Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Ciro Ciliberto

Sul valore culturale della matematica

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2023), n.3, p. 221–227.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2023_1_8_3_221_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2023.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 8, N. 3, dicembre 2023, 221-227

Sul valore culturale della matematica [1]

Ciro Ciliberto
Università di Roma
E-mail: cilibert@axp.mat.uniroma2.it

Sommario: *Agli inizi del XX secolo divampò un'aspra polemica tra Benedetto Croce (e Giovanni Gentile) da una parte e Federigo Enriques (e Francesco Severi) dall'altra. Tra le altre cose, Enriques propugnava il valore sapienziale della matematica (e più in generale della scienza), da lui ritenuto uno strumento essenziale per la conoscenza, mentre Croce negava del tutto tale valore, reputando la matematica un mero strumento tecnico di supporto alle scienze applicate. A distanza di più di un secolo da quella polemica, si può dire che il punto di vista di Croce appare totalmente perdente. Il mio intervento vuole appunto sottolineare questo aspetto, mostrando con alcuni esempi come la matematica non si riduca ad un bagaglio di mere nozioni tecniche ma costituisca un profondo fenomeno culturale che è in grado di porre su solide basi la conoscenza di idee e nozioni a lungo dibattute da storici, filosofi ed epistemologi.*

Abstract: *At the beginning of the 20th century, a harsh controversy broke out between Benedetto Croce (and Giovanni Gentile) on the one side and Federigo Enriques (and Francesco Severi) on the other. Among other things, Enriques advocated the wisdom value of mathematics (and more generally of science), which he considered an essential tool for knowledge, while Croce completely denied this value, considering mathematics a mere technical tool to support the applied sciences. More than a century after that controversy, it can be said that Croce's point of view appears totally losing. This paper aims precisely at underlining this aspect, showing with some examples how mathematics is not reduced to a set of mere technical notions but consists of a profound cultural phenomenon which is capable of setting on solid foundations the knowledge of ideas and notions long-debated by historians, philosophers and epistemologists*

Nei primi anni del XX secolo (in particolare a partire dal 1908 con la recensione [11] di Giovanni Gentile dei "Problemi della scienza" [8] di Federigo Enriques, e successivamente, nel 1911 con le aspre critiche pubbliche rivolte da Benedetto Croce ad Enriques per la preparazione e la realizzazione a Bologna del IV Congresso internazionale di filosofia), divampò un'aspra polemica tra Croce, e in parte Gentile, ed Enriques, e in parte Francesco Severi (sul coinvolgimento di Severi nella disputa si veda [2]). Il conflitto aveva varie motivazioni e si sviluppava su vari fronti: uno scontro tra opposte visioni filosofiche (filosofia neoidealista di Croce e Gentile e filosofia scientifica di Enriques), una lotta per il predominio culturale e politico sulla scena intellettuale e sociale dell'Italia dell'epoca, un risvolto riguardante l'organizzazione pedagogica e didattica della scuola italiana, ecc. (vasta è la bibliografia sul contrasto di Enriques con i filosofi neodealisti, e varie ne sono le interpretazioni e le letture, si veda ad esempio [3, 19]; vasta è anche la bibliografia sulla filosofia di Enriques, si veda ad esempio [14]). Ma io non intendo soffermarmi qui su questi aspetti bensì su un altro che mi sta a cuore. Infatti, tra le altre cose, Enriques propugnava il valore sapienziale della matematica (e più in generale della scienza), da lui ritenuta uno strumento essenziale per la conoscenza. Ad esempio l'incipit del quarto capitolo dei "Problemi della scienza" (cfr. [8, p. 261]) recita:

> *Alla Geometria sembra doversi concedere un posto d'onore nel campo degli studi filosofici!*

Accettato: il 21 novembre 2023.

(1) Questo è il testo, un po' espanso, dell'intervento dallo stesso titolo da me tenuto il giorno 8 Settembre 2023 nell'ambito della sezione "Matematica tra scienza e umanesimo" del XXII Congresso UMI, tenutosi a Pisa dal 4 al 9 Settembre 2023.

Al contrario Croce negava del tutto tale valore, reputando la matematica un mero strumento tecnico di supporto alle scienze applicate. Croce sosteneva che matematica e scienza non sono vere forme di conoscenza, esse sono adatte solo agli “ingegni minuti” degli scienziati e dei tecnici, contrapponendovi le “menti universali”, cioè i pochi eletti (tra cui evidentemente collocava se stesso) in grado di capire come lo spirito si manifesti attraverso la storia (a proposito degli “ingegni minuti”, cfr. [18]). I concetti scientifici, per Croce, non sono veri e propri concetti puri ma degli *pseudoconcetti*, falsi concetti, dei meri strumenti pratici che non hanno alcun valore di verità. Croce arrivava ad affermare (in “Il risveglio filosofico e la cultura italiana”, paragrafo IV, scritto del 1908, inserito come primo capitolo in [4]):

> *Gli uomini di scienza [...] sono l’incarnazione della barbarie logica, proveniente dalla sostituzione degli schemi ai concetti, dei mucchietti di notizie all’organismo filosofico-storico.*

Croce riteneva dunque che la ricerca scientifica potesse approdare solo a una conoscenza puramente descrittiva delle cose. Appartenendo al mondo della conoscenza empirica, per definizione estranea alla metafisica, la scienza, secondo Croce, non avrebbe potuto produrre concetti “veri” nel senso che egli attribuiva alla verità. Il suo obiettivo forse non era quello di negare del tutto valore alla scienza, che nel pensiero crociano avrebbe svolto una funzione utile e necessaria al progresso dell’umanità. Croce si considerava piuttosto un severo avversario dell’idea che la metodologia di ricerca delle scienze esatte si potesse applicare alla conoscenza della verità.

Il punto del conflitto su cui intendo soffermarmi è appunto questo: la matematica ha o no un valore culturale, di conoscenza, un valore sapienziale?

Volendo discutere di questo specifico argomento del contendere tra Croce ed Enriques, occorrerebbe innanzitutto porsi la domanda: cosa è la conoscenza? cosa è la sapienza? Queste sono di per sè domande *socratiche*. Mi viene infatti da pensare al famoso dialogo “Menone” di Platone (cfr. [16]). In esso si discute fondamentalmente di cosa sia la *virtù*, non una virtù specifica, ma la virtù in generale, e se sia possibile insegnarla. Similmente possiamo chiederci cosa sia la conoscenza o la sapienza e se sia possibile insegnarle. Su questo sono stati scritti fiumi di inchiostro da parte di tanti pensatori e non ho alcuna possibilità di entrare in nessun dettaglio in merito. Mi limito a osservare che, quanto a discutere della questione se la matematica possa essere strumento di conoscenza, Croce non è solo, perché su questo argomento si sono espressi vari filosofi (a partire, come vedremo, da Platone e Aristotele, per passare per Kant e arrivare a Popper e Geymonat). In questa eletta schiera Croce occupa una posizione certamente estrema (cioè egli esclude del tutto la possibilità che la matematica possa essere strumento di conoscenza) ma non è il solo a pensarla in questo modo, come vedremo tra un attimo. Fatto sta che i rapporti tra matematica e filosofia, nonostante le origini in qualche modo comuni delle due discipline (basti pensare a Talete, Pitagora, Parmenide, Zenone, ecc., che oltre ad essere considerati i primi filosofi erano anche scienziati e in particolare matematici) non sono mai stati facili.

Ad esempio, consideriamo Platone, il cui interesse per la matematica è indiscutibile. Infatti nelle sue opere innumerevoli sono i punti in cui fa riferimento alla matematica in generale e perfino a specifici problemi matematici. In particolare, nella “Repubblica” (cfr. [17]) Platone spiega, tra l’altro, la sua visione sugli strumenti della conoscenza. Senza scendere in troppi dettagli, Platone vede come strumenti della conoscenza ad un primo livello le immagini, poi gli oggetti concreti, poi gli enti matematici e infine le idee, la cui contemplazione è per lui il sommo atto di conoscenza. Per Platone la conoscenza è un’esperienza dal valore essenzialmente etico, poiché riguarda la possibilità dell’anima di accostarsi alla visione eidetica del Bene risvegliandone in sé il ricordo. In questo quadro, la matematica per Platone è

> *... conoscenza di ciò che esiste eternamente, non di qualche cosa che viene a essere in qualche momento e cessa di essere.*

Ciò che esiste eternamente è l’insieme degli oggetti matematici, che hanno in qualche modo un riscontro nel mondo delle idee. Il seguente brano della “Repubblica”, spiega bene il valore conoscitivo della matematica per Platone:

> *E quale sarà, Glaucone, la disciplina che trascina l’anima dal divenire all’Essere? [...] quella disciplina comune di cui si servono tutte le tecniche, le opinioni intellettuali e le scienze, e che ognuno deve imparare molto presto? [...] Quella molto semplice, risposi, che*

distingue l'uno, il due e il tre: insomma, sto parlando del numero e del calcolo. [...] forse questa disciplina ci è davvero necessaria, poiché è evidente che costringe l'anima a fare uso del puro intelletto per giungere alla pura verità?

La matematica è dunque per Platone una disciplina propedeutica che forma la mente e l'anima alla filosofia, poiché la abitua alla contemplazione di ciò che è assolutamente vero. La scienza dei numeri e quella delle forme costituiscono quindi tappe essenziali per la formazione del filosofo, di colui cioè che è idoneo a contemplare la verità. Esse insegnano a staccarsi da ogni rappresentazione sensibile del mondo, dai primi due gradini della conoscenza, le immagini e le cose concrete. Ma tuttavia la matematica, e in particolare la geometria, non sono, per Platone, lo scopo ultimo della ricerca nè il vero strumento della conoscenza; il vero ed ultimo scopo rimane la conoscenza del Bene e la contemplazione delle idee che non è un'esperienza mistica ma è sempre mediata dall'uso della ragione. Quindi pur avendone grande considerazione, per Platone la matematica è sempre subordinata alla filosofia.

Ben diversa è la posizione di Aristotele. Questi, come Platone, distingue vari gradi del conoscere: al livello più basso c'è la sensazione, che ha per oggetto entità particolari, mentre a quello più alto c'è l'intuizione intellettuale, capace di "astrarre" l'universale dalle realtà empiriche. Aristotele fu il padre della logica formale, che egli teorizzò nella forma deduttiva del sillogismo. La razionalità sillogistica procede logicamente dall'universale al particolare, ma la logica deduttiva in sè non può in alcun modo garantire la verità dei princìpi primi che sono quelli da cui parte la deduzione. Ecco allora che il compito di stabilire la validità e l'universalità delle premesse, da cui il sillogismo trarrà delle conclusioni coerenti, spetta all'intelletto intuitivo. In questo quadro, differentemente da quanto avviene per Platone, la matematica è del tutto assente. Per Aristotele i matematici non fanno altro che trattare come esistente in atto ciò che non esiste che in potenza. Trattano come essere uno pseudo-essere. Questa è la definizione di Aristotele: coloro che conoscono e praticano l'aritmetica e la geometria giungono a risultati eccellenti "ponendo come separato ciò che non lo è" (cfr. [1]). La conseguenza di tale finzione è che la sostanza della matematica non può essere il vero, poiché il vero non si lascia approssimare da una finzione. La norma della matematica è invece il bello. Aristotele afferma infatti che "il bello è l'oggetto principale delle dimostrazioni matematiche" (cfr. ancora [1]). Aristotele dunque tratta forse la matematica un po' meglio di Croce: non ne considera la mera utilità, come fa Croce, ma ne sottolinea solo l'aspetto della bellezza e non la capacità di giungere alla verità né tanto meno quella di pervenire alla conoscenza. In questo dunque Croce e Aristotele hanno qualche punto in comune.

Ma torniamo al nostro tema principale, e cioè se la matematica possa essere o meno strumento di conoscenza. Per prima cosa una osservazione. La matematica, che di per sè è una scienza eminentemente astratta, nasce però da questioni estremamente concrete. Questo è testimoniato da una storia plurimillenaria. Si pensi che tra le primissime, se non proprio le prime, manifestazioni della scrittura vi sono le tavolette cuneiformi di argilla mesopotamiche che risalgono al IV millennio a.C. In esse, in risposta alle necessità quotidiane, si vede emergere per la prima volta il concetto di numero. Furono i Sumeri ad ideare un sistema a base 60 (il significato della cui origine andrebbe ancora indagato a fondo), che poi fu adottato dai Babilonesi. Questi ultimi svilupparono notevolmente le loro conoscenze matematiche in risposta ai bisogni della vita di tutti i giorni, come, per esempio, transazioni commerciali e suddivisione dei terreni. Dunque gli Assiri e i Babilonesi possedevano conoscenze dei numeri ed elementi di scienze geometriche. La geometria poi, come importante parte della matematica, si afferma definitivamente presso l'antico Egitto nel II millennio a.C. La popolazione dell'Egitto era quasi totalmente concentrata nella fertile valle del Nilo e Erodoto narra che le piene di questo fiume cancellavano ogni anno gran parte dei confini delle proprietà sulle quali gravava un tributo; si rendeva così necessaria una periodica rimisurazione dei terreni per ristabilire esattamente tali confini.

Le origini molto concrete della matematica sono dunque indiscutibili e si può ben dire che la matematica abbia dato un contributo straordinario all'affermazione della civiltà fin da tempi remotissimi, essendo perfino uno degli stimoli per la nascita stessa della scrittura.

Tuttavia la matematica, a partire dalla scienza ellenica, si esprime soprattutto attraverso l'astrazione. Come affermava Aristotele, l'astrazione è un meccanismo importante della conoscenza. Ma perché si astrae? Per due motivi basilari, tra loro diversi, ma che contribuiscono entrambi alla conoscenza. Il primo motivo è la spinta, mediante l'astrazione e dunque la sottrazione ai fenomeni di tutto ciò che è contingente, di pervenire alla comprensione dei principi primi che sono alla base degli oggetti di cui la mente umana si occupa. Il secondo motivo è che un concetto, un procedimento astratti si applicano con maggiore facilità alla risoluzione di un'ampia schiera di problemi, anzi, più astratti sono i concetti e i metodi, maggiore è lo spettro delle loro applicazioni a questioni concrete.

Quindi, il metodo dell'astrazione è proprio il procedimento principe dello sviluppo della matematica. Come tale questa disciplina si pone alle fondamenta della piramide conoscitiva dell'essere umano, dei suoi procedimenti di comprensione e di trattamento della realtà. La matematica è dunque alla base della descrizione della realtà fisica, e, per dirla con Galileo Galilei, il libro della natura è scritto "in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola" (cfr. [9]). Per essere concreti, oggi vediamo come in ogni settore della indagine scientifica la matematica, mediante la creazione di modelli astratti che si applicano a molteplici realtà (modelli climatici, modelli di diffusione delle epidemie, modelli di evoluzione di varie specie di esseri viventi, trasmissioni di messaggi, sistemi di sicurezza informatici, ecc.) giochi un ruolo essenziale nello sviluppo delle scienze e delle attività umane in generale.

Riflettiamo inoltre sul modo stesso in cui la matematica si sviluppa. Il metodo cui alludo affonda le sue origini in un passato remoto, fin dai tempi di Euclide ed anche prima, pur se ha ricevuto una definizione formale solo agli inizi del XX secolo con David Hilbert. La matematica parte da assiomi e dimostra, mediante un rigoroso ragionamento logico deduttivo, delle verità che, una volta dimostrate, risultano acquisite in maniera sicura. Per prima cosa osservo che questo è esattamente il modello di sviluppo della conoscenza che Aristotele prefigurava, anche se poi egli non riconosceva alla matematica la dignità di perseguire in maniera rigorosa questo modello. Per Aristotele le certezze iniziali indiscusse vengono acquisite mediante l'azione dell'intelletto intuitivo. Lo sviluppo logico deduttivo per Aristotele è affidato all'uso del sillogismo. In matematica le certezze iniziali vengono sostituite dagli assiomi, i procedimenti deduttivi dalle implicazioni della logica formale.

Questo quadro di sviluppo del pensiero, che si svolge attraverso premesse largamente accettate e ragionamento logico deduttivo, è un formidabile modello di produzione di verità, che ha un significato che trascende la matematica ed ha, ad esempio, anche un valore etico basilare. Come provare infatti a far funzionare i rapporti umani? Come le società più avanzate si possono muovere in tal senso? Si parte appunto da principi, convenzionali quanto si voglia, ma largamente condivisi (Dichiarazione universale dei diritti umani molto cara a Ennio De Giorgi, Carta dei diritti fondamentali dell'Unione europea, Costituzioni dei singoli stati, ecc.) che fungono da "assiomi" di un sistema etico-politico, e da essi si fanno discendere, applicando una serie di deduzioni, le leggi di ogni singola nazione o leggi sovranazionali che dovrebbero regolare la civile convivenza delle persone e dei popoli. Ecco come la matematica diviene non solo strumento produttore di verità che ben si applicano alla conoscenza del mondo reale, ma anche modello esemplare per uno sviluppo etico dei rapporti tra persone e nazioni.

Ancora un altro esempio della potenza gnoseologica della matematica è la semplicità e l'efficacia con la quale questa disciplina ha affrontato e risolto un problema spinosissimo, su cui i filosofi si sono scervellati per millenni, e cioè cosa fosse l'infinito. Per prima cosa è brillantissimo ed elegante il modo in cui il matematico Richard Dedekind, anticipando di qualche anno Georg Cantor (cfr. [6]), ha definito l'infinito (cfr. la Prefazione di [5]): un insieme è infinito se si può porre in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. L'idea, formalizzata da Dedekind, in verità appare già in un elegantissimo scritto di Galileo Galilei in [10, Giornata prima]. In esso Galileo dice al contempo due cose, una giustissima e una sbagliata, ma il suo errore, come vedremo, si può tranquillamente comprendere. Quanto alla prima affermazione, Galileo, nelle vesti del suo personaggio Salviati, mette in guardia i suoi interlocutori, Sagredo e Simplicio, dal trattare l'infinito nello stesso modo in cui trattiamo il finito:

Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito *intorno a gl'infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso sia inconveniente ...*

E qui Galileo fa un esempio che anticipa di più di due secoli Dedekind. Galileo infatti osserva che l'insieme dei numeri interi positivi è "uguale" ad una sua parte propria, cioè l'insieme di tutti i numeri interi quadrati perfetti:

Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati , si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici ...

Successivamente Galileo si interroga su un possibile paragone tra gli infiniti. Si può dire che un infinito è più grande di un altro infinito? Ritornando all'insieme dei quadrati Galileo osserva che già solo il porsi questa domanda ha in sè un trabocchetto insidioso: uno sarebbe portato a dire che l'insieme di tutti i numeri interi positivi è "più grande" dell'insieme dei quadrati perfetti perché lo include propriamente, ma, come abbiamo visto, ciò non è completamente esatto. Da ciò Galileo erroneamente conclude affermando:

... in ultima conclusione, gli attributi di eguale o maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.

Un peccato veniale quello di Galileo, ché, se avesse previsto che anche tra gli infiniti vi è una gerarchia di grandezze, come Cantor poi ci ha insegnato, sarebbe stato più di due secoli avanti nel pensiero matematico. Ci basti riconoscergli la prima idea, anche se non formalizzata, di definizione del concetto di infinito.

Come si fa ora a negare valore conoscitivo alla matematica se è l'unica disciplina che è riuscita a mettere ordine nel ginepraio dell'infinito, o meglio dei molteplici infiniti, in una maniera elegante e bella? E in questo diamo ragione ad Aristotele: la matematica *è bella*!

L'infinito è uno degli abitanti di quello che David Hilbert chiamava il "paradiso di Cantor", luogo da cui, auspicava Hilbert, nessuno avrebbe scacciato i matematici (cfr. [13]). Certo, l'opera di Cantor è immortale, e nessuno ce ne potrà privare. Ma è proprio vero che è un "paradiso"? Con tutto il rispetto per Hilbert, non credo che le cose stiano proprio così. Il paradiso di Cantor, cioè quella che noi oggi chiamiano "teoria ingenua degli insiemi", era costellato di trappole insidiosissime che si manifestarono agli inizi del XX secolo sotto forma di paradossi, o meglio di antinomie (cioè proposizioni che risultano autocontraddittorie) che mettevano a serio rischio la costruzione cantoriana. Tra queste forse la più famosa è l'antinomia di Bertrand Russell (del 1901-1902):

L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.

Si deve allora prendere atto che la collezione di questi insiemi non può essere un insieme. Una conseguenza, ancora più incisiva, è che neppure "l'insieme di tutti gli insiemi" può definirsi tale: è una collezione di oggetti, ma non un insieme. Un analogo paradosso era stato osservato dallo stesso Cantor, a proposito della "unione di tutti gli insiemi": una collezione di oggetti, ma non un insieme, perché allora avrebbe la massima cardinalità possibile, e invece l'insieme delle sue parti la ha maggiore.

L'antinomia di Russell ebbe un ruolo basilare nella crisi dei fondamenti della matematica, la quale a sua volta ebbe un peso notevole nella più ampia crisi che interessò i fondamenti della fisica, della filosofia e appunto della matematica all'inizio del XX secolo, crisi che spesso è associata al crollo delle dottrine filosofiche di stampo positivista.

Quindi Russell era stato in grado di cacciarci dal "paradiso di Cantor"? Il bello della matematica è anche questo: si tratta di una disciplina profondamente autocritica, un'autocritica che pone in evidenza i limiti stessi dei procedimenti della nostra conoscenza, e, con ciò, ci consente in parte di superarli. Un socratico "conosci te stesso" di incredibile efficacia gnoseologica.

Per quanto riguarda la teoria degli insiemi, le contraddizioni messe in luce dall'antinomia di Russell sono insolubili nell'ambito della teoria di Cantor, se non generando altri paradossi; per superare questo scoglio furono elaborate diverse teorie assiomatiche più rigorose: quella che ha avuto più seguito è stata la teoria degli insiemi ZF di Zermelo-Fraenkel, formulata inizialmente da Ernst Zermelo e perfezionata da Abraham Fraenkel e Thoralf Skolem che, con le successive estensioni (ad esempio, la teoria ZFC, che è l'ampliamento della teoria ZF con l'assioma della scelta), fornisce tutt'ora la base teorica per la maggior parte delle costruzioni matematiche. La vecchia teoria degli insiemi (peraltro ancora largamente utilizzata a livello scolastico e divulgativo ed anche in alcune aree della ricerca matematica, pura e applicata) viene chiamata "teoria ingenua" degli insiemi, in contrapposizione alla teoria assiomatica degli insiemi. Quindi alla fin fine, con opportuni perfezionamenti, il paradiso di Cantor è ancora a nostra disposizione.

Ma è proprio così? Beh, in parte sì, in parte no. Infatti il matematico e logico austriaco Kurt Gödel nel 1931 diede un contributo decisivo alla questione della coerenza dell'edificio della matematica, dimostrando l'impossibilità tout court di produrre una fondazione certa dell'aritmetica. I suoi risultati, dimostrati quasi contemporaneamente anche da John von Neumann (si veda [7, p. 70]), sono enunciati in due famosi teoremi di incompletezza (cfr. [12]).

Con qualche semplificazione, il primo teorema di incompletezza afferma che: "in ogni formalizzazione coerente e umanamente accessibile della matematica che sia sufficientemente potente da poter assiomatizzare la teoria elementare dei numeri naturali – vale a dire, sufficientemente potente da definire la struttura dei numeri naturali dotati delle operazioni di somma e prodotto – è possibile costruire una proposizione sintatticamente corretta che non può essere né dimostrata né confutata all'interno dello stesso sistema". Il secondo teorema di incompletezza si può considerare come un completamento del primo. Semplificando al massimo esso dice che: "nessun sistema che sia coerente, umanamente accessibile e abbastanza espressivo da formalizzare l'aritmetica (con qualche ipotesi ulteriore), può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza".

Dunque il primo teorema afferma che ogni formalizzazione umana dell'aritmetica risulta incompleta: vi sono cioè, nel suo ambito, delle proposizioni di cui non è possibile dimostrare nè che sono vere nè che sono false. Il secondo teorema afferma che, se pretendiamo di lavorare con i numeri interi, possiamo farlo, ma non possiamo al contempo pretendere di verificare che il sistema di assiomi su cui ci basiamo sia coerente.

Questi risultati fondamentali esprimono uno dei più discussi limiti della matematica. Essi illustrano in maniera lampante come questa disciplina sia in grado non solo di esibire una potenza indiscutibile nella comprensione di concetti profondi come l'infinito così come nella descrizione della realtà, ma anche la capacità di mettere in evidenza i limiti stessi della logica formale su cui si basa. Questi teoremi sono in sostanza un'asserzione fondamentale sul modo di pensare degli esseri umani, un elemento di conoscenza profonda dei nostri stessi procedimenti logici e gnoseologici.

Ho voluto qui dare solo alcuni esempi, tutt'altro che esaustivi, della potenza del pensiero matematico e della sua efficacia per quanto riguarda i meccanismi della conoscenza, in particolare della critica della conoscenza stessa, affrontata in termini precisi e rigorosi. D'altra parte il valore culturale della matematica è testimoniato dalla sua stessa storia che l'ha vista da sempre accompagnare tutti gli sviluppi più significativi della nostra civiltà.

Secondo me la matematica e i matematici, Enriques probabilmente in testa, non pretendono affatto di essere in grado di attingere alla conoscenza del Bene (come indicava Platone) o, peggio, alla comprensione dello Spirito che si realizza nella storia (cui si riferiva Croce), ammesso che tale spirito abbia davvero un senso. Io inoltre non penso affatto che *solo* attraverso la matematica si arrivi alla conoscenza, ma sono convinto, sulle orme di Platone, che senza la matematica non si può arrivare alla conoscenza, cioè la matematica è essenziale per la conoscenza, soprattutto di quella della nostra stessa psicologia cognitiva, e questo non è cosa da poco, visto che Socrate poneva appunto la conoscenza di se stessi alla base della sua filosofia.

Termino citando qui uno scienziato illustre, non un matematico ma un fisico che con la matematica ha grande dimestichezza, il premio Nobel Giorgio Parisi. Parisi afferma nel suo libro [15] che:

> *La scienza deve essere difesa non solo per i suoi aspetti pratici, ma anche per il suo valore culturale. Dovremmo avere il coraggio di prendere esempio da Robert Wilson, che nel 1969, di fronte a un senatore americano che insistentemente chiedeva quali fossero le applicazioni della costruzione dell'acceleratore al Fermilab, vicino a Chicago, in particolare se fosse utile militarmente per difendere il paese, rispose: "Il suo valore sta nell'amore per la cultura: è come la pittura, la scultura, la poesia, come tutte quelle attività di cui gli americani sono patriottcamente fieri; non serve per difendere il nostro Paese ma fa sì che valga la pena difendere il nostro Paese".*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Aristotele, *Metafisica*, Testo greco a fronte, Bompiani, 2000.

[2] C. Ciliberto, E. Sallent Del Colombo, *Francesco Severi: il suo pensiero matematico e politico prima e dopo la Grande Guerra*, in A. Cogliati (ed.) *Serva di due padroni. Saggi di storia della matematica in onore di Umberto Bottazzini*, Egea, Milano, 2019, pp. 335-370.

[3] M. Ciliberto, *Scienza, filosofia e politica: Federigo Enriques e il neoidealismo italiano*, Studi Storici,(1981), **4**, 861-886.

[4] B. Croce, *Cultura e Vita Morale, Intermezzi Polemici*, G. Laterza e figli, Bari, 1914 (cfr. https://www.nilalienum.-com/gramsci/0_Croce/CroceCVM.html).

[5] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, Leipzig, 1888; traduzione italiana in R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali}, a cura di O. Zariski, Alberto Stock, Roma, 1926, o in R. Dedekind, Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli, 1983; traduzione inglese in R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers: I. Continuity and Irrational Numbers, II. The Nature and Meaning of Numbers*, Open Court, Chicago, (1901), reprinted in 1963.

[6] J. W. Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1990.

[7] J. W. Dawson, Jr., *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A. K. Peters, Wellesley Mass, 1997.

[8] F. Enriques, *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna, 1906.

[9] G. Galilei, *Il Saggiatore*, Feltrinelli, 1992.

[10] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, a cura di A. De Angelis, Codice, 2021.

[11] G. Gentile, *Recensione a: ENRIQUES F., Problemi della scienza*, La Critica, Rivista di Letteratura, Storia e Filosofia, **6**, (1908), 430-446.

[12] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, Monatshefte für Mathematik und Physik, **38**, (1931), 173-198, tradotto in van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1971.

[13] D. Hilbert, *Über das Unendliche*, Math. Ann. **95**, (1926), 161-190; traduzione in italiana in *Sull'infinito*, in : D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di M. V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1978, pp. 233-266.

[14] G. Israel, *Il positivismo critico di Federigo Enriques nella filosofia scientifica del Novecento*, in *Federigo Enriques, Filosofia e storia del pensiero scientifico*, a cura di O. Pompeo Faracovi e F. Speranza, Livorno, Belforte, (1998), 19-44.

[15] G. Parisi, *In un volo di storni*, Rizzoli, 2021.

[16] Platone, *Menone*, Testo greco a fronte, Bompiani, 2000.

[17] Platone, *La Repubblica*, Testo greco a fronte, Bompiani, 2009.

[18] L. Russo, E. Santoni, *Ingegni minuti. Una storia della scienza in Italia*, Feltrinelli, 2010.

[19] D. Sacchi, *Per una rilettura della polemica Croce-Enriques*, Rivista di Storia della Filosofia, **69**, (2014), 225-236.

Ciro Ciliberto

Ciro Ciliberto si occupa di geometria algebrica, di storia della matematica e di divulgazione scientifica. Ha insegnato presso le università di Lecce, Napoli ''Federico II'' e Roma ''Tor Vergata'' come professore ordinario di Geometria Superiore. Unisce alla passione per la ricerca matematica anche quella per la pittura e la scrittura.