Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Carlo Toffalori

Città invisibili, città matematiche

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2023), n.3, p. 229–238.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2023_1_8_3_229_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2023.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 8, N. 3, dicembre 2023, 229-238

Città invisibili, città matematiche

CARLO TOFFALORI
Università di Camerino
E-mail: carlo.toffalori@unicam.it

Sommario: *Spinti dalla lettura delle* Città invisibili *di Italo Calvino, ci domandiamo se esiste tra di loro, o in altre opere letterarie e filosofiche o nella realtà una città della matematica, e semmai quale sia. Il nostro viaggio ci condurrà da Platone a Leon Battista Alberti, da Perec a Escher, da Musil all'immancabile Gödel, per concludersi con Hilbert e Grothendieck. Con un finale forse sorprendente.*

Abstract: *Inspired by Italo Calvino's* Città invisibili*, we wonder if a city of mathematics exists among them, or in other literary and philosophical works, or in reality, and if anything, what it is. Our journey will lead us from Plato to Leon Battista Alberti, from Perec to Escher, from Musil to the inevitable Gödel and many others, concluding with Hilbert and Grothendieck. With a perhaps surprising ending.*

1. – Introduzione

Il 15 ottobre 2023 si è celebrato il primo centenario della nascita di Italo Calvino (1923-1985), autore popolare e amato tra i matematici forse ancor più che tra i colleghi letterati. Nei suoi scritti, infatti, i riferimenti alla matematica, a combinatoria, geometria, calcolo infinitesimale e via dicendo, sono copiosi. La sua prosa, spesso fastosa e immaginifica, ha talora andamento più pacato, aristocratico e raffinato, che richiama la matematica astratta. È il caso de *Le città invisibili*, romanzo del 1972, dai toni crepuscolari, sommessi e malinconici [Ca2]. Mi concentro su quest'opera, non tanto per una sua analisi dal punto di vista matematico, che del resto è già stata ampiamente e degnamente sviluppata (1). Ricordo tuttavia che il romanzo racconta di 55 città, che Marco Polo visita su mandato dell'imperatore Kublai Kan, ripartite in 11 gruppi di 5: "le città e la memoria", "le città e il desiderio", "le città sottili" e così via. Mi dedico allora al seguente interrogativo: in questa moltitudine di luoghi, ce ne sono alcuni che rivelano connotazioni di matematica? Mi chiedo cioè se agli 11 gruppi suddetti non se ne possa aggiungere un altro, trasversale, ossia "le città e la matematica"; o se addirittura tra queste 55 città ce ne sia una che in particolare possa definirsi "città della matematica", perché più e meglio delle altre incarna la nostra disciplina.

Più in generale mi domando se questa città della matematica esiste nella realtà o nella fantasia letteraria, dentro o fuori l'opera calviniana. Nel mio itinerario, presenterò così dapprima 5 città che, a prescindere da Calvino, ci sono state proposte dalla storia o dall'immaginazione, nei secoli dalle origini del mondo ai giorni nostri, e che per qualche verso si collegano alla matematica e ci consegnano tracce di matematica.

Tornerò poi alle *Città invisibili*, per segnalarne alcune – ancora 5 – che mi sembrano meglio corrispondere al profilo richiesto. Altre ne cercherò in ulteriori opere di Calvino, segnatamente ne *La taverna dei destini incrociati* [Ca1]. Poi sconfinerò di nuovo verso altri autori per concludere in qualche modo, forse imprevedibile e forse no, la mia indagine.

Confido in particolare che, seguendo questo filo, docenti e studenti della scuola secondaria di secondo grado possano elaborare e percorrere itinerari "in-

Accettato: il 21 novembre 2023.

(1) Si veda per esempio [Lu]. Su Calvino e matematica, rimando poi a [Bi] e [Lo2], oltre che, naturalmente, a [Lo1] in riferimento alle *Lezioni americane*. Più in generale, su Calvino e la scienza, si può vedere il recente [Bu]. Vorrei citare anche [Ba], che contiene, tra l'altro, un capitolo per noi molto intrigante dal titolo *Il simbolo dialettico della città*.

terdisciplinari” che approfondiscano i legami della matematica non solo con la letteratura, ma pure con arte, scienze sociali e altro ancora.

2. – Città e matematica

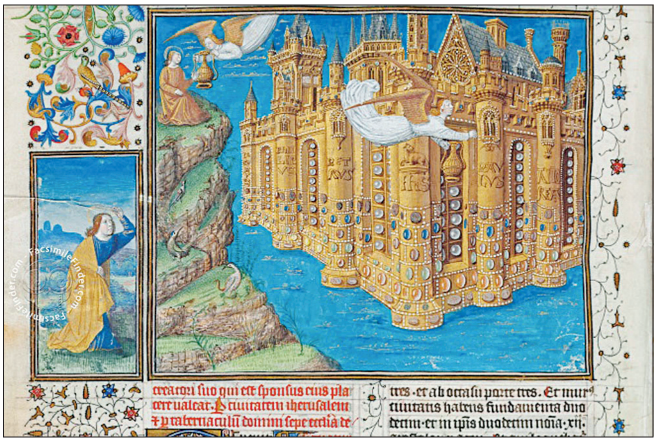
Come annunciato propongo 5 modelli di città, suggeriti dalla storia o creati dall’immaginazione, tutti connessi in qualche modo alla matematica. Per ognuno spiego i motivi di questo legame. Intendo qui il termine “città” in senso lato, non solo come complesso architettonico di edifici, ma anche come società, collettività di persone che un qualche denominatore comune, non necessariamente matematico, unisce. In questo senso pure la Repubblica di Platone, lo stato ideale da lui vagheggiato e descritto soprattutto nell’omonimo dialogo [Pl], ha la struttura di città. Proprio Calvino scrive nella prefazione a [Ca2]: *“le città sono un insieme di tante cose: di memoria, di desideri, di segni d’un linguaggio”*. Di pensieri, si potrebbe aggiungere, e addirittura di pensieri matematici.

Gli esempi che porterò si possono così intitolare:

a) la città della perfezione,
b) la città della proporzione,
c) la città delle regole,
d) la città scacchiera,
e) la città complessa.

a) La città della perfezione

Inauguro la cinquina con la nuova Gerusalemme celeste, descritta nell’*Apocalisse* di San Giovanni, specificamente nel capitolo 21 [Gi]. Nel suo bagliore, questa città santa di Dio riluce non solo di pietre preziose, ma anche di numeri e geometrie. Essa infatti *“è a forma di quadrato, la sua lunghezza è uguale alla larghezza”*, come precisa l’apostolo. Anzi, pure l’altezza è uguale alle altre due dimensioni, così che la città assume complessivamente la forma di un cubo. Difficile valutare esattamente la misura del suo lato, tanto più che, come racconta Giovanni, l’unico strumento a disposizione per ottenerla è una canna, sia pure d’oro. A calcolarla provvede tuttavia un angelo, grazie al quale apprendiamo che il perimetro della città, e quindi di ognuna delle sue facce quadrate, è di 12.000 stadi. Come dire, in termini moderni, all’incirca 2.220 chilometri. Si deduce che il lato di ogni faccia è 555 chilometri – enormemente superiore alle moderne megalopoli e ai loro grattacieli: si ricordi che il raggio terrestre arriva a circa 6.378 chilometri.



La Gerusalemme celeste, immagine tratta da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Apocalypse_figur%C3%A9e_des_ducs_de_Savoie_-_Escorial_E_Vit.5_-_Folio_49v._La_Jerusal%C3%A9n_Celestial_(Jean_Colombe)_crop.jpg

Il numero 12 è poi chiaramente simbolico: è lo stesso delle tribù di Israele e degli apostoli dell’Agnello. Dodici sono anche le porte nella cinta muraria della città, 3 per lato. Queste mura sono alte 144 braccia (144, cioè il quadrato di 12), ovvero approssimativamente 65 metri.

La matematica interviene quindi a sottolineare la perfezione della città celeste, luogo e immagine di Dio, e lo stato di beatitudine dei suoi abitanti – il comune denominatore che li lega.

Un’altra sorta di paradiso terrestre, collocato però nel passato e non nell’avvenire, è la mitica Atlantide, di cui Platone ci narra nel *Timeo* e nel *Crizia* [Pl]. Soprattutto nel secondo di questi dialoghi, l’antico filosofo ne esalta la favolosa bellezza e l’opulenza, indulgendo nuovamente a dettagli matematici. Atlantide, infatti, ha una struttura geometrica, non più quadrata, ma circolare: al suo centro sta una collina *“cinta di mare e terra”*, circondata cioè *“come [...] al tornio”* da 5 anelli concentrici, alternativamente di acqua salata e terra. A presiedere il suo sviluppo urbanistico è nuovamente un numero, non più 12, ma 10. Dieci furono, infatti, i figli che Poseidone, fondatore di Atlantide, ebbe dalla bellissima Clito, dieci sono le zone in cui il dio suddivise la città, una per figlio, dieci sono i re che da allora le governarono.

Racconta però Platone che, col tempo, Atlantide perde l'iniziale perfezione. Quando la virtù primitiva dei suoi abitanti si corrompe, la città precipita nella decadenza e nella rovina.

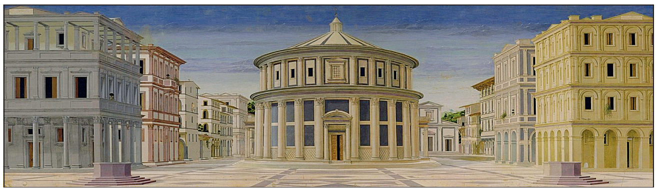
Splendore analogo ad Atlantide dovette avere un'altra città, Ecbatana, antica capitale dei Medi. La menzionano Eschilo al principio (al verso 16) dei *Persiani* [Es], tragedia che risale al 470 a. C., come pure, sempre in apertura, il libro biblico di *Giuditta* [Giu], che narra episodi avvenuti intorno al 600 a.C.. Dunque la città fu molto più antica. La descrive Erodoto nel primo libro delle *Storie* [Er], 98, come degradante da una collina, avvolta da non 5, ma 7 cinte murarie concentriche. Nel suo racconto si scrive che la più interna, che racchiude la reggia e i tesori, ha bastioni rivestiti d'oro. Le altre, procedenti verso l'esterno, sono nell'ordine argentata e poi colorate di arancio, azzurro, rosso porpora, nero e bianco.

b) La città della proporzione

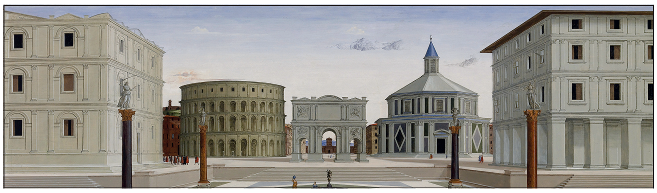
Nella già citata *Repubblica* [Pl], Platone indica la matematica, in dettaglio l'aritmetica e le geometrie piana e solida, insieme ad astronomia e musica, come discipline fondamentali dell'educazione di ogni cittadino, e in particolare dei governanti. È infatti su di esse che si fonda quella capacità di *pensiero discorsivo*, che conduce alla pienezza della conoscenza del mondo e di se stessi, cioè alla filosofia. Nella concezione di Platone la matematica concorre pure alla formazione degli architetti, i quali non sono semplici artigiani costruttori, ma scienziati, chiamati, per adempiere la loro missione, al grado più ampio e generale di conoscenza. L'architettura, infatti, è anzitutto una scienza (*episteme*): la più tecnica tra le scienze, ma pur sempre una scienza. Numeri e geometria contribuiscono allora a elevare non solo la città architettonica, ma la stessa società secondo principi di ordine e armonia.

Questa visione di Platone trova sviluppo e compimento anche matematico nella *città ideale* del Rinascimento – il nostro secondo modello. A esemplificarla stanno luoghi come Pienza, Sabbioneta, Palmanova e tanti altri, come pure i tre celebri dipinti riprodotti qui a fianco (le immagini sono tratte da https://commons.wikimedia.org/) e conservati, rispettivamente, a Urbino, Baltimora e Berlino. La città ideale che vi è raffigurata non è più il paradiso di un Dio trascendente, come la Gerusalemme dell'*Apocalisse*. Al contrario è umanissima: il luogo della proporzione, dell'equilibrio, della razionalità, della funzionalità, della misura così come, appunto, la vagheggiava il pensiero del Rinascimento. A tanto concorre nuovamente la geometria di spazi, piazze e palazzi, tramite prismi, piramidi, coni e cilindri.

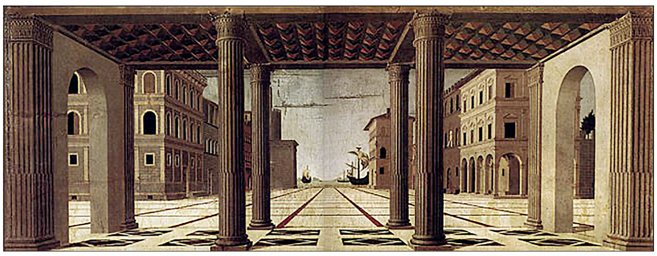
La paternità delle tavole appena menzionate è incerta. C'è però chi le attribuisce tutte a Leon Battista Alberti (1404-1472). A lui possiamo comunque rivolgerci, se non come pittore, certamente come teorico dell'architettura, per confermare ulteriormente le valenze matematiche di questa utopia. Il riferimento, in questo caso, è il trattato *De re aedificatoria*, da lui scritto nel 1452 [Al]. Nei suoi dieci libri abbondano i riferimenti a geometria e aritmetica. L'architetto è ancora visto, nella scia di Platone ma anche e soprattutto di Vitruvio, come persona di ingegno e cultura pure matematica. Il criterio che Alberti pone a fondamento della bellezza di un edificio (nel capitolo quinto del libro nono) è la *concinnitas*, da intendersi come accordo armonico delle parti tra loro e con tutto. Questa *concinnitas* consiste a sua volta di tre fattori: *numerus*, *finitio* e *collocatio*, cioè rispettivamente numero (come parametro di misura), definizione (come proporzione



Galleria Nazionale delle Marche, Urbino



Walters Art Museum, Baltimora



Gemäldegalerie, Berlino

delle forme) e collocazione (come controllo dell'equilibrio tra le parti). Aritmetica e geometria tornano di conseguenza quali fondamenti indispensabili dell'architettura e dello spirito nella città ideale.

c) La città delle regole

Le leggi matematiche, però, possono diventare soffocanti, simbolo non più di equilibrio e utopia, ma di oppressione. Nel suo romanzo distopico *Blocchi* del 1931 [Bo], lo scrittore olandese Ferdinand Bordewijk (1884-1965) presenta un terribile stato totalitario, dove tutto è regolato e, di conseguenza, non c'è spazio di libertà. I cittadini sono privati di nome e cognome e ridotti a numeri, come in un carcere. I blocchi del titolo corrispondono poi ai parallelepipedi che definiscono e squadrano non solo strade ed edifici, ma anche i comportamenti di chi ci abita. Aritmetica e geometria intervengono ancora, ma per simboleggiare vessazione e schiavitù.

Tuttavia la stessa matematica, in altra forma, diventa in quel mondo l'emblema opposto della rivolta. Sappiamo bene, infatti, che la circonferenza e più in generale tutti i contorni curvilinei hanno da sempre colpito l'occhio e la mente umani per la loro sfuggevolezza, la resistenza a ogni tentativo di ingabbiarli in reticoli poligonali. Altrettanto può dirsi del cerchio e dei solidi curvi rispetto ai parallelepipedi e ai poliedri. Ebbene, anche in *Blocchi* la rotondità diventa sinonimo di incalcolabilità, quindi di inafferrabilità e di eterodossia. La geometria delle curve è simbolo di libertà.

Il manifesto di Boris Bilinsky per *Metropolis*
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1927_Boris_Bilinski_(1900-1948)_Plakat_f%C3%BCr_den_Film_Metropolis,_Staatliche_Museen_zu_Berlin.jpg

Forse *Blocchi*, per quanto disponibile in edizione italiana, non è tra le opere letterarie più diffuse e famose. Ma la città di Bordewijk richiama un analogo, celeberrimo modello, precedente solo di pochi anni: la *Metropolis* del film del 1927 di Fritz Lang (1890-1976). Ispirata al regista tedesco da un viaggio a New York e dalla visione di luci e grattacieli, diventa però con i suoi edifici cupi e opprimenti un nuovo emblema di sopraffazione, come ben sottolinea il manifesto preparato per la pellicola dallo scenografo Boris Bilinsky. Semmai, rispetto a *Blocchi*, il profilo della città lascia stavolta filtrare qualche timida parvenza di arco curvilineo. Ma l'impressione decisamente prevalente è la stessa. Del resto anche nel film i proletari schiavizzati si muovono meccanicamente, tutti allo stesso modo, con la rigidità degli automi.

d) La città scacchiera

La vita, istruzioni per l'uso [Pe] è un romanzo del 1978 di Georges Perec, uno scrittore quasi contemporaneo di Calvino, di soli 13 anni più giovane (1936-1982). Perec è stato uno dei principali esponenti di quel movimento letterario francese, l'Oulipo, Ouvroir de Littérature Potentielle, cui pure Calvino aderì. Questo "laboratorio di letteratura potenziale" propugnava una nuova forma di scrittura, insofferente delle convenzioni passate e imperniata invece su nuovi vincoli formali, di carattere anche matematico e combinatorio. Riteneva infatti che queste limitazioni potessero stimolare le abilità linguistiche, e dunque paradossalmente la creatività e l'espressività. Per esempio, Perec praticò nella sua opera l'esercizio del lipogramma, ovvero la composizione di scritti anche lunghissimi, ma privi di una o più vocali – una costrizione stranissima, che però evidentemente richiede, per essere realizzata, un eccezionale virtuosismo e una piena padronanza delle parole.

All'interno delle *Lezioni americane* [Ca3], Calvino si sofferma proprio su *La vita, istruzioni per l'uso*, che definisce un "*iperromanzo*", "*l'ultimo vero avvenimento nella storia del romanzo*", luogo "*d'infiniti universi contemporanei in cui tutte le possibilità vengono realizzate in tutte le combinazioni possibili*".

In effetti l'ambiente della storia si potrebbe chiamare non dico una città, ma un iper-condominio: un mega-condominio parigino di 10 piani, ciascuno suddiviso in 10 stanze. Se si immagina di togliere al caseggiato la sua facciata, ecco che, *"dal pianterreno alle soffitte, tutte le stanze che sulla parte anteriore dell'edificio* [diventano] *immediatamente e simultaneamente visibili"*, formando una scacchiera 10×10 con 100 caselle. Nel suo racconto, Perec visita successivamente queste stanze secondo la regola del percorso del cavallo, cioè spostandosi ogni volta col movimento a elle del corrispondente pezzo degli scacchi.

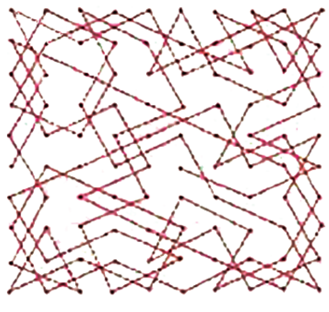
Ricordiamo che un tale itinerario si chiama chiuso se, arrivato all'ultima casella, consente con un analogo movimento di tornare alla prima, e aperto altrimenti. È noto che per scacchiere 10x10 un giro di questo genere è sempre possibile, perfino nella versione chiusa. Anzi, le soluzioni sono molteplici. Nel romanzo, Perec ne propone una aperta, che racconta di aver elaborato lui stesso in modo *"miracoloso"*, dopo ripetuti tentativi ed errori. La vediamo rappresentato dal grafo in rosso nella figura che segue. I numeri a sinistra ribadiscono l'ordine con cui si percorrono le varie stanze, dalla prima (all'incrocio della riga 6 con la colonna 6) all'ultima (ancora riga 6, ma colonna 1). In verità una delle caselle – quella in basso a sinistra, corrispondente a una cantina – viene omessa nel racconto, così che quelle effettivamente coinvolte sono 99: commenta allora Calvino che *"questo libro ultracompiuto lascia intenzionalmente un piccolo spiraglio all'incompiutezza"*.

Tralascio qui le altre svariate sottigliezze combinatorie sparse per il romanzo. Noto soltanto che l'iper-condominio di Perec e i personaggi che lo animano rispondono di nuovo a una legge matematica precisa, appunto quella del giro del cavallo; ma che l'itinerario che ne deriva non sembra seguire alcuna razionalità né ispirare alcun equilibrio; d'altra parte non si può nemmeno definire casuale, visto che è pur sempre dettato dalla logica – la quale però è incomprensibile, come per molti versi la moderna vita civile e certamente quella condominiale.

A proposito di città scacchiera, non si può dimenticare Atrani, città rappresentata da Maurits Cornelis Escher (1898-1972) nelle sue xilografie, specificamente *Metamorphosis II* del 1939-40 e *Metamorphosis III* del 1967-68. In esse il dedalo inestricabile di vicoli e saliscendi del borgo sulla costiera di Amalfi fluisce lentamente nel mare-scacchiera e nella sua apparente regolarità. Un matematico appassionato di scacchi può poi domandarsi come sta evolvendo la partita che Escher disegna sulla superficie marina. Aggiungo allora che dalla disposizione dei vari pezzi risulta che il re bianco si trova sotto scacco e che il nero vince in due mosse.

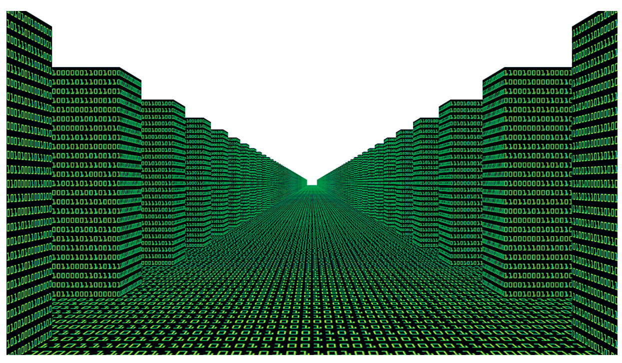
e) La città complessa

In tempi recentissimi, Luís Bettencourt, fisico teorico e professore di Ecologia ed Evoluzione a Chicago, è tornato [Be1, 2] sull'idea della città come grafo – non più però riferito a un singolo caseggiato, ma piuttosto a un'intera megalopoli. Quest'ultima è di nuovo vista non solo dal punto di vista architettonico ma soprattutto da quello sociale, quale luogo di rapporti tra individui. Il termine di paragone allora non è più una scacchiera, ma un modello ben più complicato, come la moderna Internet. La città è quindi considerata, in termini matematici astratti, come un sistema complesso, analogo a quelli che le scienze della comunicazione e dell'informazione cercano di gestire per i computer. Oppure, per usare i termini del futuro, come un cyberspazio.



59	83	15	10	57	48	7	52	45	54
97	11	58	82	16	9	46	55	6	51
84	60	96	14	47	56	49	8	53	44
12	98	81	86	95	17	28	43	50	5
61	85	13	18	27	79	94	4	41	30
99	70	26	80	87	1	42	29	93	3
25	62	88	69	19	36	78	2	31	40
71	65	20	23	89	68	34	37	77	92
63	24	66	73	35	22	90	75	39	32
	72	64	21	67	74	38	33	91	76

Il percorso del cavallo di Georges Perec



Città nel cyberspazio. Immagine tratta da
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Einblick_in_die_Cyberwelt_20220910_003.png

3. – Città invisibili

Anche le *Città invisibili* [Ca2] sono per Calvino una rete "*entro la quale si possono tracciare molteplici percorsi e ricavare conclusioni plurime e ramificate*". Diventa quindi legittimo esplorarle alla ricerca di connotazioni matematiche. Seguo in proposito semplicemente il mio gusto personale, così che le mie scelte sono largamente opinabili. Provo comunque a segnalare ancora 5 città, che per motivi diversi mi sembrano soddisfare l'obiettivo e che anzi a questo fine mi permetto di riclassificare nel modo che segue:

a) Fillide, la città del grafo e dell'ellissi,
b) Fedora, la città dell'infinito,
c) Andria, la città pitagorica,
d) Perinzia, la città dell'astrologia,
e) Bauci, la città del pensiero.

Per scrupolo ricordo che, nella ripartizione canonica originaria di Calvino, Bauci e Fillide appartengono alla sezione "le città e gli occhi", Perinzia e Andria a "le città e il cielo", Fedora finalmente a "le città e il desiderio".

a) La città del grafo e dell'ellissi

Fillide, anzitutto. La quale, agli occhi del visitatore che la raggiunge la prima volta, è città lussureggiante di architettura e fantasia, di grafi e design; ma a quelli di chi vi rimane, diviene città di ellissi, elisioni e omissioni. Viene allora da paragonarla a una matematica applicata che, se si lega troppo alla realtà e si allontana troppo dalle sue radici astratte, smarrisce pure la sua identità e diventa un grafo di soli punti e ricordi, senza archi, né legami.

> *Giunto a Fillide, ti compiaci d'osservare quanti ponti diversi uno dall'altro attraversano i canali: ponti a schiena d'asino, coperti, su pilastri, su barche, sospesi, con i parapetti traforati; quante varietà di finestre s'affacciano sulle vie: a bifora, moresche, lanceolate, a sesto acuto, sormontate da lunette o da rosoni; quante specie di pavimenti coprano il suolo: a ciottolo, a lastroni, d'imbrecciata, a piastrelle bianche e blu. In ogni suo punto la città offre sorprese alla vista: un cespo di capperi che sporge dalle mura della fortezza, le statue di tre regine su una mensola, una cupola a cipolla che tre cipolline infilzate sulla guglia. "Felice chi ha ogni giorno Fillide sotto gli occhi e non finisce mai di vedere le cose che contiene", esclami, col rimpianto di dover lasciare la città dopo averla solo sfiorata con lo sguardo. Ti accade invece di fermarti a Fillide e passarvi il resto dei tuoi giorni. Presto la città sbiadisce ai tuoi occhi, si cancellano i rosoni, le statue sulle mensole, le cupole. Come tutti gli abitanti di Fillide, segui linee a zigzag da una via all'altra, distingui zone di sole e zone d'ombra, qua una porta, là una scala, una panca dove puoi posare il cesto, una cunetta dove il piede inciampa se non ci badi. Tutto il resto della città è invisibile. Fillide è uno spazio in cui si tracciano percorsi tra punti sospesi nel vuoto, la via più breve per raggiungere la tenda di quel mercante evitando lo sportello di quel creditore.*

b) La città dell'infinito

Segue Fedora: la si potrebbe definire appunto la città dell'infinito matematico. Al suo centro, infatti, sono esposte delle sfere, che ospitano sue riproduzioni in scala ridotta, nelle quali, viene facile inferire, compaiono altri centri con altre sfere e altri modelli, e via dicendo, in un'eco senza fine, che richiama il procedimento logico di regresso all'infinito. Con una particolarità, però: Marco Polo riferisce che i modelli racchiusi nelle sfere rappresentano le Fedore alternative alla città reale esistente, quelle che avrebbero potuto essere e non sono. Così Fedora diviene la città del possibile e dell'impossibile, perché la sua versione "reale" è in costante "fieri", e le sue concorrenti sono progressivamente scartate. La sua condizione sembra richiamare allora la visione della matematica riferita da Robert Musil (1880-1942) in [Mu], come di *"una meravigliosa apparecchiatura spirituale fatta per pensare in anticipo tutti i casi possibili"*.

Matematicamente parlando, si schiude poi addirittura una sorta di albero di Fedora: i suoi nodi sono le città reale e alternative; ogni nodo genera i modelli che stanno esposti al suo centro, che possiamo immaginare tutti diversi tra loro, non solo in ogni singolo livello, ma per l'intero albero. Viene allora da chiedersi quanti essi siano complessivamente, e quanti i rami dell'albero che essi formano. La risposta che ci arriva dalla teoria dei numeri cardinali di Cantor è: sono due distinte infinità, numerabile la prima, più che numerabile la seconda.

> *Al centro di Fedora, metropoli di pietra grigia, sta un palazzo di metallo con una sfera di vetro in ogni stanza. Guardando dentro ogni sfera si vede una città azzurra che è il modello di un'altra Fedora. Sotto le forme che la città avrebbe potuto prendere se non fosse, per una ragione o per l'altra, diventata come oggi la vediamo. In ogni epoca qualcuno, guardando Fedora qual era, aveva immaginato il modo di farne la città ideale, ma mentre costruiva il suo modello in mu-*

ratura già Fedora non era più la stessa di prima, e quello che fino a ieri era stato un suo possibile futuro ormai era solo un giocattolo in una sfera di vetro. [...] Nella mappa del tuo impero, o grande Kan, devono trovar posto sia la grande Fedora di pietra sia le piccole Fedore nelle sfere di vetro. Non perché tutte ugualmente reali, ma perché tutte solo presunte. L'una racchiude ciò che è accettato come necessario mentre non lo è ancora; le altre ciò che è immaginato come possibile e un minuto dopo non lo è più.

Tra l'altro, una città con infinite copie, o comunque una città infinita risolverebbero automaticamente ogni problema di sovrappopolazione. Tutti conoscono l'argomento dell'albergo di Hilbert [ES, volume 3, p. 730], l'hotel con infinite stanze, che riesce ad accogliere nuovi clienti anche quando è già pieno: basta che l'ospite della camera 1 si sposti nella 2, quello della 2 nella 3, e ognuno in quella successiva, in modo da liberare la stanza 1 per l'ultimo arrivato. Nella lezione del 1924 in cui parla dell'albergo, però, David Hilbert (1862-1943) accenna pure al caso di un *"mondo con un numero infinito di case"*, nel quale, per analoghi motivi, *"non ci sarebbe carenza di alloggi"*.

c) La città pitagorica

Andria, invece, è città pitagorica, universale, astronomica, calcolata a immagine del firmamento e perciò presumibilmente equilibrata e perfetta. Non fissa e cristallizzata, però, non immutabile né ingessata nella sua perfezione, ma aperta a novità ed evoluzioni così come gli astri del cielo. Per certi versi gli astronomi che l'hanno costruita richiamano il *Giuoco delle perle di vetro* di Hermann Hesse (1877-1962) e la società di sapienti di cui quel libro ci racconta: severa e ascetica, volta a guidare l'umanità con l'aiuto della matematica.

Con tale arte fu costruita Andria, che ogni sua via corre seguendo l'orbita d'un pianeta e gli edifici e i luoghi della vita in comune ripetono l'ordine delle costellazioni e la posizione degli astri più luminosi: Antares, Alpheratz, Capella, le Cefeidi. Il calendario della città è regolato in modo che lavori e uffici e cerimonie si dispongono in una mappa che corrisponde al firmamento in quella data: così i giorni in terra e le notti in cielo si rispecchiano. [...]
Gli astronomi scrutano coi telescopi dopo ogni mutamento che ha luogo in Andria, e segnalano l'esplosione d'una nova, o il passare dall'arancione al giallo d'un remoto punto del firmamento, l'espandersi di una nebula, il curvarsi d'una spira della via lattea. Ogni cambiamento implica una catena d'altri cambiamenti, in Andria come tra le stelle: la città e il cielo non restano mai uguali.
Del carattere degli abitanti d'Andria meritano di essere ricordate due virtù: la sicurezza in se stessi e la prudenza. Convinti che ogni innovazione nella città influisca sul disegno del cielo, prima d'ogni decisione calcolano i rischi e i vantaggi per loro per l'insieme delle città e dei mondi.

d) La città dell'astrologia

Perinzia sembra assomigliare ad Andria: pure essa programmata dagli astronomi. O forse, dovremmo dire, dagli astrologi. Perinzia, infatti, è costruita e calcolata non a immagine e specchio del cielo, come Andria, ma secondo le predizioni degli astri e i numeri che le interpretano, per garantirle così il futuro più prospero e armonioso. Ma talora gli astrologi sbagliano e gli astri ingannano, e Perinzia diventa allora la città dell'errore e dell'orrore.

Chiamati a dettare le norme per la fondazione di Perinzia gli astronomi stabilirono il luogo e il giorno secondo la posizione delle stelle, tracciarono le linee incrociate del decumano e del cardo orientate l'una come il corso del sole e l'altra come l'asse attorno a cui ruotano i cieli, divisero la mappa secondo le dodici case dello zodiaco in modo che ogni tempio e ogni quartiere ricevessero il giusto influsso dalle costellazioni opportune, fissarono il punto delle mura in cui aprire le porte prevedendo che ognuna inquadrasse un'eclisse di luna nei prossimi mille anni. Perinzia – assicurarono – avrebbe rispecchiato l'armonia del firmamento; la ragione della natura e la grazie degli dei avrebbero dato forma ai destini degli abitanti.
Seguendo con esattezza i calcoli degli astronomi, Perinzia fu edificata [...]
Nelle vie e piazze di Perinzia oggi incontri storpi, nani, gobbi, obesi, donne con la barba. Ma il peggio non si vede; urli gutturali si levano dalle cantine e dai granai, dove le famiglie nascondono i figli con tre teste o con sei gambe.
Gli astronomi di Perinzia si trovano di fronte a una difficile scelta: o ammettere che tutti i loro calcoli sono sbagliati e le loro cifre non riescono a descrivere il cielo, o rivelare che l'ordine degli dei è proprio quello che si rispecchia nella città dei mostri.

e) La città del pensiero.

Bauci, infine: la città tra le nuvole, quindi dell'astrazione, della trascendenza, del pensiero puro, raffinato e aristocratico. Appartata e quasi timorosa di contaminazioni. In questo è l'immagine più adeguata della matematica pura, che proprio per natura è invisibile, immateriale, inafferrabile. Qui l'accostamento immediato che viene alla mente è con l'isola di Laputa dei viaggi di Gulliver e di Jonathan Swift (1667-1745): essa pure città di matematici, seppur tronfi e distratti [Sw]. Oppure con Robert Musil e ancora *L'uomo matematico* [Mu], dove pure echeggia l'idea di una matematica sospesa miracolosamente nel cielo della teoria, appesa ad assiomi e principi che neppure lei sa controllare e verificare. Ecco il testo di Musil: il riferimento evidente è alla crisi dei fondamenti della matematica di inizio Novecento.

> *Ma a un tratto, quando ogni cosa era stata realizzata per il meglio, saltano su i matematici – quelli che si lambiccano il cervello più vicino alle fondamenta – e si accorgono che nelle basi di tutta la faccenda c'è qualcosa che non torna. Proprio così, i matematici guardarono giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria. [...] Insomma, si è costretti ad ammettere che la nostra esistenza è un pallido fantasma. Noi la viviamo, ma soltanto sulla base di un errore; senza di esso non esisterebbe. Solo il matematico, oggi giorno, può provare sensazioni così fantastiche.*

Ed ecco invece la descrizione che di Bauci ci consegnano Marco Polo e Calvino.

> *Dopo aver marciato sette giorni attraverso boscaglie, chi va a Bauci non riesce a vederla ed è arrivato. I sottili trampoli che si alzano dal suolo a gran distanza l'uno dall'altro e si perdono sopra le nubi sostengono la città. Ci si sale con scalette. A terra gli abitanti si mostrano di rado: hanno già tutto l'occorrente lassù e preferiscono non scendere. Nulla della città tocca il suolo tranne quelle lunghe gambe da fenicottero a cui si appoggia e, nelle giornate luminose, un'ombra traforata e angolosa che si disegna sul fogliame. Tre ipotesi si dànno sugli abitanti di Bauci: che odino la Terra; che la rispettino al punto d'evitare ogni contatto; che la amino com'era prima di loro e con cannocchiali e telescopi puntati in giù non si stanchino di passarla in rassegna, foglia a foglia, sasso a sasso, formica per formica, contemplando affascinati la propria assenza.*

4. – La città del tutto e la città del dubbio

In verità nell'opera di Calvino incontriamo un'altra città sospesa nel cielo. È quella che compare nella *Storia dell'indeciso*, racconto de *La taverna dei destini incrociati* [Ca1]. Il protagonista, l'*indeciso* del titolo, è un giovane irresoluto e titubante che, di fronte ai dilemmi della vita, non sa scegliere, non si sbilancia ma abdica e rinuncia. Gli compare però una città, essa pure, come Bauci, alta nel cielo, apparentemente *"in equilibrio in cima a una piramide"* come *"la vetta di un grande albero"*, *"una città sospesa sui rami più alti come un nido d'uccelli, con le fondamenta pendule come le radici aeree di certe piante che crescono in cima ad altre piante"*: di nuovo, un'immagine che richiama la matematica *"regina delle scienze"*, capace di astrarre col pensiero là dove le discipline consorelle, cioè le scienze naturali, si arrestano nella loro osservazione del mondo.

> – *Che città è questa?* – tanto scrive Calvino, e tanto si presume che il giovane si domandi e chieda a un angelo che lo guida – *È la Città del Tutto? È la città dove tutte le parti si congiungono, le scelte si bilanciano, dove si riempie il vuoto che rimane tra quello che ci s'aspetta dalla vita e quello che ci tocca? [...]*
> *— La tua, — migliore risposta non avrebbe potuto ricevere, — qui troverai quello che chiedi.*

Ma nel giovane l'irresolutezza nuovamente prevale.

> *Il giovane, basta guardarlo per capire che si sente un'altra volta perduto [...]. Dunque pure nella Città del Tutto si è ammessi soltanto attraverso una scelta e un rifiuto, accettando una parte e rinunciando al resto? Tanto vale che lui se ne vada com'è venuto [...].*

Si potrebbe ipotizzare che, parlando di questa Città del Tutto, Calvino si ispiri alle teorie fisiche del tutto e alla loro ambizione di spiegare con un'unica chiave tutti i fenomeni nella natura. Tornando però ai nostri obiettivi ben più modesti, possiamo davvero domandarci se, a prescindere dalle esitazioni del protagonista del racconto, non sia proprio la matematica l'esemplificazione più appropriata di questa città assoluta. Ma, come Musil insinua e come i teoremi di incompletezza di Gödel provano, la matematica non sa costituirsi come sistema completo, immune da ambiguità e incertezze, non ha questo potere supremo di conoscenza, sintesi ed equilibrio. Perfino nell'apparentemente banale aritmetica – la teoria dei numeri naturali con le operazioni di addizione e moltiplicazione – ogni tentativo umano e coerente di assiomatizzazione si imbatte in proposizioni che non sa né dimostrare né confutare.

Così perfino la matematica appare città del dubbio e non del tutto: città indecidibile, se non proprio invisibile.

5. – Matematica apolide

Problemi matematici è il titolo della celebre conferenza che David Hilbert tenne a Parigi nel 1900 durante il secondo congresso internazionale dei matematici, come pure del saggio che poi ne trasse [Hi]. È al suo interno che compare la famosa lista di 23 problemi, che l'autore, uno dei massimi matematici della sua epoca, riteneva i principali della matematica del suo tempo. Ma, prima di questo "elenco", il testo propone anche una bellissima riflessione sul senso dei problemi in matematica e in ogni scienza. Sostiene Hilbert che una scienza già stabilita, assoluta, conclusa, incapace di porsi nuovi interrogativi è per ciò stesso morta:

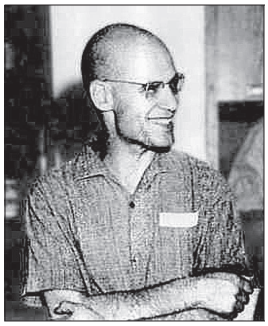
> *Un campo della conoscenza è vitale, finché offre un'abbondanza di problemi; una scarsità di problemi significa la sua morte o la fine del suo sviluppo autonomo. Come in generale ogni umana iniziativa persegue degli obiettivi, così la ricerca matematica ha bisogno di problemi. Risolvendo problemi, si tempra la forza del ricercatore: egli trova nuovi metodi e nuove prospettive, e conquista un orizzonte più ampio e più libero.*

Mi soffermo su quest'ultimo accenno a nuovi orizzonti e sull'immagine che ne deriva, di una matematica dinamica e inappagata – come dire, per tornare all'argomento di questa nota, di una matematica la cui città costantemente si allarga, si affina e progredisce, se non addirittura di una matematica che non si può comprimere e racchiudere in alcuna città e che dunque è apolide.

Tra l'altro il brano citato di Hilbert, e la ricerca inesausta della "verità" che esso sollecita, trovano un'eco singolare nei dialoghi tra Marco Polo e l'imperatore nelle *Città invisibili*:

> *– [...] D'una città non godi le sette o le settantasette meraviglie, ma la risposta che dà a una tua domanda.*
> *– O la domanda che ti pone obbligandoti a rispondere [...]* (2)

Alexander Grothendieck (1928-2014) è stato un grandissimo matematico del Novecento, genio innovatore e irrequieto. Francese, stavo per scrivere. Avrei sbagliato, perché fu apolide, non solo nel senso figurato, in quanto scienziato curioso e inesausto, ma anche in quello letterale: privo di cittadinanza.



Alexander Grothendieck
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alexander_Grothendieck.jpg

Russo da parte del padre (che fu una delle vittime di Auschwitz), tedesco da parte della madre (di cui assunse il cognome), berlinese di nascita, francese per adozione, avversò tuttavia il mito stesso di nazione e coerentemente rifiutò ogni cittadinanza di riferimento.

Del suo carattere anticonformista e delle sue scoperte matematiche parla brevemente anche un recente libro di successo, *Quando abbiamo smesso di capire il mondo*, di Benjamín Labatut [La]. Ricordiamo anche, qualche anno fa, [Cr]. A noi però Grothendieck interessa soprattutto come scrittore, autore di una sorta di autobiografia sconfinata inedita in Italia: *Récoltes et semailles*, quindi *Raccolte e semine* [Gr]. Al suo interno, egli distingue anche tra due modi diversi di concepire e vivere la missione di matematico, e più in generale di scienziato, raffigurandoli con le immagini contrapposte dell'erede e del costruttore.

La prima racchiude la maggioranza dei matematici che, nati e cresciuti in un universo scientifico già predisposto e organizzato, in una città già salda e rassicurante, vi sviluppano di conseguenza con diligenza e talora destrezza le loro ricerche. Assomigliano appunto agli *"eredi di una casa grande e bella tutta sistemata"*, che non si preoccupano di come e perché questa casa si è costruita gradualmente negli anni, in un modo invece che in un altro: la trovano *"familiare"*, la ritengono *"immutabile"*, magari ogni tanto si danno da fare per decorarla e impreziosirla, o addirittura per ristrutturarla, ma nulla di più.

Accanto a questi matematici *"casalinghi"*, a questi *"conservatori"*, ce ne sono però altri *"la cui vocazione spontanea e la cui gioia sono quelle di costruire case sempre nuove"* – e città sempre nuove. I costruttori appunto, o anche i pionieri e gli esploratori, come il Marco Polo calviniano: gli *"innovatori"*. Sono una minoranza. Tra di loro Grothendieck include, oltre a se stesso, Hilbert, Riemann e, più di tutti, Galois – cui

---

(2) "[...] *più vado avanti più mi rendo conto che il momento dell'arrivo non è il vero fine*": così aveva scritto ancora Calvino, o meglio il suo guidatore notturno, nel racconto con questo titolo in *Ti con zero* [Ca4].

si sente più affine, se non per la "nazionalità", certo per il talento e l'inquietudine. Il loro posto non è nella "*tranquillità degli universi preconfezionati, per quanti accoglienti e armoniosi possano essere*". Il loro posto è all'aria aperta, al vento, per anticipare bisogni che forse sono gli unici a presentire.

Non che la casa degli eredi e la città dei matematici casalinghi siano brutte o scostanti; al contrario, assomigliano forse a quelle ideali del Rinascimento. Ma la città dei matematici pionieri è perennemente mutevole, e quindi nella sostanza non esiste. Essi sono nomadi nello spirito. Non hanno patria perché cercano sempre nuove patrie.

Nota. Questo articolo riprende, collega ed estende due note per la rubrica Mateletteratura del mensile *Prisma*: una su Calvino, pubblicata in un dossier nel numero di settembre 2023, l'altra su Grothendieck, nel numero di dicembre 2023.

BIBLIOGRAFIA

[Al] L. B. ALBERTI, *L'architettura [De re aedificatoria]*, Edizioni Il Polifilo, Milano, 1966

[Ba] A. BATTISTINI, *Tarocchi, cristalli e partite a scacchi: la narrativa di Italo Calvino tra arte combinatoria e tensione conoscitiva*, in: P. Maroscia – C. Toffalori – F. S. Tortoriello – G. Vincenzi (a cura di), *Letteratura e matematica. Spiragli di infinito*, UTET-De Agostini, Novara, 2019, pp. 77-102

[Be1] L. M. A. BETTENCOURT, *Introduction to urban science: evidence and theory of cities as complex systems*, MIT Press, Cambridge MA, 2021

[Be2] L. M. A. BETTENCOURT, *Why the Internet Must Become More Like a City*, in: *The Crisis of Democracy in the Age of Cities*, Edward Elgar Publishing, Ed. Juval Portugali, in corso di stampa; Mansueto Institute for Urban Innovation Research Paper 29, 2022

[Bi] G. I. BISCHI, Italo Calvino, ipotenusa fra culture ortogonali, *Matematica, cultura e società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 8-2 (2023), pp. 123-139

[Bo] F. BORDEWIJK, *Blocchi*, Bompiani, Milano, 2002

[Bu] M. BUCCIANTINI, *Pensare l'universo. Italo Calvino e la scienza*, Donzelli, Roma, 2023

[Ca] I. CALVINO, *Romanzi e racconti*, 3 voll., a cura di M. Barenghi e B. Falcetto, i Meridiani, Mondadori, Milano, vol. 1 1991, vol. 2 1992, vol. 3 1994

[Ca1] I. CALVINO, *Il castello dei destini incrociati*, Mondadori, Milano, 2023

[Ca2] I. CALVINO, *Le città invisibili*, Mondadori, Milano, 2022

[Ca3] I. CALVINO, *Lezioni americane*, Mondadori, Milano, 2022

[Ca4] I. CALVINO, *Ti con zero*, Mondadori, Milano, 2023

[Cr] A. CARIOTI (a cura di), *Matematica ribelle: le due vite di Alexander Grothendieck*, Corriere della Sera, Milano, 2014

[Er] ERODOTO, *Le Storie. Libri I-II. Lidi, Persiani, Egizi*, Garzanti, Milano, 2006

[Es] ESCHILO, *I Persiani*, Feltrinelli, 2014

[ES] W. EWALD – W. SIEG, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2013

[Gi] S. GIOVANNI, *Apocalisse*, in: *La Bibbia di Gerusalemme*, Edizioni Dehoniane, Bologna, 1990, pp. 2623-2660

[Giu] *Giuditta*, in: *La Bibbia di Gerusalemme*, Edizioni Dehoniane, Bologna, 1990, pp. 889-912

[Gr] A. GROTHENDIECK, *Récoltes et semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Gallimard, Paris, 2022

[Hi] D. HILBERT, *Problemi matematici*, in: *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V. M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1985, pp. 145-162

[La] B. LABATUT, *Quando abbiamo smesso di capire il mondo*, Adelphi, Milano, 2021

[Lo1] G. LOLLI, *Discorso sulla matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2011

[Lo2] G. LOLLI, Calvino e la matematica, *Matematica, cultura e società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 8-2 (2023), pp. 109-122

[Lu] S. LUCENTE, Le città invisibili, guidati da Italo Calvino nell'impero della matematica con la sacca del docente, *Ithaca: Viaggio nella Scienza* XVIII (2021), pp. 89-102

[Mu] R. MUSIL, *L'uomo matematico*, in: C. Bartocci (a cura di), *Racconti matematici*, Einaudi, Torino, 2006, pp. 187-189

[Pe] G. PEREC, *La vita, istruzioni per l'uso*, Rizzoli, Milano, 2005

[Pl] PLATONE, *Opere complete 6. Clitofonte, Repubblica, Timeo, Crizia*, Laterza, Bari, 2019

[Sw] J. SWIFT, *I viaggi di Gulliver*, Feltrinelli, Milano, 2014

Carlo Toffalori

Carlo Toffalori è stato professore di Logica Matematica presso l'Università di Camerino. Dal 2005 al 2017 è stato presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni. Dal 2012 al 2021 ha fatto parte della Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana. I suoi interessi di ricerca riguardano teoria dei modelli e algebra. Si occupa anche di divulgazione e comunicazione della matematica. Ha pubblicato a questo riguardo vari libri, tra cui Matematica, miracoli e paradossi *(con Stefano Leonesi, 2007),* Il matematico in giallo *(2008),* L'aritmetica di Cupido. Matematica e letteratura *(2011),* Numeri in giallo *(2012),* Algoritmi *(2015),* Logica a processo *(di nuovo con Stefano Leonesi, 2016) e infine, sempre per il Mulino,* L'equazione degli alef *(2019). Cura da qualche anno la rubrica di Matematica e letteratura del mensile scientifico* Prisma*.*