Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Silvia Cerasaro, Laura Tomassi

Le frazioni Egizie nella didattica

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2023), n.2, p. 157–173.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2023_1_8_2_157_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2023.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 8, N. 2, agosto 2023, 157-173

Le frazioni Egizie nella didattica

Silvia Cerasaro
Università Tor Vergata di Roma
E-mail: silvia.cerasaro@gmail.com

Laura Tomassi
Università Tor Vergata di Roma
E-mail: laura.tomassi1@gmail.com

Sommario: *Ogni numero razionale si può scrivere come somma di frazioni unitarie, cioè come "frazione egizia", mediante un procedimento chiamato 'disgregazione'. Sono illustrati alcuni spunti di origine storica, applicati in attività didattiche relative all'apprendimento della nozione di frazione e di numero razionale nella scuola secondaria di primo grado o nel primo biennio di secondo grado. L'argomento proposto permette, inoltre, di avvicinare e illustrare un problema aperto nella matematica attuale. I testi storici forniscono l'indicazione di varie applicazioni. Nel papiro di Rhind si trovano problemi di divisione di merci tra un certo numero di persone con il vincolo di fare la divisione più facile da realizzare in pratica; nel caso in cui la divisione riguardava terreni, disgregare doveva corrispondere a realizzare la divisione non solo più semplice ma anche più equa e con il minor numero di tagli degli appezzamenti. La soluzione corrispondeva alla somma di un certo numero di unità frazionarie. Una dimostrazione dell'esistenza delle disgregazioni e una illustrazione motivata su metodi di calcolo sono presenti nel Liber Abaci di Fibonacci. Vengono illustrati diversi algoritmi basati sulle frazioni continue ascendenti e discendenti, sottolineando la loro presenza storica in epoca ellenistica e medievale. Con tale studio è possibile comprendere gradualmente il concetto di approssimazione ad un dato numero razionale attraverso i suoi convergenti, considerando la rappresentazione grafica su un piano cartesiano di un numero razionale mediante i cerchi di Ford, oppure rappresentando un numero razionale a/b come un vettore (b, a) su un piano reticolato, tenendo in considerazione i risultati di Farey e Pick. Vedere graficamente come "arrivare" per piccoli passi ad un dato numero razionale, ottenendolo come somma di frazioni unitarie, permette di comprendere il concetto di convergenza a livello percettivo, in continuità con quanto affermato dagli studi neuroscientifici.*

Abstract: *Every rational number can be written as the sum of unit fractions, ie as an 'Egyptian fraction', by a process called 'disintegration'. Some ideas of historical origin are illustrated, applied in didactic activities related to learning the notion of fraction and rational number in lower secondary school or in the first two years of upper secondary school. The proposed topic also allows us to approach and illustrate an open problem in current mathematics. Historical texts provide indication of various applications. Problems of dividing goods among a number of people are found in the Rhind papyrus with the constraint of making the dividing easier to do in practice; in the case in which the division concerned land, disaggregating had to correspond to making the division not only simpler but also more equitable and with the least number of cuts of the plots. The solution corresponded to the sum of a certain number of fractional units. A demonstration of the existence of disintegrations and a reasoned illustration on calculation methods can be found in Fibonacci's Liber Abaci. Several algorithms based on ascending and descending continued fractions are illustrated, emphasizing their historical presence in Hellenistic and medieval times. With this study it is possible to gradually understand the concept of approximation to a given rational number through its convergents, considering the graphic representation on a Cartesian plane of a rational number using Ford circles, or representing a rational number a/b as a vector (b, a) on a grid plane, taking into consideration the results of Farey and Pick. Graphically seeing how to "get" to a given rational number in small steps, obtaining it as the sum of unit fractions, allows us to understand the concept of convergence at a perceptual level, in continuity with what has been affirmed by neuroscientific studies.*

Accettato: il 28 luglio 2023.

Riferimenti teorici

Dalla constatazione delle difficoltà legate all'apprendimento delle frazioni, diversi studiosi hanno sperimentato metodologie per favorire la comprensione di questo importante concetto, di cui si comprendono le procedure e poco il senso matematico [18], [22], [23]. In particolare, se n'è occupata anche Emma Castelnuovo [5], di cui possiamo leggere il pensiero, quando cerca di spiegare come poter aiutare gli studenti a comprendere i diversi significati della frazione $\frac{m}{n}$, intesa come il risultato di una divisione, o come prendere dalle n di cui resta diviso un intero un numero di parti pari a $m < n$:

> *A me pare che in questo punto la mentalità infantile riproduca, fin nei particolari, quella degli antichi. Abituata a lavorare sugli interi, entità visibili, la mente dei primitivi rifugge dalla considerazione di tre concetti contemporanei, cioé di $\frac{m}{n}$, e si limita alle unità frazionarie. L'unità frazionaria porta a fissare l'attenzione solo su due punti simultaneamente: la parte e l'intero. Spezzare la frazione significa lavorare su entità visibili, percettive. Per evitare le frazioni, gli antichi ricorsero alle unità frazionarie. Lo stesso avviene nei nostri bambini...*

Trattare a scuola la scrittura di un numero razionale come somma di frazioni unitarie, quindi, ha una valenza pedagogica poiché favorisce l'apprendimento, ed in questo l'uso della storia è determinante in quanto sottolinea il parallelismo esistente tra lo sviluppo del pensiero nell'alunno e l'evoluzione del pensiero matematico, oltre a favorire la motivazione, la curiosità e l'acquisizione di un senso civico nei confronti del passato, rendendo consapevoli che ciò che abbiamo non è sempre esistito [10].

Introduzione

Lo scopo del presente lavoro è richiamare le tecniche che servono per scrivere un numero razionale come "frazione egizia", una scrittura del tipo:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \ldots.. \frac{1}{x_n}$$

Con

$$x_i \in N$$

La risoluzione di un problema di questo tipo trova motivazione nel sorpassare i meccanicismi che spesso accompagnano la didattica dei numeri razionali a partire dalla scuola secondaria di primo grado, attivando negli studenti il *pensiero vivo*, come viene definito da Enriques il pensiero plastico e vivace [11], pronto a risolvere problemi, che *l'insegnamento dinamico* si propone di creare. In questo articolo si inizierà ad esaminare l'aspetto storico del concetto di disgregazione, illustrando il senso matematico attribuito alla frazione egizia, per arrivare al metodo di disgregazione descritto da Leonardo Pisano nel Liber Abaci [9], fortemente influenzato dalla matematica islamica. La scrittura di un numero razionale come somma di frazioni unitarie è possibile anche mediante l'applicazione del postulato di Eudosso-Archimede, passando per lo sviluppo in frazione continua ascendente. Viene anche presentata una proposta di un algoritmo di sviluppo in frazione continua discendente, per poi passare all'interpretazione geometrica del concetto di disgregazione, andando a sottolineare che si tratta di una approssimazione. In letteratura sono riportati diversi metodi di scrittura di un dato numero razionale in frazioni Egizie [3], [28]. La nostra proposta si focalizza su metodi che, per semplicità e per il fatto di essere oggetto di pensiero vivo, sono particolarmente adatti all'uso didattico, in continuità con i risultati degli studi neuroscientifici.

La storia

Un'analisi storica del concetto di frazione presso gli Egizi permette, tornando all'origine delle cose, di capire come l'unità frazionaria sia stata un'esigenza insita nel concetto stesso di divisione. Le nostre conoscenze sul pensiero matematico Egizio provengono essenzialente da due fonti, il papiro matematico di Rhind ed il papiro matematico di Mosca, cui si aggiunge il Rotolo di cuoio del British Museum [4], [14], [15], [19], [20], [21], [24]. Si tratta quasi certamente di manuali matematici per studenti, entrambi risalenti al Medio Regno. Nello studio del cosiddetto "miracolo matematico greco" sono stati analizzati gli elementi matematici vicino orientali che possono averlo determinato. Nell'incontro tra la cultura egiziana e quella greca, nel periodo demotico la prima esercitò una notevole influenza sulla seconda. In particolare "il ponte tra la prematematica dell'Egitto faraonico e dell'antica Mesopotamia e la raffinata scienza matematica ellenistica è rappresentato dalla matematica ellenica" [27]. Tra gli aspetti peculiari della matematica egiziana che hanno lasciato un segno sulla cultura greca vanno evidenziati: lo studio delle progressioni, il concetto di proporzionalità, il sistema frazionario.

Il sistema di numerazione egiziano era decimale, non posizionale e poteva indicare numeri fino all'ordine di grandezza del milione; i numeri minori di 1 venivano scritti mediante l'uso di un numero limitato di frazioni unitarie [26], che sarebbe più corretto, per il loro significato matematico in questo contesto chiamare unità frazionarie. Presso gli Egiziani [6], così come in seguito presso i Greci [8], queste quantità non sono casi particolari di un'idea più generale di frazione, ma sono reciproci dei numeri naturali: il rapporto che esiste tra questo quoziente e l'unità è lo stesso che intercorre tra unità e denominatore. Oggi scriveremmo che $\frac{1}{n} : 1 = 1 : n$. Questa concezione di unità frazionaria corrisponde a "raggruppamenti di unità" ed è rimasta tale nel passare in eredità ai Greci, perfettamente in linea con il loro concetto di *arithmos*, come collezione di un certo numero di unità di un certo tipo.

D'altra parte Diofanto nella sua Aritmetica parla di m unità in parti di n e le definisce *arithmoi* [7].

Le frazioni unitarie trovano la loro origine nell'operazione di divisione, facendo la loro comparsa negli algoritmi di divisione nel papiro di Rhind, che viene aperto proprio da una tavola di 50 divisioni del tipo

$$2 : (n+1)$$

il cui risultato viene espresso sottoforma di somma di frazioni unitarie. La maniera grafica di indicarle era quella di una bocca sovrastante il numero di unità. Oggi indichiamo le unità frazionarie come il numero in cui viene suddivisa l'unità sovrastato da una lineetta. Così per esempio $\overline{2}$ è il reciproco di 2. L'unica frazione che non è per così dire unitaria presso gli Egiziani è $\frac{2}{3}$, indicata come $\overline{\overline{3}}$. La motivazione può essere rintracciata nel fatto che $\frac{2}{3}$ è un resto "comodo" nelle divisioni dei numeri per 3 e gli algoritmi di calcolo egiziani si basavano sui processi di duplicazione, triplicazione, dimezzamento e divisione per 3. I numeri, pari e dispari, infatti divisi per 2 e per 3 possono esser scritti nella seguente maniera:

$$2n : 2 = n$$

$$(2n+1) : 2 = n + \frac{1}{2}$$

$$3n : 3 = n$$

$$(3n+1) : 3 = n + \frac{1}{3}$$

$$(3n+2) : 3 = n + \frac{2}{3}$$

1. – Il senso matematico della frazione egizia

Il problema moderno di scrivere una frazione come frazione egizia si collega ai primi sei problemi del Papiro di Rhind [16], in cui viene discussa la divisione di un certo numero di pani tra un certo numero di uomini, del tipo "dividere 5 pani tra 6 operai". Il problema può essere risolto ad un livello molto intuitivo e risulta ideale attività in una classe di Scuola Secondaria di Primo Grado. Si può fare uso di una versione del problema con il seguente testo facilitato: "Dividi 5 quadrati uguali in 6 parti uguali": a tale formulazione si può arrivare insieme alla classe, divisa in gruppi. Contestualmente si può organizzare un'attività laboratoriale: "se dovessi dare a 6 dei tuoi compagni la stessa frazione dei 5 quadrati uguali di cui disponi, facendo il minimo numero di tagli della carta, che frazione ciascuno di essi si troverebbe in mano?". La risposta corretta è $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

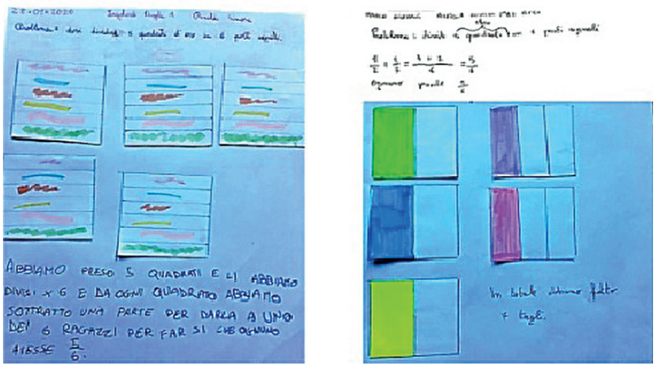

FIGURA 1 – Dividere 5 quadrati uguali in 6 parti uguali.

La risoluzione di problemi analoghi permette di guidare gli studenti in un progressivo processo astrattivo. Come supporto teorico può essere utilizzato un manuale di didattica della matematica d'eccezione, il **Liber Abaci di Leonardo Pisano**, di recente tradotto in italiano dal latino da un gruppo di studiosi italiani, coordinati dal Professore Franco Ghione, i quali hanno riportato l'opera tradotta sul sito https: //www.progettofibonacci.it/. Fibonacci [12] insegna prima a sommare le frazioni (*aggregare*), in seguito descrive in maniera schematica come svolgere il processo inverso, ovvero insegna a *disgregare*. Il VII capitolo, nella sua sesta parte, guida il pensiero attraverso una via che conduce ad un algoritmo di "disgregazione universale" delle frazioni, offrendo al discente la seguente motivazione:

> *"Nella prima e nella seconda parte di questo capitolo abbiamo insegnato ad aggregare le parti di diversi numeri in parti di un solo numero. In questa parte in verità insegniamo a disgregare più parti di un solo numero in parti singole, affinché tu sia capace di riconoscere meglio a proposito di un rotto di una qualunque linea [frazione], che parte o parti sia di un intero. In verità questo lavoro si articola in sette casi distinti."*.

Le frazioni vengono analizzate rintracciando nella loro struttura una formula, individuandone sette tipologie che riportano a sette strategie di disgregazione. Sono così riassumibili in una tabella:

Tipo	**Numeratore**	**Denominatore**	**Disgregazione**
I	a	$b = na$	$\frac{a}{b} = \frac{1}{n}$
II	$a = a_1 + a_2 + ...a_k$	$b = na_1 + na_2 + ...na_k$	$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ..\frac{1}{n_k}$
III	a	$b = na - 1$	$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{1}{nb}$
IV	a	$b, b+1 = n(a-1)$	$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{n} + \frac{1}{nb}$
V	a	$b, b+1 = n(a-2)$	$\frac{a}{b} = \frac{2}{b} + \frac{1}{n} + \frac{1}{nb}$
VI	a	$b = 3b', b+1 = n(a-3)$	$\frac{a}{b} = \frac{3}{b} + \frac{1}{n} + \frac{1}{nb}$
VII	*ogni frazione*	......	*disgregazione universale*

Numerosi sono gli esempi di disgregazione riportati all'interno del VII capitolo del Liber Abaci, alcuni dei quali riportati nella tabella sotto.

Tipo	**Numeratore**	**Denominatore**	**Disgregazione**
I	*3*	$b = 4 * 3$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
II	$5 = 2 + 3$	$6 = 2 * 3$	$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
III	5	$b = 4 * 5 - 1$	$\frac{5}{19} = \frac{1}{4} + \frac{1}{76}$
IV	5	$11, 11 + 1 = 3(5 - 1)$	$\frac{5}{11} = \frac{1}{11} + \frac{1}{3} + \frac{1}{33}$
V	11	$26, 26 + 1 = 3(11 - 2)$	$\frac{11}{26} = \frac{2}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{78}$
VI	17	$27 = 3 * 9, 27 + 1 = 2(17 - 3)$	$\frac{17}{27} = \frac{3}{27} + \frac{1}{2} + \frac{1}{54}$

Importante sottolineare che Fibonacci parla di disgregazione "bella" e di come il suo "algoritmo di disgregazione universale" corrisponda proprio alla ricerca di realizzazione di questo criterio:

> *"Quindi le parti di questi quattro tipi devono sempre essere rifatte secondo questo settimo tipo, affinché tu possa ottenere parti o più belle per le loro regole, o più raffinate per questa settima"* .

La settima regola di disgregazione corrisponde allo scrivere la frazione utilizzando l'algoritmo euclideo, uno dei numerosi passi in cui il matematico pisano testimonia una lettura attenta di Euclide [1]. Nel Liber Abaci, prendendo come esempio diverse frazioni, viene descritto un processo di disgregazione che parte dalla seguente considerazione: la frazione $\frac{a}{b}$ corrisponde alla divisione di a per b, ottenendo come risultato n e come resto r. Quindi si può scrivere che

$$b = na + r, \qquad 0 \leq r < a$$

$$na \quad \leq \quad b < (n+1)a$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{a}{b} \quad \leq \quad \frac{1}{n}$$

Facendo la differenza tra la frazione $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{1}{n+1}$ si ottiene una nuova frazione

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} - \frac{1}{n+1} = \frac{a(n+1)-b}{b(n+1)}$$

$\dfrac{a_1}{b_1}$ è la frazione propria, dato che se $a < b$, anche $(n+1)a < (n+2)b$ e se b non è multiplo di a, allora $0 < a_1 < a$, se $b > na$ allora $a_1 = (n+1)a - b < a$ Iterando la procedura si può scrivere la disgregazione della frazione iniziale e ci si ferma al più dopo $a-1$ passi.

A questo proposito proviamo a disgregare la frazione $\dfrac{17}{29}$

$$1 < \frac{17}{29} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{17}{29} - \frac{1}{2} = \frac{5}{58}$$

$$\frac{1}{12} < \frac{5}{58} < \frac{1}{11}$$

$$\frac{5}{58} - \frac{1}{12} = \frac{1}{348}$$

$$\frac{17}{29} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{348}$$

L'ispirazione euclidea è evidenziata dall'affermazione di Fibonacci:

> *per cui la proporzione che c'è tra 29 e 36, la stessa proporzione che ci sarà tra 17 e il quarto numero: perciò abbiamo moltiplicato il terzo numero, cioè 17, per il secondo, cioè per 36, e avviamo diviso il totale per il primo; perché essendo i quattro numeri proporzionali, la moltiplicazione del secondo per il terzo è uguale alla moltiplicazione del primo per il quarto, come è dimostrato da Euclide.*

Egli utilizza tale affermazione per cercare un altro metodo di disgregazione basato su una procedura di frazioni multiple.

1.1 – *La frazione multipla per la disgregazione di un numero razionale come somma di frazioni unitarie*

La frazione multipla nel Liber Abaci *di Leonardo Pisano*

Nel quinto capitolo del Liber Abaci di Fibonacci, il famoso matematico introduce un nuovo tipo di frazione, la frazione multipla. A tal proposito, Fibonacci scrive:

> *Ancora se sotto una stessa linea siano stati posti più numeri, e sopra ciascuno di quegli stessi si scriveranno altri numeri, il numero che sia stato posto sopra il numero all'inizio della parte destra della linea, indicherà la parte o le parti del numero stesso posto sotto, come abbiamo già detto. Quello dunque sopra il secondo esprime le parti dello stesso secondo delle parti del primo numero posto sotto. Quello poi sopra il terzo indica le parti di questo terzo delle parti del secondo delle parti del primo, e così sempre quelli che seguiranno sopra la linea denotano le parti di tutte le parti precedenti sotto la linea*

Si definisce **frazione multipla graduata di ordine n** la seguente scrittura:

$$\frac{a_n \quad a_{n-1} \quad ... \quad a_2 \quad a_1}{b_n \quad b_{n-1} \quad ... \quad b_2 \quad b_1}$$

con gli a_i e b_i interi positivi, $a_i \leq b_i$, per $i = 1, ..., n$. Solitamente i b_i sono presentati in maniera crescente da sinistra, cioè $b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1$.

Il significato aritmetico della frazione multipla di evince dalla seguente scrittura

$$\frac{a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_2 \quad a_1}{b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_2 \quad b_1} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_3}{b_1 b_2 b_3} + \dots + \frac{a_n}{\prod_{i=1}^{n} b_i} = \frac{a}{b}$$

Una frazione multipla esprime, quindi, una somma di frazioni proprie, la cui somma È ancora una frazione propria.

Esempio 1.1.1 – Sia $\frac{1 \quad 2}{2 \quad 3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Esempio 1.1.2 – Durante il periodo medievale fino all'introduzione dei numeri decimali con Stevin, le frazioni multiple si mostravano utili in quanto permettevano di scrivere con facilità quantità legate da unità di misura diverse. Ad esempio, se si considerano le monete usate nel periodo storico preso in considerazione, una lira corrispondeva a 20 soldi, un soldo corrispondeva a 12 denari. Se si scrive $7\frac{9 \quad 5}{12 \quad 20}$ si intende considerare 7 lire, 5 soldi e 9 denari, e quindi se si somma il tutto, $7 + \frac{5}{20} + \frac{9}{12 \cdot 20}$, si ottiene la conversione in denari.

Una frazione multipla può essere trasformata in una frazione propria e viceversa. Al nostro scopo, ovvero la scrittura di una frazione propria come somma di frazioni unitarie, vedremo solo come passare da una frazione propria ad una frazione multipla. Nelle pagine 37 e 38 del suo Trattato di Aritmetica del 1664, Giuseppe Maria Figatelli [13] chiama il procedimento di passaggio dalla frazione propria alla multipla *traslare i rotti*.

La regola dei numeri

Prima di vedere come si traslano i rotti, occorre parlare brevemente della regola dei numeri. Per capire meglio, leggiamo il seguente passo, tratto dal capitolo V, par. 22 del Liber Abaci:

> *Alcuni numeri sono non composti, e sono quelli che in aritmetica e in geometria si chiamano primi. Questo perché non possono essere misurati o numerati da nessun numero esistente minore ad essi all'infuori dell'unità. Gli Arabi li chiamano hasam. I Greci coris canon, noi invece li chiamiamo senza regole; .... I numeri restanti invece sono chiamati composti o epipedi, cioè piani da Euclide espertissimo di geometria. Questo perché sono composti dalla moltiplicazione di alcuni numeri, come il dodici che è composto dalla moltiplicazione di due per 6, o di tre per 4, noi invece li chiamiamo numeri regolari.*

Dunque, la regola di un numero è una sua fattorizzazione, che nel Liber Abaci non è necessariamente in fattori primi. In questa sezione del Liber Abaci, sono presenti delle tabelle che riportano la regola dei numeri fino a 100, scritte sotto forma di frazione multipla, strumento a disposizione dei matematici del tempo per esprimere una moltiplicazione tra numeri naturali. Ad esempio, la scrittura $\frac{1 \quad 0}{6 \quad 8}$ indica la regola del numero 48.

Fibonacci suggerisce come prendere la più *bella*, ovvero, quella che si ottiene considerando una decomposizione con due fattori, con i termini più piccoli. Ad esempio, se si vuole decomporre il numero 20, si possono avere due casi, con due fattori, $\frac{1 \quad 0}{4 \quad 5}$ e $\frac{1 \quad 0}{2 \quad 10}$. Fibonacci reputa più bella la seconda.

Traslare i rotti

Sia $\frac{a}{b} > 0$ un numero razionale. Secondo la classificazione di Fibonacci, tale numero è chiamato *rotto* ed è il multiplo del numero che si ottiene dividendo il numero 1 in n parti uguali; Leonardo Pisano parla anche del numero *misto*, ovvero la somma di un intero ed un numero rotto, che può essere paragonato alle attuali frazioni improprie.

Si prende in considerazione il denominatore b e si cerca una sua fattorizzazione *bella*. Si possono avere due casi:

- b numero composto: si cercano due divisori, se uno dei due è pari, si usa 2, se dispari è preferibile usare il minimo divisore possibile.
- b numero primo: si moltiplicano numeratore e denominatore per 12, o 24, o 36, o 48, o 60, come spiega Fibonacci nel settimo capitolo, paragrafo 6.12:

> *Ebbene in casi simili c'è una sorta di altra regola universale, cioè trova un numero, che*

abbia in sé molte regole [divisori], come 12, o 24, o 36, o 48, o 60, o qualunque altro numero che sia maggiore della metà del numero che sta sotto la linea di frazione, o minore del doppio di esso;

Sia $b = b_1 \cdot b_2$ una fattorizzazione di b, con $b_1 \geq b_2$. Si divide, solitamente per i denominatori composti, per il fattore più piccolo, b_2, ottenendo:

$$a = b_2 \cdot a_1 + r_2, \quad r_2 < b_2$$

Allora, $\dfrac{a}{b_2} = a_1 + \dfrac{r_2}{b_2}$

Poichè si deve arrivare al razionale $\dfrac{a}{b_1 \cdot b_2}$, si divide a_1 per b_1.

$$a_1 = b_1 \cdot a_0 + r_1, \quad r_1 < b_1$$

Si noti che a_0 è zero per le frazioni proprie.

Poiché si ha che $\dfrac{a}{b_1 \cdot b_2} = \dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{r_2}{b_1 \cdot b_2}$, risulta che

$$\frac{a}{b_1 \cdot b_2} = a_0 + \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_1 \cdot b_2}$$

cioè si ha che

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_2 \quad r_1}{b_2 \quad b_1}$$

Questo algoritmo può essere iterato per avere uno sviluppo in somma di frazioni unitarie. Per il caso di un denominatore primo, Fibonacci, dopo aver individuato una "fattorizzazione" della frazione equivalente ottenuta, preferisce dividere prima per il denominatore iniziale.

ESEMPIO 1.3.1 – Si vuole scrivere $\dfrac{7}{12}$ come somma di frazioni unitarie. Si scrive il numero come prodotto di due numeri secondo il numero 2, per cui $12 = 2 \cdot 6$, allora si ha:

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{2 \cdot 6}$$

$7 = 2 \cdot 3 + 1$, quindi $\dfrac{7}{2} = 3 + \dfrac{1}{2}$

Dividendo tutto per 6, si ha $\dfrac{7}{2 \cdot 6} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{2 \cdot 6}$.

Quindi, si ha che $\dfrac{7}{12} = \dfrac{1 \quad 3}{2 \quad 6}$, che scritta come frazioni unitarie è esattamente $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12}$.

ESEMPIO 1.3.2 – Si vuole scrivere $\dfrac{17}{29}$ come somma di frazioni unitarie. Il 29 è un numero primo, per cui si moltiplica e divide per 12.

$$\frac{17}{29} = \frac{204}{29 \cdot 12}$$

$204 = 29 \cdot 7 + 1$, quindi $\dfrac{204}{29} = 7 + \dfrac{1}{29}$.

$7 = 12 \cdot 0 + 1$, quindi

$\dfrac{204}{12 \cdot 29} = \dfrac{7}{12} + \dfrac{1}{29 \cdot 12} = \dfrac{1 \quad 7}{29 \quad 12}$.

Dunque, risulta che $\dfrac{17}{29} = \dfrac{7}{12} + \dfrac{1}{348}$.

C'è solo una frazione unitaria, per cui si continua il procedimento per $\dfrac{7}{12}$.

Il numero 12 non è primo, una sua fattorizzazione *bella* è $2 \cdot 6$.

Si considera, quindi, $\dfrac{7}{2 \cdot 6}$, risulta che $7 = 2 \cdot 3 + 1$, per cui $\dfrac{7}{2} = 3 + \dfrac{1}{2}$

$3 = 6 \cdot 0 + 3$, quindi $\dfrac{7}{2 \cdot 6} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{2 \cdot 6} = \dfrac{1 \quad 3}{2 \quad 6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12}$

Allora, sostituendo, si ha che $\dfrac{17}{29} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{348}$ che si può scrivere nel seguente modo come frazione multipla:

$$\frac{1 \quad 1 \quad 1}{29 \quad 6 \quad 2}$$

2. – Le frazioni continue ascendenti e lo sviluppo di una frazione in somma di frazioni unitarie

2.1 – *Postulato di Eudosso-Archimede*

L'assioma di Eudosso-Archimede, a cui fa riferimento anche Euclide nella definizione V.4. degli Elementi quando definisce il rapporto tra due numeri, può essere utilizzato per trasformare una frazione in una frazione continua ascendente, a sua volta riconducibile alla somma di frazioni unitarie.

Il postulato afferma che, dati due numeri naturali a e b, con $a < b$, esiste sempre un multiplo intero di a che supera b, ovvero $ma > b$, per un intero positivo m. Sia m_0 il più piccolo tra tali m. Si osserva che esiste $d_0 < b$ tale che $m_0 a = b + d_0$. Dividendo tutto per b, si ha che

$$m_0 \frac{a}{b} = 1 + \frac{d_0}{b}$$

Dividendo tutto per m_0, si ha che

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \frac{d_0}{b}}{m_0}$$

Si continua ad applicare il postulato a $\frac{d_0}{b}$

Poiché $d_0 < b$, esiste un naturale m_1 tale che $m_1 d_0 > b$ e sia $m_1 d_0 = b + d_1$. Allora, dividendo tutto per b, risulta che

$$m_1 \frac{d_0}{b} = 1 + \frac{d_1}{b}$$

Quindi,

$$\frac{d_0}{b} = \frac{1 + \frac{d_1}{b}}{m_1}$$

Allora, risulta che

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \frac{1 + \frac{d_1}{b_1}}{m_1}}{m_0}$$

Si itera il procedimento, fino ad avere un certo $d_i = 1$ ottenendo

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + - - -}{m_3}}{m_2}}{m_1}}{m_0} =$$

$$= \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_0 m_1} + \frac{1}{m_0 m_1 m_2} + \frac{1}{m_0 m_1 m_2 m_3} + - - - -$$

Si noti che una frazione continua ascendente risulta essere una frazione multipla, vista nel precedente paragrafo, per cui

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \quad ... \quad 1 \quad 1 \quad 1}{... \quad ... \quad m_3 \quad m_2 \quad m_1}$$

Con l'utilizzo delle frazioni continue ascendenti si scrive un numero razionale come somma di frazioni unitarie.

Esempio 2.1.1 – Si vuole scrivere $\frac{17}{29}$ come somma di frazioni unitarie.

Si ha che $17m > 29$ ed il minimo m_0 per cui accade è $m_0 = 2$. Quindi, si ha che

$$17 \cdot 2 = 29 + 5$$

Dividendo per 29 si ha

$$\frac{17}{29} \cdot 2 = 1 + \frac{5}{29}$$

Si divide per 2 ottenendo

$$\frac{17}{29} = \frac{1 + \frac{5}{29}}{2}$$

Applicando lo stesso procedimento a $\frac{5}{29}$, si ha che

$$5 \cdot 6 = 29 + 1$$

La presenza del resto 1 indica la condizione per porre fine al procedimento, ottendendo

$$\frac{5}{29} = \frac{1 + \frac{1}{29}}{6}$$

Andando a sostituire, si scrive il numero razionale dato come frazione continua ascendente

$$\frac{17}{29} = \frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{29}}{6}}{2}$$

che si scrive nel seguente modo come somma di frazioni unitarie

$$\frac{17}{29} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{348}$$

Come frazione multipla, si ha che

$$\frac{17}{29} = \frac{1 \quad 1 \quad 1}{29 \quad 6 \quad 2}.$$

3. – La disgregazione e le frazioni continue

Una delle applicazioni delle frazioni continue [3], [17], deriva dal teorema della differenza tra due convergenti successivi.

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$$

per k dispari

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{1}{q_k q_{k-1}}$$

Quindi nel caso di k dispari la differenza tra due convergenti di ordine successivo può essere scritta come una frazione unitaria. Nel caso di k pari la differenza tra i convergenti di ordine successivo porta ad una frazione unitaria con il segno negativo. Sono stati utilizzati algoritmi che fanno uso del concetto di *mediante*, ma il calcolo risulta piuttosto eleborato. Nel presente articolo si propone un'algoritmo che porta ad una pseudo-frazione continua, cioè una frazione in cui un'algoritmo simile a quello euclideo approssima la frazione per eccesso, realizzando un'operazione che potremmmo definire simile ad una divisione per eccesso. Riprendiamo l'esempio riportato nel Liber Abaci, dove la disgregazione ha fatto uso di

$$\frac{17}{29} = \frac{1}{\frac{29}{17}} = \frac{1}{2-\frac{5}{17}} = \frac{1}{2-\frac{1}{\frac{17}{5}}} = \frac{1}{2-\frac{1}{4-\frac{3}{5}}} =$$

$$= \frac{1}{2-\frac{1}{4-\frac{1}{\frac{5}{3}}}} = \frac{1}{2-\frac{1}{4-\frac{1}{2-\frac{1}{3}}}}$$

Di seguito dimostriamo il teorema di formazione dei convergenti

$$p_k = a_k p_{k-1} - p_{k-2}$$

$$q_k = a_k q_{k-1} - q_{k-2}$$

Nel caso $k = 2$ la formula è facilemente verificata. Per $k < n$ consideriamo la frazione continua $[a_0, a_1, a_2....an]$ ed andiamo a considerare il convergente r-esimo $\frac{p'_n}{q'_n}$.

$$[a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1}$$

$$r_1 = [a_1, a_2...., a_n]$$

$$r_1 = \frac{p'}{q'}$$

$$p_n = a_0 p'_{n-1} - q'_{n-1}$$

$$q_n = p'_{n-1}$$

sia

$$p = a_0 p' - q'$$

$$q = p'$$

$$p_n = a_0(a_n p'_{n-2} - p'_{n-3}) - (a_n q'_{n-2} - q'_{n-3}) =$$
$$= a_n(a_0 p'_{n-2} - q'_{n-2}) - (a_0 p'_{n-3} - q'_{n-3})$$

$$q_n = p'_{n-1} = a_n q'_{n-2} - q'_{n-3} = a_n q_{n-1} - q_{n-2}$$

La disgregazione è utile nel caso in cui $a_0 = 0$, cioè si tratta di frazioni proprie; perché la ricorsione sia valida per $n = -1$, si attribuiscono i valori

$$p_{-1} = -1$$
$$q_{-1} = 0$$

Moltiplicando la prima equazione della regola di formazione dei convergenti per q_{k-1} e la seconda per p_{k-1} e sottranedo la prima dalla seconda si ottiene che

$$q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k = -p_{k-1} q_{k-2} + p_{k-2} q_{k-1}$$

dal momento che è $q_0 p_{-1} - p_q{-1} = -1$
si ottiene

$$q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k = 1$$

dividendo per q_k e per p_k entrambi i membri si ottiene

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{1}{q_k \cdot p_k}$$

D'altra parte facendo riferimento alla frazione continua

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - ..... \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Si attribuiscono i valori:
$p_1 = 1$
$q_1 = a_1$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2}} = \frac{1}{\frac{a_1 a_2 - 1}{a_2}} = \frac{a_2}{(a_1 a_2 - 1)}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3}}} = ... = \frac{a_2 a_3 - 1}{a_1(a_2 a_3 - 1) - a_3}$$

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1(a_1 a_2 - 1)}$$

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{(a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3)(a_1 a_2 - 1)}$$

Iterando la procedura si mostra che

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{1}{q_k \cdot p_k}$$

Utilizzando la regola di costruzione dei convergenti per la frazione $\frac{17}{29}$

n	-1	0	1	2	3	4
a_n	nulla	0	2	4	2	3
p_n	-1	0	1	4	7	17
q_n	0	1	2	7	12	29

3.1 – *Considerazioni sull'algoritmo di scrittura della frazioni unitarie come frazioni continue approssimate dal basso*

Il piano di Farey ed il teorema di Pick

Dopo aver analizzato dei risultati relativi ai convergenti delle frazioni continue, quali la sequenza di Farey, i cerchi di Ford ed il teorema di Pick [2], si mostrano tali applicazioni nell'algoritmo descritto nel paragrafo precedente relativi ai nuovi convergenti $\frac{p_k}{q_k}$ trovati.

Per poter osservare geometricamente l'approssimazione graduale dei vari $\frac{p_k}{q_k}$ al numero razionale $\frac{a}{b}$ che è stato scritto come somma di frazioni unitarie, si utilizza il piano di Faray, dove ogni convergente $\frac{p_k}{q_k}$ si scrive come una coppia di coordinate (q_k, p_k), tenendo conto di una versione differente del teorema dei medianti pesati.

Poiché per $k \geq 2$ si ha che:

$$p_k = a_k p_{k-1} - p_{k-2}$$

$$q_k = a_k q_{k-1} - q_{k-2}$$

allora si ha che

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} - p_{k-2}}{a_k q_{k-1} - q_{k-2}}$$

Per cui risulta che $\frac{p_0}{q_0} \leq \frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_2}{q_2} \leq ... \leq \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \leq \frac{p_n}{q_n}$, allora ci si approssima al razionale $\frac{a}{b}$ dal basso.

ESEMPIO 3.1.1 – Abbiamo già visto nel paragrafo 3 come sviluppare in frazioni continue dal basso il razionale $\frac{17}{29}$ che veniva scritto come $[0; 2, 4, 2, 3]$.

Rappresentando i convergenti trovati, si nota l'approssimazione dal basso, in quanto si ha $\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{-1} = 0$. $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{4}{7}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{7}{12}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{17}{29}$ [Figura 2]

Inoltre, poiché si ha che $p_k = a_k p_{k-1} - p_{k-2}$ e $q_k = a_k q_{k-1} - q_{k-2}$, dalla seguente immagine si evince che tale teorema, in questa forma, permette il calcolo del convergente successivo, opportunatamente pesato. [Figura 3]

Ovviamente, trattandosi di un piano reticolato, vale il teorema di Pick [25], secondo il quale data una regione di piano della griglia, di area A, dato il numero B di punti della griglia presenti sul bordo, e dato I il numero dei punti della griglia interni

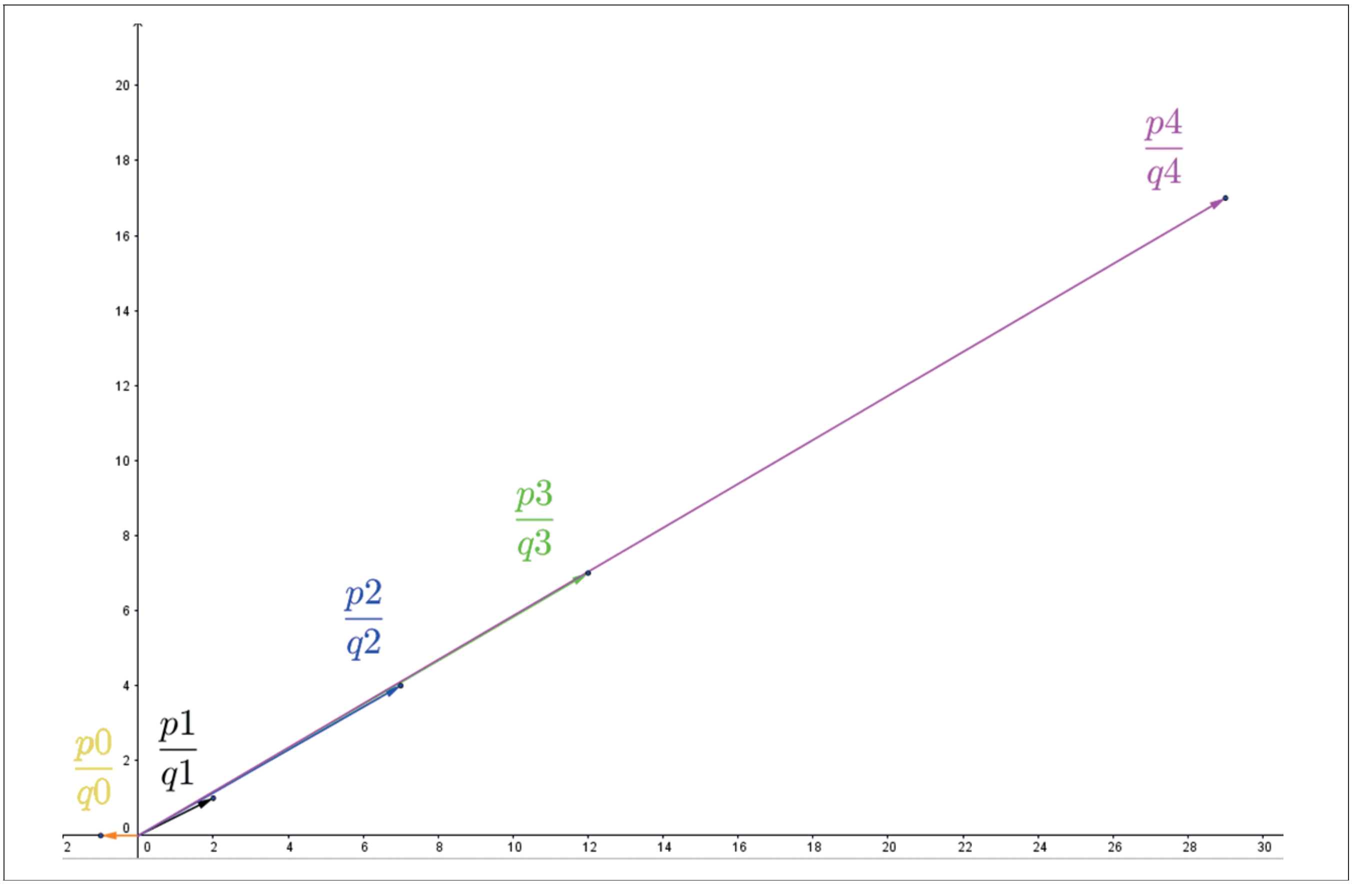

FIGURA 2 – Approssimazione dal basso di $\frac{17}{29}$.

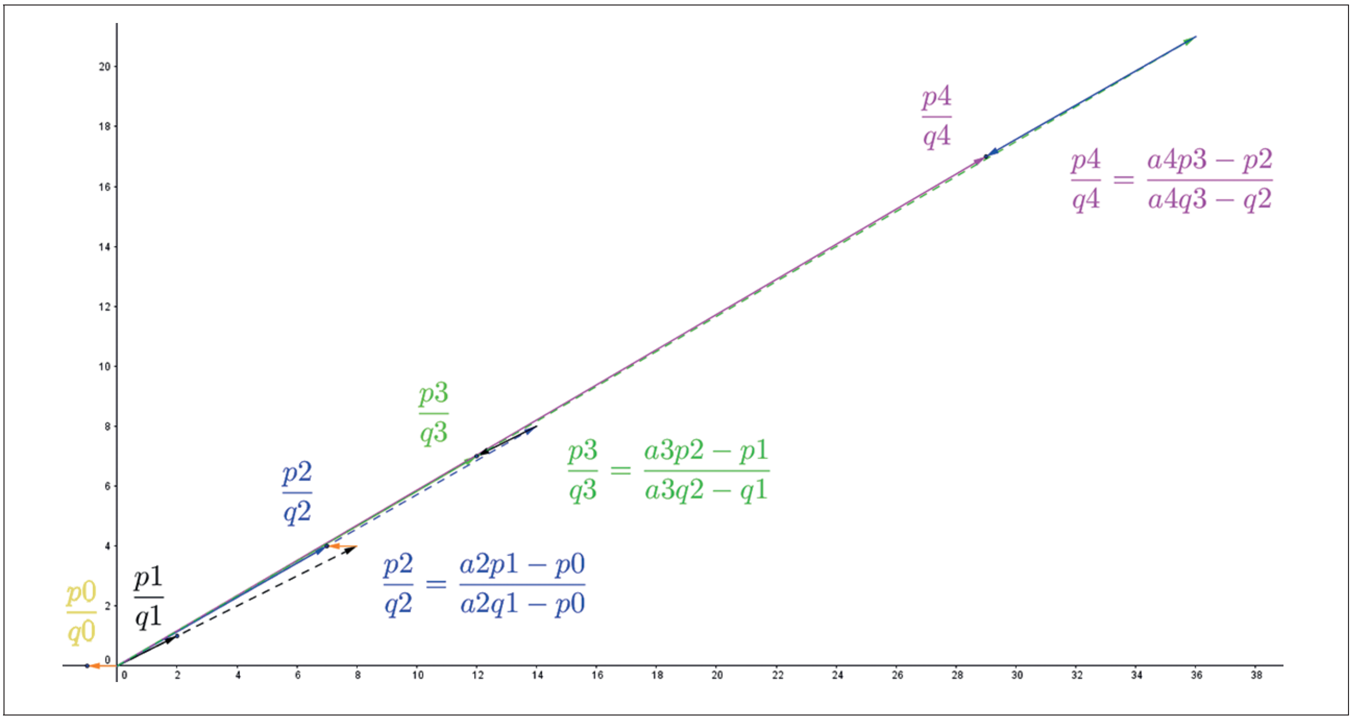

FIGURA 3 – Approssimazione al convergente successivo pesato.

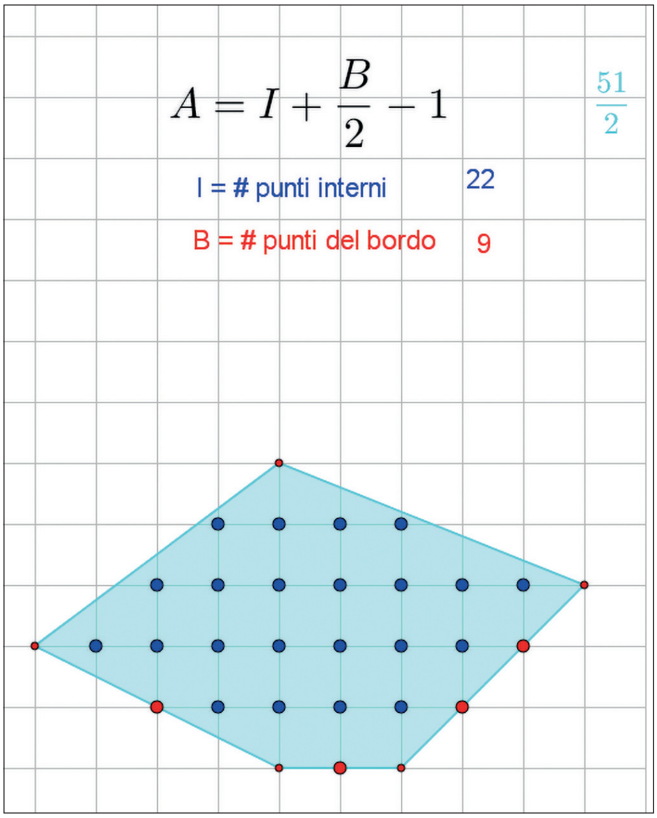

FIGURA 4 – L'area con il teorema di Pick.

alla regione di piano considerata, risulta che $A = I + \frac{B}{2} - 1$. Se si considerano i triangoli che hanno per lati due convergenti successivi, poichè non hanno punti interni ma solo 3 punti nel bordo, risulta che la loro area è $\frac{1}{2}$, pari all'area minima di un triangolo sul piano reticolato. [Figura 4]

ESEMPIO 3.1.2 – Relativamente al numero razionale considerato nell'esempio precedente, nella seguente immagine è possibile vedere i triangoli di area minima tra due convergenti successivi. [Figura 5]

I cerchi di Ford

I cerchi di Ford sono una rappresentazione geometrica delle frazioni sul piano cartesiano.

Si definisce **cerchio di Ford** $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ un cerchio tangente all'asse x in $\frac{a}{b}$ avente raggio pari a $\frac{1}{2b^2}$.

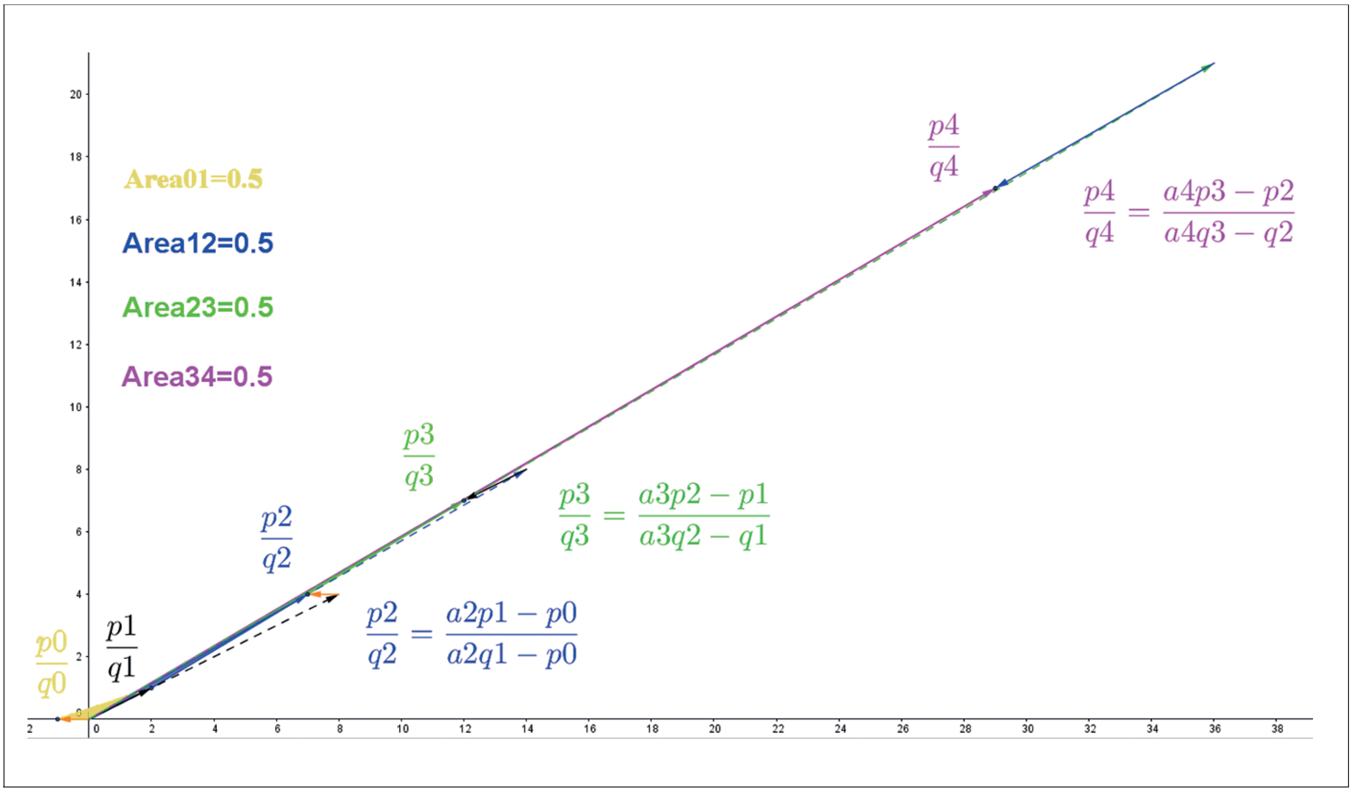

FIGURA 5 – Triangoli di area minima.

Ogni convergente dell'espressione tramite frazione continua del numero razionale $\frac{a}{b}$ può essere rappresentato come un cerchio di Ford; tali cerchi risultano essere tangenti tra loro, passando dalla destra alla sinistra, e viceversa, come accade per i convergenti stessi. Nel caso delle frazioni continue approssimate dal basso, i cerchi di Ford risultano essere tangenti uno all'altro in maniera sequenziale, dal cerchio più grande al più piccolo, raggiungendo il razionale $\frac{a}{b}$. Inoltre, le frazioni unitarie, la cui somma è proprio il numero razionale di partenza, si notano sull'asse x, in quanto sono i segmenti tra i punti di tangenza, per come erano stati definiti, ovvero come differenza dei convergenti successivi, cioè, $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{1}{q_{k-1}q_k}$.

Esempio 3.2.1 – La seguente immagine mostra i cerchi di Ford per il numero razionale $\frac{17}{29}$ [Figura 6].

Gli ultimi convergenti sono rappresentati da cerchi con il raggio molto piccolo, che si possono vedere meglio in Figura 7. Tutti i cerchi associati ai convergenti sono poggiati sull'asse x, in quanto sono tangenti ad esso nel punto che ha come ascissa il razionale considerato.

In tale rappresentazione, le frazioni unitarie esprimono la misura dei segmenti compresi tra due punti di tangenza consecutivi.

4. – Conclusioni

Riassumendo, tramite l'algoritmo della disgregazione, un numero razionale si scrive come somma di frazioni, tanto da avere delle frazioni intermedie prima di raggiungere in maniera esatta il razionale considerato. Infatti, se $\frac{p}{q} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$, dal valore iniziale $\frac{1}{x_1}$ si arriva al secondo valore $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Se da $\frac{p_1}{q_1}$ si aggiunge l'incremento $\frac{1}{x_3}$ si arriva alla seconda frazione intermedia $\frac{p_2}{q_2}$.

Continuando ad aggiungere gradualmente gli incrementi $\frac{1}{x_i}$, si otterranno altre frazioni intermedie, fin quando si arriverà al numero razionale $\frac{p}{q}$, dopo aver aggiunto l'ultimo incremento $\frac{1}{x_n}$.

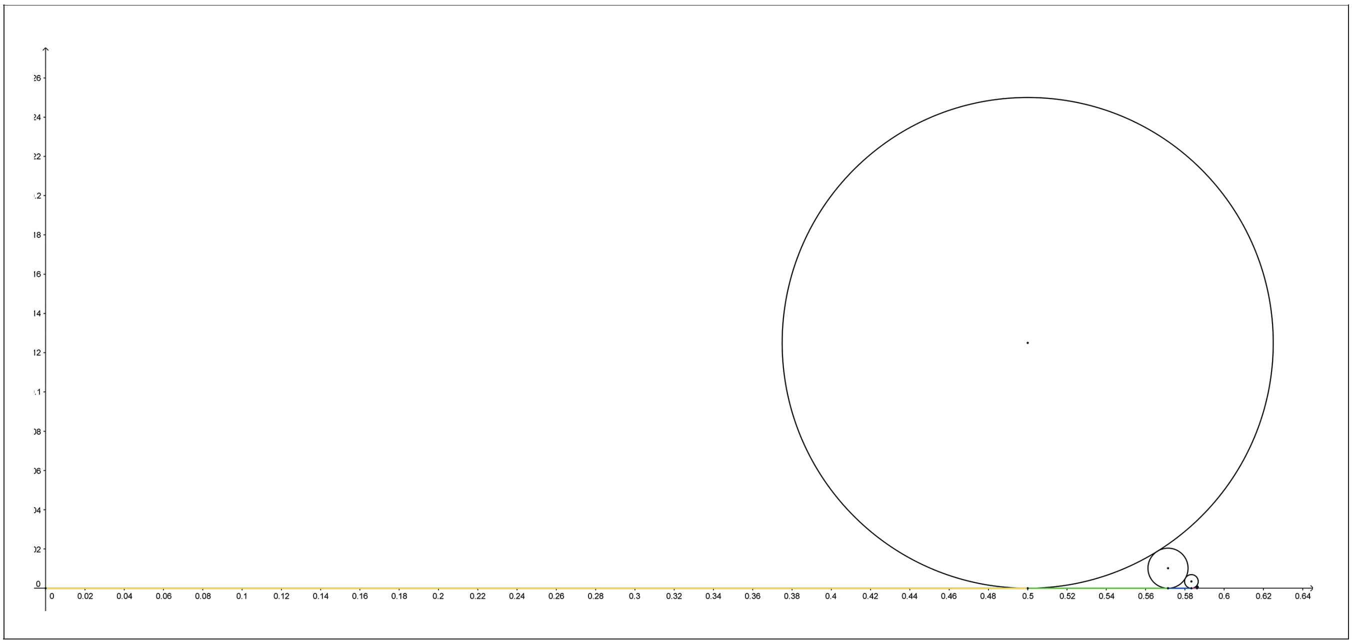

Figura 6 – Cerchi di Ford per $\frac{17}{29}$.

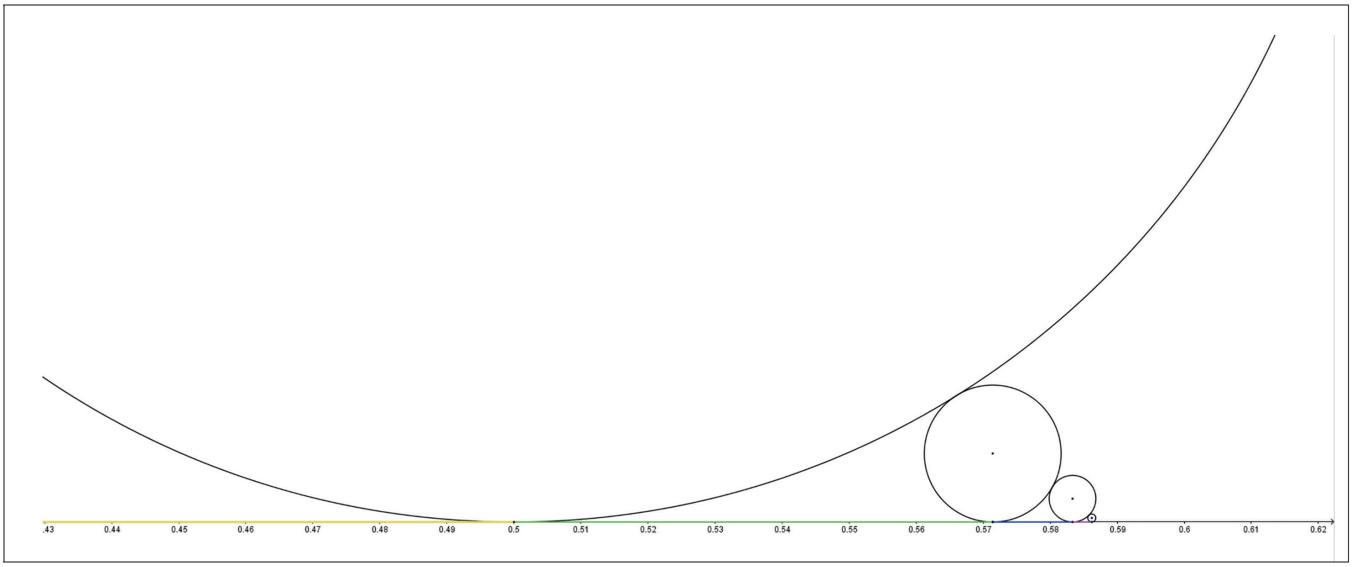

FIGURA 7 – Le frazioni unitarie come lunghezza dei segmenti tra i punti di tangenza.

Quindi, la scrittura di un numero razionale come somma di frazioni unitarie è utile per lo sviluppo dei prerequisiti necessari alla comprensione del concetto di approssimazione, che gli studenti incontreranno nel momento in cui saranno trattati i limiti delle progressioni, prima, e delle funzioni in un secondo momento.

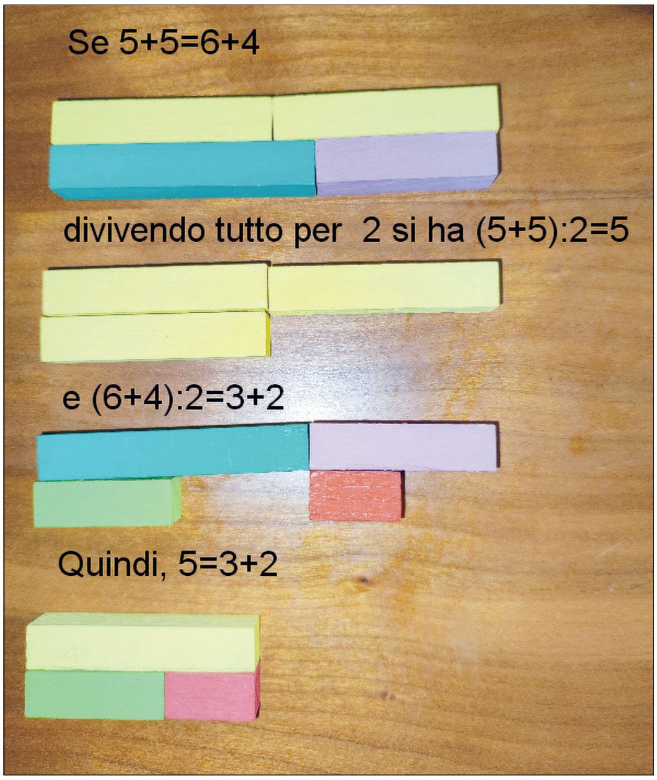

FIGURA 8 – Il postulato di Eudosso-Archimede con i regoli.

Esempi didattici con il postulato di Eudosso-Archimede

Per comprendere meglio la disgregazione di un numero razionale mediante il postulato di Eudosso-Archimede, si può procedere, in un primo momento, con la manipolazione di opportuni materiali, per poi passare al rinforzo di quanto appreso attraverso il pensiero astratto. Questa attività può essere presentata ad una classe seconda della scuola secondaria di primo grado. Risulta semplice comprendere il meccanismo della scrittura come somma di frazioni unitarie se si considera un numero razionale del tipo $\frac{a+b}{a \cdot b}$, quello che Fibonacci dice appartenere al secondo tipo, che risulta scrivibile come

$$\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Come materiale didattico, possono essere utilizzati i regoli, che solitamente sono un valido aiuto nella scuola primaria, per l'apprendimento delle regole aritmetiche di base.

Si supponga di volere scrivere la frazione $\frac{5}{6}$ come somma di frazioni unitarie. Risulta evidente che il regolo giallo del 5 è più corto di quello verde scuro del 6, ma si cerca il numero minimo m_0 per cui si ha $5m_0 > 6$. Il valore m_0 risulta essere il numero di regoli gialli da prendere affinché si superi il regolo

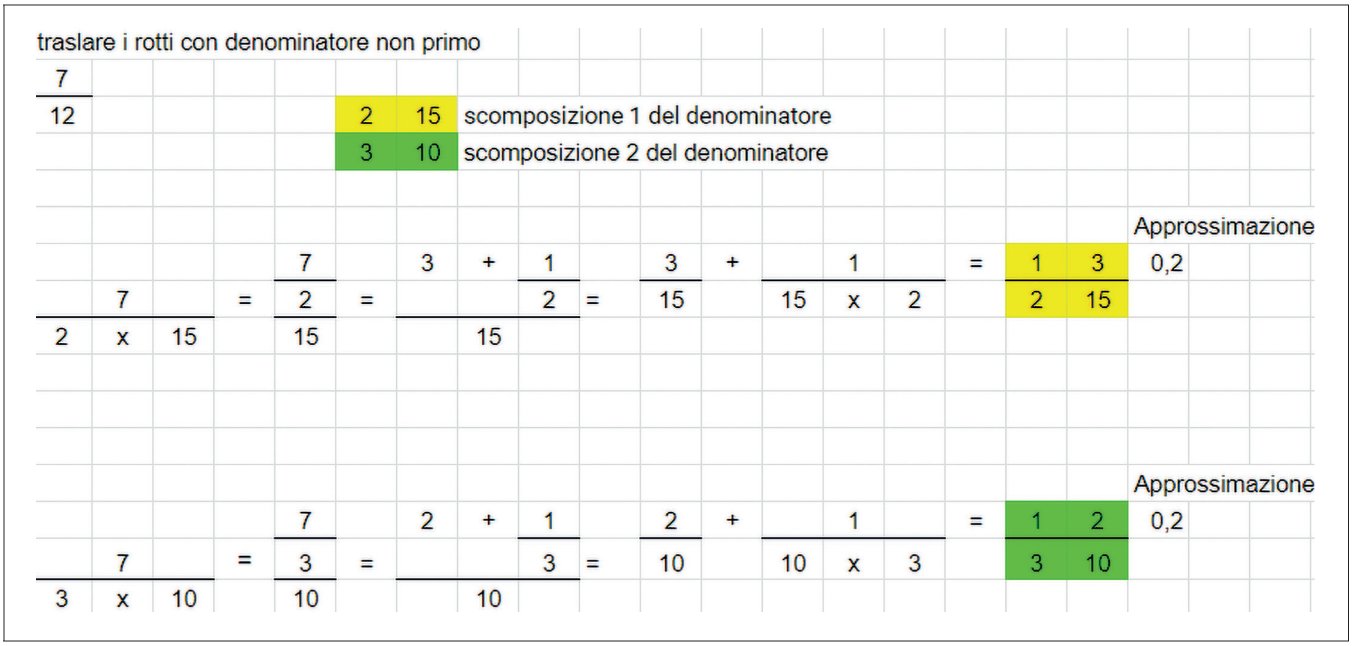

FIGURA 9 – Studio della migliore approssimazione con il foglio di calcolo.

verde scuro, e tale numero è 2. Allora si nota che due regoli gialli superano il verde scuro, a cui resta una differenza pari ale regolo rosa del 4. Quindi, il regolo verde scuro si trova 1 volta e $\frac{4}{6}$ nei due gialli. Il nostro obiettivo è quello di esprimere il regolo giallo come somma di altri regoli, per cui, dividendo tutto per il numero di regoli gialli, si ha che un regolo giallo è metà regolo verde scuro e metà regolo rosa, ovvero un regolo verde chiaro, che è $\frac{1}{2}$ del 6, cioé 3, ed un regolo rosso, che è $\frac{1}{2}$ del 4. Dunque, $\frac{5}{6}$ è $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ [Figura 8].

Non è possibile mostrare con tale metodologia la disgregazione per gli altri tipi in quanto i denominatori delle frazioni unitarie non dividono il denominatore del numero razionale da disgregare, quindi, si possono considerare gli altri casi visti solo dopo aver svolto molti esercizi con il materiale nel caso appena descritto, per poi astrarre, passando dalle mani alla mente.

Esempi didattici con le frazioni multiple

La scrittura in frazioni egizie mediante l'utilizzo della frazione multipla prevede delle attività propedeutiche, che possono coinvolgere anche dei software con opportune programmazioni. Fondamentale è la comprensione della scrittura della frazione multipla come somma di frazioni proprie: in questo segmento didattico, si può impostare un foglio di calcolo utilizzando, oltre ai comandi di formattazione e di impostazione grafica relativi alla frazione multipla, anche i semplici comandi con le formule matematiche, considerando anche i riferimenti assoluti alle celle in cui sono presenti i dati inseriti.

Poiché è stato visto che una frazione multipla è una frazione continua ascendente, è utile anche programmare il foglio di calcolo per mostrare l'equivalenza delle due scritture.

Scrivere una frazione propria come somma di frazioni unitarie diventa semplice se sono stati compresi i passaggi precedenti. L'algoritmo del *traslare i rotti* [13] prevede la comprensione del concetto di *regola*, cioè della scomposizione in fattori, non necessariamente primi, come suggerisce Fibonacci, e possibilmente con due fattori. Dopo aver dato una fattorizzazione del denominatore ed aver messo i fattori in due celle distinte, si può iniziare l'algoritmo sfruttando una scrittura in frazione continua ascendente, per poi scrivere in ultimo la frazione multipla relativa.

Risulta importante far notare che, se esistono altre fattorizzazioni del denominatore, si possono avere frazioni multiple diverse.

Se si ha $\frac{a}{b}$, con $b = b_1 \cdot b_2$ oppure $b = b_3 \cdot b_4$, si possono avere $\frac{a}{b} = \frac{r_2}{b_2} \; \frac{r_1}{b_1}$ oppure $\frac{a}{b} = \frac{r_4}{b_4} \; \frac{r_3}{b_3}$

Interessante è far notare che $\frac{r_1}{b_1}$ e $\frac{r_3}{b_3}$ sono delle approssimazioni ad $\frac{a}{b}$. Si può studiare come valutare la migliore approssimazione al razionale dato [Figura 9]. A questo punto diventa semplice la scrittura come somma di frazioni unitarie, iterando il procedimento se non sono state prodotte due frazioni unitarie, inserendo i nuovi dati nel software. Si possono, inoltre, inserire due fogli di lavoro, uno nel caso il denominatore sia un numero primo, l'altro in cui risulti un numero composto.

Se questo percorso è presentato in una scuola secondaria di secondo grado, si può pensare di utilizzare anche comandi più avanzati, oppure si può usare Python.

BIBLIOGRAFIA

[1] Acerbi F., (2019), *Euclide, tutte le opere*, Bompiani;

[2] Amen J., (2006), *Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem*, DigitalCommons@University of Nebraska-Lincoln;

[3] Bosma W., Kraaikamp C., A.A. 2012-2013, *Continued fractions*;

[4] Cartocci A., (2007) *La matematica degli Egizi*, Firenze University press;

[5] Castelnuovo E., (1952), *L'insegnamento delle frazioni*, La scuola secondaria e i suoi problemi, 2, Centro Didattico Nazionale per la scuola secondaria, pp. 73-80;

[6] Caveing M., (1994) *Essai sur le savoir mathèmatiques dans la Mésopotamie et L'Egypte anciennes. la constitution de l'idéalité dans la pensée grecque*;

[7] Christianidis J., (2004), *Did the Greek have the notion of common fraction? Did they use it? Classics in the history of Greek Mathematics*, Kluwer Academic publishers;

[8] Corry L., (2020), *Breve storia dei numeri*, Hoepli editore;

[9] D'Alessandro P., Giusti E. (a cura di) (2020)*Leonardi Bigolli Pisani vulgo Fibonacci LIBER ABBACI*, Firenze, Olschki, Biblioteca di Nuncius;

[10] Dematté A., Furinghetti F., (2022) *Today's students engaging with Abbacus problems*, ZDM – Mathematics Education, Springer, pp. 1521-1536;

[11] Enriques F., (2003), *Insegnamento dinamico, con scritti di Franco Ghione e Mauro Moretti*, Agorà edizioni;

[12] Fibonacci L., *Liber Abaci*, Testo e traduzione dal sito www.progettofibonacci.it;

[13] Figatelli G.M., (1726) *Trattato di Aritmetica*, pp 37-38, Per il longhi, Bologna;

[14] Giacardi L., Roero C. S., (1979) *La matematica delle civiltà arcaiche: Egitto, Mesopotamia, Grecia*, Torino, Stampatori; 2ª ed. Università Popolare 2010, pp. 57-110;

[15] Giusti E., (2006) *Congetture sulle tavole egizie di frazioni* in L. Giacardi, C.S. Roero (a cura di) Matematica, Arte e Tecnica nella Storia. In memoria di Tullio Viola, Torino, Kim Williams Books, pp. 161-182. (con studio sulle frazioni egizie in Leonardo Pisano, Liber Abbaci);

[16] Imhausen A., (2003) *Calculating the Daily Bread: Rations in Theory and Practice*, Historia Mathematica 30;

[17] Khinchin A. Ya, (1964), *Continued fractions*, University of Chicago press;

[18] Lisarelli G., Baccaglini-Frank A. E., Poli F., (2019) *Progettare attività didattiche inclusive: un esempio di percorso sulle frazioni*, RicercAzione, vol. 11, n. 1, pp. 169-189;

[19] Peet, T. E. (1923). The Rhind mathematical papyrus British Museum 10057 and 10058: introduction, transcription, translation and commentary. University Press.

[20] Ritter J. (1995): *Measure for Measure: Mathematics in Egypt and Mesopotamia*. In: Michel Serres (ed.), A History of Scientific Thought: 44-72, Oxford: Blackwell.

[21] Ritter J., (2000): *Egyptian Mathematics*. In: Helaine Selin (ed.), Mathematics Across Cultures. The History of Non-Western Mathematics: pp. 115-136, Dordrecht/Boston/London: Kluwer;

[22] Robotti, E., Antonini, S., Baccaglini-Frank, A. (2015). Coming to see fractions on the number line. Krainer, K., Vondrová, N., (Eds.). Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, (pp. 1975-1981)

[23] Robotti E., (2016), *Frazioni sul filo. Proposte e strategie per la scuola primaria*, Difficoltà di apprendimento e didattica inclusiva, vol. 3, n. 4, pp. 449-467;

[24] Rodet, (1878), *Sur un manuel du calculateur découvert dans un papyrus égyptien*, Bulletin de la S. M. F., tome 6, pp. 139-149;

[25] Rosner H.S., (2014), *An Algorithmic Approach to Pick's Theorem*;

[26] Rossi C., Tout C.A., (2002), *Were the Fibonacci Series and the Golden Section Known in Ancient Egypt?*, Historia Mathematica 29, pp. 101-113;

[27] Russo L., (2001), *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli

[28] Zanardo A., (2017-2018, *Egyptian fractions*, School I. S. I. S. S. Casagrande, Pieve di Soligo, Treviso, University of Padova.

Silvia Cerasaro

Silvia Cerasaro è un'insegnante nella Scuola Secondaria di Secondo Grado, laureata in Matematica presso l'Università Tor Vergata di Roma e attualmente Dottoranda in Matematica presso lo stesso ateneo. Ha insegnato nelle Scuole Secondarie di Primo e di Secondo grado, oltre che nella Scuola dell'Infanzia, da cui ha apprezzato il senso del gioco e della manipolazione. Nata il 30/10/1978 e residente ad Anagni (FR), studia e sperimenta in aula. Ciò le ha permesso di intraprendere attività di collaborazione come formatore presso la Scuola d'Autunno del Dipartimento di Matematica dell'Università Tor Vergata. È anche collaboratrice del progetto di ricerca sul Liber Abaci di Fibonacci, i cui scopi e materiali di studio sono presenti sul sito www.progettofibonacci.it.

Laura Tomassi

Laura Tomassi è insegnante nella Scuola Secondaria di Primo Grado, nata a Rieti il 06/03/1973, laureata in Chimica presso l'Università degli Studi di Roma, La Sapienza. Ha conseguito il Dottorato di Ricerca in Biologia Cellulare e Molecolare presso l'Università degli Studi di Tor Vergata ed è attualmente Dottoranda in Matematica presso lo stesso ateneo. Ha insegnato nelle Scuole Secondarie di Secondo Grado e negli Istituti di Formazione Professionale. L'esperienza didattica nel campo delle Scienze Naturali e della Matematica ha acceso il suo interesse per lo studio, la progettazione la sperimentazione di attività laboratoriali riproposte in qualità di formatrice presso i corsi dell'Accademia dei Lincei e presso la Scuola D'Autunno dell'Università di Tor Vergata. È inoltre collaboratrice del progetto di ricerca sul Liber Abaci di Fibonacci, www.progettofibonacci.it.