a Silvia Lanaro per la sua infaticabile e convinta partecipazione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] AAVV, Documento di presentazione dei licei matematici, documento online.
https://www.liceomatematico.it/.

[2] AAVV, Riflessioni sul laboratorio di matematica – Sito UMI – Unione Matematica Italiana, documento online.
https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/

[3] ARCHIMEDE DI SIRACUSA (1881) *Opera Omnia}, a cura di Heiberg J. L., vol. 2, Lipsia, Teubner.*

[4] BIBHUTIBHUSAN D. (1932). *The science of the Sulba. A study in early Indu geometry}, University of Calcutta Press.*

[5] BRIGAGLIA A., RASPANTI M. A., ROGORA E. (2021) "Uso di un software di Geometria Dinamica nella formazione degli Insegnanti". *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* **6**(1), pp. 37-67.

[6] CAPONE R., ROGORA E., TORTORIELLO F. S. (2017) "La matematica come collante culturale nell'insegnamento". *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* **2**(3), pp. 293-304.
http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=RUMI_2017_1_2_3_293_0

[7] CASTELNUOVO G. (1910) "La scuola media e le attitudini che deve risvegliare nei giovani", *L'istruzione media: giornale della Federazione nazionale Insegnanti di Scuole medie*, **9**, pp. 33-47.

[8] CONFORTO F. (1946) "Intuizione visiva degli enti geometrici", *Periodico di Matematiche*, IV, XXIX, XXV, 2, pp. 115-116

[9] Euclide di Alessandria (1908) *The thirteen books of Euclid's Elements*, a cura di Heath T., Cambridge university press.

[10] Euclide di Alessandria (1970) *Elementi*, a cura di Frajese A., trad. Maccioni L., UTET, Torino.

[11] Fontana A., Telloni A. I., Toffalori C. (2020) "Platone e la matematica. Parte I", *ArteScienza* VIII, 14, pp. 161–192.

[12] Fontana A., Telloni A. I., Toffalori C. (2021) "Platone e la matematica. Parte II", *ArteScienza* VIII, 15, pp. 63-102.

[13] Freire P. (1980) *La pedagogia degli oppressi*, Mondadori, Milano.

[14] Galilei G. (1632) *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Firenze.

[15] Ghosh A. (2019) *La grande cecità. Il cambiamento climatico e l'impensabile}, Edizioni BEAT.*

[16] Hilbert D. (1899) *Elemente der Eukilidischen Geometrie*, UB Gießen, Hs NF 705: Vorlesungsnachschrift (Autographie) von Hans von Schaper, Göttingen, Wintersemester 1898/99.

https://digisam.ub.uni-giessen.de/ubg-ihd-hn/content/titleinfo/4779264

[17] Hilbert D. (1899) *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig.

[18] Kahneman D. (2020) *Pensieri lenti e veloci* Mondadori, Milano.

[19] Lakatos I. (1979) *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica}. Feltrinelli, Milano.*

[20] Ortega y Gasset J. (1932) *The revolt of the masses*, Norton and Company, New York.

[21] Rogora E. (2022) *Insegnamento interdisciplinare*, documento online.

https://www.liceomatematico.it/wp-content/uploads/2022/02/Rogora2022Testo.pdf

http://pr (2022)ogrammi.wdfiles.com/local–files/blog:_start/Lille2022F.pdf

[22] Rogora E., Tortoriello S. (2018) "Matematica e cultura umanistica", *Archimede*, 2018 (2), pp. 82-88.

[23] Rogora E., Tortoriello S. (2021) "Interdisciplinarity for learning and teaching mathematics". *Bolema*, **35** (70), pp. 1086-1106.

https://www.scielo.br/j/bolema/a/SWZt6FGCqTDGBKfS5cqyrHN/?lang=en&format=pdf

[24] Russo L. (2001) *La rivoluzione dimenticata. Feltrinelli, Milano.*

[25] Russo L. (2014) *Euclide*, Grandangolo, Collane del Corriere della Sera, Milano.

[26] Tall D., Vinner S. (1981) "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity", *Educ. Stud. Math.*, **12**, pp. 151-169.

[27] Telloni A. I., Toffalori C. (2014) "Lezioni di matematica", *La matematica nella Società e nella Cultura*, S. 1, **7** (1), pp. 1-54.

[28] Vassallo V. (2022) "È così, si vede!", *Linea Matematica*, **1**, pp. 83-127.

[29] Wolf-Michael R. (2020) "Interdisciplinarity Approaches in Mathematics Education", in Lerman S. (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* 2nd. ed., Springer, New York.

Francesco Bologna

Francesco Bologna, già docente di matematica e fisica, è dottorando presso l'Università "Sapienza" di Roma. Membro della Giunta Gruppo UMI sui Licei Matematici, esperto in tecnologie applicate alla didattica, la sua attività di ricerca riguarda la storia della matematica e la sperimentazione di metodologie di insegnamento interdisciplinare.

Enrico Rogora

Enrico Rogora, insegna Matematiche complementari presso il Dipartimento di Matematica dell'Università "La Sapienza" di Roma. Si è occupato di geometria algebrica, teoria degli invarianti, storia della matematica. Partecipa a programmi di cooperazione scientifica con il Kenya e il Perù.