Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Vieri Benci, Lorenzo Luperi Baglini

Tre percorsi nonstandard

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2023), n.1, p. 57–78.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2023_1_8_1_57_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2023.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 8, N. 1, aprile 2023, 57-78

Tre percorsi nonstandard

Vieri Benci
Università di Pisa
E-mail: vieri.benci@gmail.com

Lorenzo Luperi Baglini
Università di Milano
E-mail: lorenzo.luperi@unimi.it

Sommario: *Introdotta da Abraham Robinson negli anni sessanta del secolo scorso, l'analisi nonstandard è oggi una disciplina che ha trovato una moltitudine di applicazioni in vari settori della matematica e oltre. In questo articolo, intendiamo fornire una panoramica di questa teoria trattandone tre aspetti diversi: uno didattico, uno fondazionale e uno applicato*

Abstract: *Introduced by Abraham Robinson in the 1960s, nonstandard analysis is today a discipline that has found many applications in various fields of mathematics and beyond. In this article, we intend to provide an overview of this theory by discussing three aspects: didactic, foundational, and applied*

In origine, l'analisi nonstandard è nata per cercare di risolvere un problema che era stato fondamentale per lungo tempo in matematica, riguardante l'esistenza di campi ordinati $\mathbb{K}$ contenenti infinitesimi non nulli; ricordiamo che un qualsiasi $k \in \mathbb{K}$ è detto infinitesimo se $|k| < \frac{1}{n}$ per ogni ([1]) $n \in \mathbb{N}$. Quando il campo $\mathbb{K}$ contiene infinitesimi non nulli, è detto non archimedeo.

Come noto, non tutti i campi ordinati sono non archimedei; anzi, i due campi ordinati più utilizzati nelle applicazioni, cioè $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, sono archimedei. Nonostante questo, la storia dell'uso degli infinitesimi è ricca ed interessante, e coinvolge matematici del calibro di Archimede, Leibniz, Newton, Eulero e molti altri; rimandiamo a [2], [4] per una trattazione degli aspetti storici. In particolare, gli infinitesimi furono particolarmente importanti per la nascita del calcolo. La difficoltà nel formalizzare sia la loro costruzione che il loro utilizzo fu una delle ragioni per cui vennero soppiantati dal formalismo $\epsilon - \delta$ di Weierstrass, lasciando così aperta per quasi un secolo la possibilità o meno di costruire un campo non archimedeo $\mathbb{K}$ che estendesse i reali preservandone, però, tutte le proprietà elementari. Ci furono vari tentativi di risolvere questo problema presentando tipi diversi di costruzioni di estensioni non archimedee dei reali, che coinvolsero tra gli altri Du Bois-Reymond [29], Veronese [39, 40], Levi-Civita [29], Peano [35] e Hilbert [20]. Nessuna delle costruzioni proposte, però, riuscì veramente a risolvere il problema originale, fino a che Robinson non introdusse l'analisi nonstandard nei primi anni sessanta del secolo scorso. Da quel momento, l'analisi nonstandard ha visto varie presentazioni alternative, ed ancor più applicazioni disparate in tutti (o quasi) i campi della matematica, con incursioni pure in altre discipline quali la fisica e l'economia.

In questo articolo, intendiamo procedere su tre fronti. Il primo, contenuto nel Capitolo 1, è quello di dare una presentazione intuitiva del calcolo con infinitesimi, pensata per essere adattabile anche ad un percorso didattico a livello liceale; in questo

Accettato: il 12 aprile 2023.

([1]) Seguiamo la pratica usuale di identificare $\frac{1}{n}$ con l'inverso di $\overbrace{1+1++1}^{n \text{ volte}}$ in $\mathbb{K}$.

capitolo non utilizzeremo nessun concetto avanzato di matematica, arrivando a presentare gli infinitesimi partendo dal concetto di numerosità degli elementi di un insieme. Nel Capitolo 2, invece, ci avvicineremo all'approccio di Robinson e, più in particolare, presenteremo la più diffusa delle costruzioni di modelli nonstandard, gli ultraprodotti. Infine, nel Capitolo 3 discuteremo alcune applicazioni dell'analisi nonstandard, concentrandoci su alcuni metodi che sono stati introdotti recentemente per approcciare la teoria combinatoria dei numeri.

1. – Il percorso didattico

Come promesso, in questa sezione introdurremo i numeri infiniti ed infinitesimi in un modo che ci sembra così naturale ed elementare da poter essere utilizzato anche in un possibile percorso didattico nella scuola superiore, in linea con altre esperienze di insegnamento dell'analisi nonstandard nelle scuole superiori nate negli ultimi anni (si vedano, ad esempio, [12, 8, 13, 41, 24, 26]).

Tipicamente, i numeri infinitesimi vengono introdotti in relazione al calcolo infinitesimale. Dal punto di vista didattico questo significa che i numeri infiniti ed infinitesimi vengono introdotti durante l'ultimo anno o gli ultimi anni delle scuole superiori. Sarebbe però auspicabile, forse, introdurre i numeri infinitesimi prima, senza dover necessariamente seguire lo sviluppo culturale che abbiamo avuto noi docenti. Infatti, ci sono molti aspetti estremamente interessanti dei numeri infiniti ed infinitesimi che possono essere sviluppati anche prima del calcolo infinitesimale, addirittura prima dell'introduzione dei numeri reali. Tra le motivazioni che suggeriscono l'introduzione dei numeri infiniti e infinitesimi nelle scuole superiori fino dai primi anni possiamo elencare le seguenti:

1. l'argomento è affascinante e potrebbe stimolare l'interesse verso la matematica;
2. esistono alcune applicazioni della matematica non archimedea al di fuori del calcolo infinitesimale che possono essere fatte e capite con strumenti relativamente elementari nei primi anni delle superiori, per esempio nel calcolo delle probabilità (si veda, e.g. [9]);
3. la capacità di manipolare gli infinitesimi renderà quasi banale la comprensione e le tecniche del calcolo differenziale;
4. l'uso dei numeri infiniti e infinitesimi facilita lo sviluppo delle capacità di astrazione dello studente.

Per motivare meglio questo nostro punto di vista, partiamo da un'apparente digressione nel cuore della matematica per rispondere ad una domanda: come facciamo a contare?

1.1 – *L'idea del contare*

L'operazione del *contare* e l'idea di *numero naturale* sono alla base di tutta la matematica e storicamente la precedono. Questi concetti non solo sono presenti in tutte le culture umane, ma c'è una certa evidenza scientifica che molti animali superiori (mammiferi e uccelli) siano capaci di contare, almeno fino a numeri relativamente bassi. Pertanto è possibile che il contare ed i numeri siano idee geneticamente innate. Nonostante ciò, se analizziamo criticamente l'idea di numero naturale si incorre in una serie di problemi tecnici e filosofici, anche molto profondi, che sono stati oggetto di riflessione per almeno 2500 anni. Le cose si fanno ancora più complicate se vogliamo estendere l'idea del contare agli insiemi infiniti.

Pur senza voler analizzare criticamente la nozione di numero, possiamo descrivere, almeno sommariamente, un modo di operare con i numeri finiti nella descrizione della realtà e cercare di estendere ciò ai numeri infiniti. Dato un qualunque insieme A, denoteremo con $\boldsymbol{n}(A)$ il numero di elementi contenuti in A. Per esempio abbiamo che

$$\boldsymbol{n}(\{\text{vaghe stelle dell'Orsa}\}) = 7,$$
$$\boldsymbol{n}(\{\text{cavalieri dell'Apocalisse}\}) = 4.$$

Anche senza esaminare il significato ontologico della nozione di numero, possiamo dare delle regole generali riguardo ai numeri. Più in particolare, ci sono almeno due principi generali che sembrano intimamente legati alle nostre idee di numero e contare.

- **Principio di Hume** *(o di Cantor) – Il numero degli elementi di A è uguale al numero degli elementi di B se tra A e B vi è una corrispondenza biunivoca.*

Per esempio, si ha che

$$\boldsymbol{n}(\{\text{cavalieri dell'Apocalisse}\}) = \boldsymbol{n}(\{\text{punti cardinali}\}),$$

come si può notare dalla corrispondenza biunivoca seguente:

Pestilenza	$\longleftrightarrow$	Est
Guerra	$\longleftrightarrow$	Sud
Carestia	$\longleftrightarrow$	Ovest
Morte	$\longleftrightarrow$	Nord

Questo principio permette di definire i numeri finiti; ad esempio, il numero 4 potrebbe essere definito come quell'ente che accomuna tutti gli insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei cavalieri dell'Apocalisse. Ma i numeri relativi agli insiemi finiti soddisfano anche un altro principio fondamentale, che chiameremo principio di Euclide.

- **Principio di Euclide** – *L'intero è maggiore della parte; ovvero, dati due insiemi A e B tali che A sia una parte propria di B, allora*

$$\boldsymbol{n}(A) < \boldsymbol{n}(B). \tag{1}$$

Per esempio, si possono considerare gli insiemi

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$
$$A = \{x \in B \mid x \text{ pari}\}$$

In questo caso vale la disuguaglianza (1), che si riduce al semplice fatto che $3 < 6$.

È tutto chiaro? In effetti è tutto molto semplice finché ragioniamo con insiemi finiti, ma le cose si complicano se passiamo ad insiemi infiniti. Questi due principi, nonostante appaiano naturali, sono contraddittori. Galileo è uno dei tanti ad aver messo in evidenza questa contraddizione, osservando che i numeri quadrati Q sono solo una parte di tutti i numeri, ma possono essere posti in corrispondenza biunivoca con la totalità dei numeri naturali $\mathbb{N}$ secondo la mappa $(\cdot)^2$ che manda $n \in \mathbb{N}$ in $n^2 \in Q$.

Cantor capì che eliminando uno dei due principi (il principio di Euclide) si sarebbe ottenuta una teoria "bizzarra", ma coerente, ottenendo così la teoria dei numeri cardinali. Ma è possibile una teoria che elimini il principio di Hume ma preservi quello di Euclide? La risposta è sì, come andremo ora a spiegare.

1.2 – *Il numero alfa e le numerosità infinite*

Ad ogni insieme finito si può associare un numero naturale: il numero dei suoi elementi, ovvero la sua *numerosità* ([2]). Dunque possiamo generalizzare questa idea ed associare una numerosità anche agli insiemi infiniti. Per esempio, possiamo associare un numero all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Dato che nessun numero naturale è così grande da poter rappresentare la numerosità di $\mathbb{N}$, abbiamo bisogno di introdurre un nuovo simbolo ([3]).

DEFINIZIONE 1 – *Denoteremo con α la numerosità dell'insieme dei numeri naturali*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

Il numero α può costituire un primo esempio di numero infinito e ne genera altri come

$$\alpha + 1, \quad \alpha^2, \quad 2\alpha, \quad 3\alpha^2 + 2\alpha.$$

Avendo rimpiazzato il Principio di Hume col Principio di Euclide, qual'è il significato di questi numeri? Siamo sicuri che questi numeri possano essere parte di una teoria libera da contraddizioni? Per rispondere, stabiliamo alcune regole che valgono per gli insiemi finiti e le estendiamo agli insiemi infiniti. Queste regole verranno enunciate assiomaticamente:

ASSIOMA 2 – *Esiste una mappa surgettiva, chiamata numerosità e denotata con num, che ad ogni insieme E fa corrispondere un numero $num(E)$ in modo che per tutti gli elementi a, b e tutti gli insiemi A, B valgano le proprietà seguenti:*

1. $num(\{a\}) = num(\{b\})$;
2. *se $A \subset B$, allora*

$$num(A) < num(B);$$

([2]) Per una trattazione più approfondita, ma sempre volutamente divulgativa, rimandiamo a [31]; il concetto di numerosità è apparso per la prima volta in [5], e una descrizione dettagliata di questa teoria in tutte le sue varie sfaccettature può essere letta in [6].

([3]) Questa operazione non dovrebbe sorprendere: non è poi così diversa da introdurre il simbolo i per denotare la radice di -1 ed estendere i reali ai complessi.

3. *se* $A \cap B = \emptyset$ $num\ (A) = num(A')$, $num(B) = num(B')$, *allora*
$$num(A \cup B) = num(A' \cup B');$$
4. *se* $num(A) = num(A')$, $num(B) = num(B')$, *allora*
$$num(A \times B) = num(A' \times B');$$
5. $num(A \times \{b\}) = num(A)$.

Gli assiomi 2.3 e 2.4 permettono di definire operazioni di somme e prodotti tra numerosità, aventi $0 = num(\emptyset)$ e $1 = num(\{\emptyset\})$ come elementi neutri; in aggiunta a 2.1, queste ci dicono che, sugli insiemi finiti, le numerosità si comportano come i numeri naturali. In effetti, l'assioma delle numerosità dovrebbe apparire di per sè evidente perchè abbiamo semplicemente generalizzato quello che è vero per i numeri naturali.

Nel tipico percorso didattico classico, una volta introdotti i naturali si può passare ad introdurre i razionali e, in seguito, i reali. Se, però, pensiamo ai naturali come alle cardinalità degli insiemi finiti, avendo a disposizione le numerosità si apre un percorso alternativo: perché non provare a seguire il percorso descritto sopra, ma partendo dalle numerosità anziché dai naturali? Questo è quanto vogliamo provare a fare ora.

1.3 – *Il continuo euclideo*

Siamo oramai abituati ad identificare l'idea più semplice ed intuitiva di continuo con i reali. Però, storicamente, la prima modellizzazione intuitiva del continuo è stata geometrica ed è stata fornita dalla retta euclidea, che qui denoteremo con $\mathbb{E}$, i cui elementi saranno chiamati *numeri euclidei*. Questa modellizzazione del continuo non è importante solo per la geometria, ma per tutte le scienze "quantitative". Infatti, il nostro intuito è che le grandezze possano essere "rappresentate" da punti sulla retta euclidea (una volta scelta l'origine O ed un punto U che rappresenta l'unità). Pertanto possiamo enunciare il seguente enunciato "metamatematico":

Alla misura di ogni grandezza possibile possiamo far corrispondere un numero euclideo.

Il nostro obiettivo, nel resto di questo capitolo, è di riuscire ad identificare assiomaticamente alcune proprietà fondamentali di $\mathbb{E}$ in modo da descriverne, almeno in parte, gli elementi. Classicamente, in una scuola superiore questo verrebbe fatto partendo dai naturali, introducendo i razionali ed arrivando ad identificare $\mathbb{E}$ con $\mathbb{R}$. In questo capitolo però vogliamo seguire un approccio diverso, più vicino allo sviluppo storico del calcolo infinitesimale: infatti, gli infinitesimi, se pur in modo non rigoroso, sono stati usati sistematicamente fin dal XVII secolo (Leibnitz) mentre i numeri reali, definiti in modo rigoroso da rendere possibile il calcolo infinitesimale, hanno fatto la loro comparsa verso la fine del XIX secolo (Cantor e Dedekind). ([4]) Da qui, si potrebbe argomentare che il concetto di numero reale è più sofisticato e sottile di quello di numero infinitesimo; forse, è più naturale introdurre prima i numeri infinitesimi ed utilizzare questi ultimi per introdurre i numeri reali. Sostituire le numerosità ai naturali come punto di partenza della nostra intuizione permette un approccio di questo tipo.

L'approccio che seguiremo per assiomatizzare (parzialmente) $\mathbb{E}$ è, superficialmente, analogo a quello classico, ma con varie differenze anche profonde, la prima delle quali è di avere le numerosità come punto di partenza. Questo ci pone da subito in un ambiente non archimedeo: dal nostro punto di vista $\mathbb{E}$ deve contenere anche α, perché α è una grandezza e la retta euclidea deve contenere le grandezze.

Il passo successivo, argomento della prossima sezione, è trovare un analogo non archimedeo dei razionali.

1.3.1 – I numeri α-razionali. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non è sufficiente, nemmeno in senso classico, per modellizzare $\mathbb{E}$, se vogliamo che con $\mathbb{E}$ si possano descrivere tutte le grandezze. Alla luce di quanto discusso nella sezione 1.3, i motivi sono (almeno) due:

1. i numeri razionali non permettono di descrivere le misure di grandezze che sono incommensurabili rispetto all'unità di misura: per esempio $\sqrt{2}$;
2. i numeri razionali non permettono di descrivere le grandezze non archimedee, come per esempio la numerosità di $\mathbb{N}$.

([4]) Una breve presentazione storica di questi aspetti si trova in [7]; per un'analisi più dettagliata, si veda [2].

Il secondo problema si può risolvere richiedendo che $\alpha \in \mathbb{E}$. Per risolvere il primo, abbiamo bisogno di fare un po' di lavoro intermedio. Sino a questo punto, cosa è lecito aspettarsi di trovare in $\mathbb{E}$? Sicuramente i razionali; pertanto $3, 7, -\frac{5}{4}$ sono particolari numeri euclidei; come già discusso, vogliamo anche $\alpha \in \mathbb{E}$. Allora, a partire da α e dai numeri razionali, usando le operazioni di campo si possono quindi definire nuovi numeri euclidei come ad esempio l'inverso di α

$$\eta := \frac{1}{\alpha}$$

ed i numeri ricavabili con operazioni aritmetiche da questi, come ad esempio

$$\alpha + 1;\ 7\alpha;\ 3\eta;\ \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2};\ \frac{4\alpha^3 - \alpha + 2\eta}{\alpha^2 + 2\eta}.$$

Più precisamente, possiamo dare la seguente definizione ([5]):

DEFINIZIONE 3 – *L'insieme dei numeri α-razionali consiste dei numeri della forma*

$$\xi = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}. \tag{2}$$

ove $P(x)$ e $Q(x) \neq 0$ sono polinomi a coefficienti interi.

Non è difficile dimostrare che i numeri α-razionali formano un campo che, chiaramente, contiene sia tutti i numeri razionali che α; inoltre su tale campo possiamo definire una struttura d'ordine nel seguente modo: porremo

$$\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} = \frac{a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0}{b_m\alpha^m + \cdots + b_1\alpha + b_0} > 0$$

se e solo se $a_n/b_m > 0$ e porremo

$$\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} > \frac{P'(\alpha)}{Q'(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} - \frac{P'(\alpha)}{Q'(\alpha)} > 0.$$

([5]) Il lettore esperto riconoscerà facilmente che stiamo semplicemente costruendo il campo ordinato $\mathbb{Q}(\alpha)$, con α infinito positivo e trascendente su $\mathbb{Q}$.

In particolare, questo ordine estende quello tra razionali e, dato comunque $q \in \mathbb{Q}$, è immediatamente verificato che $\alpha > q$, cioè α è un elemento infinito nel campo dei numeri α-razionali. In buona sintesi: a questo livello, gli α-razionali sono un sostituto naturale di $\mathbb{Q}$.

Fino a questo punto, quindi, possiamo dire che $\mathbb{E}$ deve contenere l'insieme dei numeri α-razionali. Dobbiamo aspettarci che questi due insiemi siano uguali?

La risposta, nuovamente, è no. In effetti, la nostra costruzione non risolve il primo problema affrontato ad inizio sezione, esattamente come classicamente non lo risolvono i razionali. Questo perché la dimostrazione classica della non razionalità di $\sqrt{2}$ può essere facilmente adattata al contesto α-razionale. È necessario, quindi, fare un passo indietro ed introdurre i reali con i tagli di Dedekind?

No, come andremo ora a mostrare.

1.3.2 **– I numeri reali**. Il numero α è infinito, il suo reciproco è infinitesimo. Come in qualsiasi altro contesto non archimedeo, la presenza di numeri di questo tipo porta alla definizione seguente.

DEFINIZIONE 4. – *Un numero euclideo x si dice infinito (o illimitato) se comunque si scelga un numero naturale k*

$$|x| > k.$$

Un numero euclideo x si dice limitato se non è infinito, ovvero se esiste un numero naturale k tale che

$$|x| < k.$$

Un numero euclideo x si dice infinitesimo se per ogni numero naturale k

$$|x| < \frac{1}{k}.$$

Per esempio, è facile verificare che i numeri

$$\alpha + 1;\ 7\alpha;\ \alpha^2;\ \frac{\alpha^3}{2};\ \frac{\alpha + 2}{5};$$

sono infiniti. Similmente possiamo verificare che i numeri

$$5\eta;\ \frac{7}{\alpha - 8};\ 2\eta^2 + \eta^3$$

sono infinitesimi. Due numeri x, y si dicono infinitamente vicini se la loro differenza è un infinitesimo; in tal caso, scriveremo

$$x \sim y.$$

Classicamente, se intersecassimo in $\mathbb{R}$ tutti gli intervalli $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ per $n \in \mathbb{N}$, l'intersezione sarebbe vuota. In $\mathbb{E}$, invece, questa intersezione coincide con l'insieme degli infinitesimi positivi. Come penultimo principio, richiediamo ad $\mathbb{E}$ di soddisfare la generalizzazione di questa proprietà a successioni arbitrarie di intervalli.

- (**Principio "forte" delle scatole cinesi**). *Sia I_n una successione di intervalli aperti non vuoti in $\mathbb{E}$ tali che*

$$I_{n+1} \subset I_n;$$

allora

$$\bigcap I_n \neq \emptyset.$$

Il principio delle scatole cinesi è strettamente legato all'esistenza dei numeri infinitesimi; infatti se prendiamo la successione di intervalli $I_n := \left(0, \frac{1}{n}\right)$ si ha che l'insieme $\bigcap I_n$ contiene tutti gli infinitesimi positivi. Per completare la nostra descrizione dei numeri euclidei è necessario enunciare anche un altro principio che permette di fissare alcune proprietà algebriche della relazione $\sim$.

- (**Principio della parte standard**). *Ad ogni numero euclideo limitato x possiamo far corrispondere un numero euclideo $st(x)$, chiamato parte standard di x, in modo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:*
  1. *se x è infinitesimo, allora $st(x) = 0$;*
  2. *se x è un numero razionale, allora $st(x) = x$;*
  3. *$st(x) \geq 0$ se $x \geq 0$;*
  4. *$st(st(x)) = st(x)$;*
  5. *l'operazione st è coerente con le operazioni di somma e prodotto, ovvero*

$$st(x + y) = st(x) + st(y);$$
$$st(xy) = st(x) \cdot st(y);$$

  6. *l'operazione st è debolmente crescente: se $x > y$ allora $st(x) \geq st(y)$.*

Il principio della parte standard ci permette di introdurre il concetto di numero reale in un modo che si discosta significativamente dalla tradizione.

DEFINIZIONE 5 – *Un numero euclideo x si dice standard* ([6]) *se $x = st(x)$. L'insieme dei numeri standard verrà denotato con $\mathbb{S}$.*

Nella nostra formalizzazione della retta euclidea, dunque, i numeri standard sono quei numeri euclidei limitati che coincidono con la loro parte standard; la retta reale, cioè, è un sottoinsieme della retta euclidea. È pressoché immediato dimostrare che $\mathbb{S}$ è un campo, la cui definizione è probabilmente più semplice ed intuitiva per uno studente di quelle usualmente fornite per costruire $\mathbb{R}$ (tagli di Dedekind, sezioni di Cauchy o simili). Inoltre, vale la seguente caratterizzazione dei numeri euclidei finiti.

TEOREMA 6. – *Ogni numero euclideo finito ξ può essere scritto univocamente come $\xi = r + \varepsilon$ ove r è un numero standard e ε è un infinitesimo.*

Dimostrazione. In primo luogo dimostriamo che $st(x) = 0 \Rightarrow x \sim 0$, cioè che gli infinitesimi sono esattamente i numeri euclidei con parte standard uguale a 0. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $x \not\sim 0$; allora esisterebbe $n \in \mathbb{N}$, tale che

$$x \geq \frac{1}{n} \quad \text{oppure } x \leq -\frac{1}{n},$$

da cui

$$st(x) \geq st\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad \text{oppure } st(x) \leq st\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}.$$

Da questo segue che $st(x) \neq 0$, il che è assurdo.

Adesso, sia ξ un numero euclideo finito, sia $r = st(\xi)$ e sia $\varepsilon = \xi - r$. Si ha che

$$st(\varepsilon) = st(\xi - r) = st(\xi) - st(r) = r - r = 0$$

da cui, per quanto detto sopra, si deduce che ε è un infinitesimo.

([6]) Avremmo voluto chiamare direttamente questi numeri "reali" visto che nel nostro approccio, filosoficamente, gli standard sono esattamente i reali. Temendo che questo avrebbe rischiato di creare una certa confusione nel lettore, abbiamo optato per questo nome, rimandando la verifica effettiva dell'uguaglianza tra standard e reali al Teorema 7.

Infine, se fosse $\xi = r + \varepsilon = r' + \varepsilon'$, si avrebbe $r = st(r + \varepsilon) = st(r' + \varepsilon') = r'$, da cui segue immediatamente anche che $\varepsilon = \varepsilon'$. La scrittura, quindi, è unica. □

Adesso, possiamo dimostrare che i numeri standard formano un campo ordinato completo ovvero sono isomorfi al campo dei numeri reali costruito in un qualunque altro modo. In altre parole, in questo approccio, le retta reale è un sottoinsieme della retta euclidea ed è quest'ultima che va identificata con la retta geometrica della nostra intuizione.

TEOREMA 7. – $\mathbb{S}$ *è un campo ordinato completo.*

Dimostrazione. Va mostrata soltanto la completezza che come è ben noto è equivalente al principio delle scatole cinesi "debole" nel quale si richiede che gli intervalli I_n siano chiusi. Dunque sia $I_n = [a_n, b_n]$ una successione di intervalli chiusi in $\mathbb{S}$. Sia I_n l'intervallo aperto

$$\widetilde{I_n} = \{x \in \mathbb{E} \mid a_n < x < b_n\};$$

per il principio delle scatole cinesi forte esiste $\xi \in \bigcap \widetilde{I}_n$. Dato che, banalmente,

$$a_n = st(a_n) \leq st(\xi) \leq st(b_n) = b_n,$$

vale

$$x := st(\xi) \in \bigcap I_n$$

e dunque $\mathbb{S}$ è un campo ordinato completo. □

A questo punto potremmo, nel nostro percorso didattico, chiamare di diritto reali i numeri standard, ed utilizzare il ben più comodo e noto simbolo $\mathbb{R}$ per denotarli.

I concetti esposti fino a qui sono già sufficienti per trattare i tipici argomenti di analisi di base di un corso di matematica delle superiori, quali continuità, derivabilità ed integrazione. Ad esempio, la definizione di continuità può essere data in modo estremamente intuitivo come segue:

DEFINIZIONE 8. – *Una funzione f è continua in un punto x_0 se per ogni infinitesimo ε,*

$$f(x_0 + \varepsilon) \sim f(x_0).$$

Equivalentemente: f è continua in x_0 se assume valori infinitamente vicini ad $f(x_0)$ in punti infinitamente vicini ad x_0. Questo tipo di definizioni hanno una chiarezza intuitiva decisamente maggiore rispetto alle formulazioni in termini di ε, δ, che sono di solito molto più complicate da memorizzare e capire da parte degli studenti. Ad esempio, per dimostrare che la composizione $f \circ g$ di funzioni continue è continua, basta osservare che, dato un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$ e un ε infinitesimo, si ha che $g(x_0 + \varepsilon) \sim g(x_0)$ per continuità di g, quindi $f(g(x_0 + \varepsilon)) \sim f(g(x_0))$ per continuità di f.

Simile è il caso della derivata: diremo che una funzione f è derivabile nel punto x_0 con derivata L se per ogni infinitesimo $\varepsilon \neq 0$ si ha

$$st\left(\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}\right) = L. \tag{3}$$

Anche questa definizione, così come quella di continuità, è estremamente intuitiva e permette di dimostrare in modo molto semplice molte delle proprietà di base della derivata. In questa sede non abbiamo spazio per mostrare come, in maniere analoghe, si possano introdurre e studiare anche molti altri argomenti base dell'analisi. Rimandiamo il lettore interessato a trattazioni simili quali, ad esempio, [12, 11, 13, 41, 24, 26].

1.4 – *Alcune considerazioni sul percorso didattico*

Nelle sezioni precedenti abbiamo descritto l'insieme dei numeri euclidei in modo semi-formale, così come potrebbe essere insegnato in una scuola superiore. In questa sezione daremo una definizione formale precisa, che esula dall'intento didattico delle sezioni precedenti, per soddisfare le esigenze di un lettore con già buone conoscenze matematiche che voglia saperne di più; ovvero, definiremo un modello dei numeri euclidei in *ZFC*.

Prendiamo la superstruttura su $\mathbb{R}$, che è definita come segue ([7]):

$$\Lambda = \mathbb{V}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_n(\mathbb{R}),$$

dove gli insiemi $\mathbb{V}_n(\mathbb{R})$ sono definiti per induzione:

$$\mathbb{V}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

([7]) In questa costruzione, i numeri reali sono pensati come atomi, cioè ogni $r \in \mathbb{R}$ è pensato come un'entità primitiva e non come un insieme.

e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{V}_{n+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{V}_n(\mathbb{R}) \cup \wp(\mathbb{V}_n(\mathbb{R})). \tag{4}$$

L'idea dietro alla costruzione della superstruttura $\mathbb{V}(\mathbb{R})$ è che questa debba contenere tutti gli oggetti della normale pratica matematica ([8]) che ci potrebbero servire per studiare proprietà di $\mathbb{R}$. Ad esempio, potremmo essere interessati a proprietà di $\mathbb{R}$ che ci portino a parlare di suoi sottoinsiemi, o di certi spazi di funzioni, o di insiemi di spazi di funzioni, e così via. Tutte queste costruzioni, identificando le coppie con le coppie di Kuratowski e le funzioni e le relazioni con i loro grafici, vivono in $\mathbb{V}(\mathbb{R})$.

Si ponga adesso

$$\mathfrak{L} := \{\lambda \in \wp(\mathbb{V}(\mathbb{R})) \mid \lambda \text{ è un insieme finito}\}.$$

Una funzione $\varphi : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}$ si chiama *rete*. Adesso poniamo

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{L}, \mathbb{R}) = \\ = \left\{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathfrak{L}} \mid \exists A \in \mathbb{V}(\mathbb{R})\ \forall \lambda \in \mathfrak{L}\ \varphi(\lambda \cap A) = \varphi(\lambda)\right\}.$$

L'insieme $\mathfrak{F}(\mathfrak{L}, \mathbb{R})$ ha una struttura naturale di anello parzialmente ordinato ponendo, $\forall \varphi, \psi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{L}, \mathbb{R})$,

$$(\varphi + \psi)(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda);$$

$$(\varphi \cdot \psi)(\lambda) = \varphi(\lambda) \cdot \psi(\lambda);$$

$$\varphi \geq \psi \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathfrak{L}, \varphi(\lambda) \geq \psi(\lambda).$$

DEFINIZIONE 9. – *L'insieme $\mathbb{E}$ dei numeri euclidei (o retta euclidea) è un campo ordinato per il quale esiste una mappa*

$$J : \mathfrak{F}(\mathfrak{L}, \mathbb{R}) \to \mathbb{E}$$

che soddisfa le seguenti proprietà ([9]): $\forall \varphi, \psi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{L}, \mathbb{R})$,

1. $J(\varphi + \psi) = J(\varphi) + J(\psi); J(\varphi \cdot \psi) = J(\varphi) \cdot J(\psi)$;
2. $\varphi \geq \psi \Rightarrow J(\varphi) \geq J(\psi)$;
3. *se* $\forall A \in \Lambda$, *poniamo*

$$\varphi_A(\lambda) = \varphi(A \cap \lambda)$$

allora

$$\varphi_{A \times B}(\lambda) = \varphi_A(\lambda) \cdot \varphi_B(\lambda);$$

4. *se denotiamo con C_r la rete identicamente uguale a r, allora* $\forall r \in \mathbb{E}$,

$$J(C_r) = r.$$

Poiché $\mathbb{E} = \mathfrak{F}(\mathfrak{L}, \mathbb{R})/\ker(J)$, è possibile dimostrare (e rimandiamo a [3] per i dettagli) che $\mathbb{E}$ è un campo ordinato che estende propriamente i reali. In virtù della sua definizione, oltre ad essere un'estensione elementare ([10]) dei reali, $\mathbb{E}$ soddisfa alcune proprietà aggiuntive, come ad esempio la proprietà 9.3. Queste proprietà forniscono ad $\mathbb{E}$ una struttura interessante che permette di definire nuove entità matematiche. Ad esempio, la numerosità di un qualunque insieme $A \in \Lambda$ discussa nella sezione 1.2 è qui definibile in modo esplicito semplicemente ponendo

$$num(A) := J(v_A),$$

dove $v_A(\lambda) := |A \cap \lambda|$ è la cardinalità finita dell'intersezione tra A e λ.

Da un punto di vista didattico la teoria delle numerosità offre la possibilità di generalizzare la nozione di numero naturale ad insiemi infiniti mediante l'Assioma 2. Il fatto che la numerosità abbia un modello in ZFC e che dunque non porti a contraddizioni è una questione che certamente esula da ciò che si può insegnare al primo anno di un liceo e pertanto la sua non-contradditorietà va accettata. D'altra parte, usando il calcolo letterale e le proprietà dei polinomi, lo studente può familiarizzarsi con i numeri infiniti e dimostrare varie relazioni tra le diverse classi di numeri. A questo punto i numeri α-razionali appaiono come la naturale generalizzazione dei numeri razionali. Inoltre, il fatto che la retta geometrica (identificando punti e numeri) contenga anche i numeri α-razionali e dunque gli infinitesimi è una questione discussa da almeno tre secoli e dà spunto ad interessanti questioni filosofiche. Da un punto di vista strettamente tecnico, gli infinitesimi

([8]) Ovviamente, "normale pratica" ha significati radicalmente diversi per matematici diversi; alcuni necessitano usualmente di costruzioni ben più complicate di quanto contenuto in una superstruttura. Per quanto serve a noi qua, però, le superstrutture sono più che sufficienti.

([9]) La dimostrazione dell'esistenza di un campo $\mathbb{E}$ che soddisfa questa definizione si può trovare ad esempio in [10].

([10]) Si veda il Capitolo 2 per la precisazione del concetto di estensione elementare.

semplificano la definizioni di molti concetti matematici e facilitano i calcoli per cui è conveniente usarli.

Avendo in mente la retta geometrica, uno studente del XXI secolo, al pari di un matematico del XVIII secolo, non dovrebbe provare alcun disagio nel maneggiare gli infinitesimi. Il disagio colpisce i matematici del XX secolo perchè sono abituati ad identificare i numeri reali con le sezioni di Dedekind ed a ragionare con gli ε, δ di Weierstrass.

Per quanto riguarda le funzioni elementari, esse vanno pensate come funzioni definite sulla retta euclidea e non sulla retta reale. Per esempio, le funzioni trigonometriche, a livello dei licei, vengono introdotte in modo geometrico e quindi se identifichiamo la retta geometrica con la retta euclidea esse son ben definite anche sui numeri euclidei. Accettando assiomaticamente il Principio della parte standard, si può definire la tangente ad una qualunque curva algebrica semplicemente prendendo la parte standard di una retta secante la curva in due punti infinitamente vicini,

Dal punto di vista del rigore matematico, la prima difficoltà si incontra nella definizione della funzione derivata che in genere viene insegnata l'ultimo anno. Infatti la derivata di una funzione si definisce in un punto reale standard mediante la Definizione 9.(4) e si estende ad un generico punto $\xi = J(\varphi)$ nel seguente modo

$$f'(\xi) = f'(J(\varphi)) = J(f' \circ \varphi).$$

Quale sia il miglior modo didattico per estendere una funzione definita sui reali ai numeri euclidei in modo che continuino a valere le proprietà elementari è un problema che, fatti salvi alcuni esempi notevoli, probabilmente esula dagli scopi di un breve percorso didattico; alcune possibiltà per definire tale estensione ad un livello divulgativo adatto ad una scuola superiore si possono trovare in [12] o in [11].

Però, è vero che questa estensione può essere fatta. Per spiegare come, è il momento di iniziare il nostro secondo percorso, quello logico.

2. – Il percorso logico

Come accennato nell'introduzione, quello di cui Robinson si rese conto fu che gli avanzamenti in Logica Matematica di inizio del ventesimo secolo permettevano sia di formulare correttamente il problema dell'esistenza degli infinitesimi, in particolare di togliere l'ambiguità riguardante quali fossero le proprietà elementari dei reali da estendere al campo non archimedeo $\mathbb{K}$ cercato, sia di risolverlo. In questa sezione vogliamo tratteggiare i temi centrali di questo approccio logico, cercando però di evitare di scendere troppo in tecnicismi, spiegando come $\mathbb{K}$ sia collegato col campo Euclideo del capitolo precedente. I lettori interessati possono approfondire gli aspetti logici di queste costruzioni, ad esempio, in [14, 19, 37].

2.1 – *Cenni di teoria dei modelli*

Un tema fondamentale della logica moderna è la distinzione tra sintassi e semantica. Intuitivamente, la sintassi corrisponde a studiare proprietà di linguaggi e formule matematiche ed il relativo calcolo deduttivo, la semantica corrisponde allo studio della verità di queste formule nelle strutture in cui si possono interpretare i linguaggi usati per scriverle. Cercheremo di fissare qui le idee generali, usando i campi ordinati come esempio esplicativo. In tutto questo articolo, con "logica" intenderemo sempre la logica del primo ordine ([11]).

Quando si vuol studiare una qualche area della matematica, il primo passo consiste nel fissare un linguaggio adatto a parlarne. Una parte del linguaggio, composta dagli usuali simboli logici per connettivi $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ e quantificatori $\forall, \exists$ e in una quantità infinita ([12]) di variabili $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, è in comune a tutte le aree. Invece, specificatamente per ogni area fissiamo un linguaggio $\mathcal{L}$ composto da una certa quantità, che può essere anche un'infinità più che numerabile, di simboli c di costante, f di funzione ed R di relazione. Ad esempio, per la teoria dei campi ordinati possiamo utilizzare il linguaggio $\mathcal{L}_C$ contenente

- simboli $0, 1$ di costante per denotare gli elementi neutri di somme e prodotti;

([11]) Semplificando molto, e rimandando a [34] per definizioni rigorose, l'idea è che nella logica del primo ordine si può quantificare solo su elementi, mentre le logiche di ordine più alto consentono anche di quantificare su insiemi, insiemi di insiemi e così via.

([12]) Tipicamente numerabile; qui ci limiteremo a questo caso.

- simboli $+, \cdot, -$ per denotare le operazioni di somma e prodotto;
- simboli $<, =$ di relazione per denotare ordine ed uguaglianza.

Avendo fissato i simboli del nostro linguaggio, possiamo definire i termini del linguaggio: t è un termine se

- t è una variabile, oppure
- t è un simbolo di costante, oppure
- t è della forma $f(t_1, \ldots, t_n)$ dove f è un simbolo di funzione n-aria e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini.

Nel nostro esempio, quindi, i termini corrispondono ai polinomi come, ad esempio, $(x_1 + x_2)x_3 - x_4x_4 + 1$.

Dati i termini, si possono induttivamente costruire le formule del linguaggio dato così:

- se P è un simbolo di predicato n-ario e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, $P(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula ([13]);
- se φ_1, φ_2 sono formule, anche $\neg\varphi_1, \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ sono formule;
- se φ è una formula ed x una variabile, anche $\exists x\varphi$ e $\forall x\varphi$ sono formule.

Nel linguaggio dei campi ordinati, le formule parleranno quindi di proprietà delle espressioni algebriche come, ad esempio, $\exists x_3((x_1 + x_2)x_3 + x_1x_4 + 1 > x_2) \wedge$ $\wedge\, (x_5 - 1 > 0)$. Si osservi che tutti gli assiomi che definiscono un campo ordinato possono esprimere come formule nel linguaggio $\mathcal{L}_C$.

La controparte semantica delle costruzioni sintattiche precedenti sono le $\mathcal{L}$-strutture. Una $\mathcal{L}$-struttura è una coppia $(A, \mathcal{I})$ dove A è un insieme non vuoto e $\mathcal{I}$ è la funzione di interpretazione, che associa simboli di costante ad elementi di A, simboli f di funzione n-aria a funzioni $\mathcal{I}(f) : A^n \to A$ e simboli di relazione n-aria P a sottoinsiemi $\mathcal{I}(P) \subseteq A^n$. Da osservare come, per quanto definito sopra, anche fissando per $\mathcal{L}_C$ il linguaggio dei campi, si ha che non necessariamente una $\mathcal{L}_C$-struttura è un campo! Questo perché, nel definire una $\mathcal{L}$-struttura, ci interessa dare soltanto un'interpretazione ai simboli del linguaggio, senza imporre alcuna regola aggiuntiva. Ad esempio, si vede subito che gli interi, con le ovvie solite interpretazioni dei simboli, sono una $\mathcal{L}_C$-struttura, ma non un campo.

([13]) Formule di questo tipo sono chiamate atomiche.

Quanto sopra non dovrebbe sorprendere troppo. È solito, in matematica, avere uno stesso linguaggio a disposizione per parlare di strutture anche radicalmente diverse le une dalle altre. Quel che le distingue, sono le proprietà che esse devono soddisfare. Nella terminologia logica, questo è codificato dalla nozione di modello. Per definire la nozione di modello, ci serve introdurre la nozione di verità delle $\mathcal{L}$-formule in $\mathcal{L}$-strutture $(A, \mathcal{I})$, e questo ci dà già un primo problema: non per tutte le formule ha senso parlare di verità! Infatti, pensiamo alla formula $x_1 + x_2 > 0$. Interpretandone i simboli in modo ovvio, nei reali questa formula non è né vera né falsa: sarà vera per certe attribuzioni di valori a x_1, x_2 e falsa per altri. Diversa è la questione per la formula $\exists x_1(x_1 \cdot x_1 = 1 + 1)$ che, con le ovvie interpretazioni dei simboli, afferma l'esistenza di un numero il cui quadrato sia uguale ad $1 + 1$: qualsiasi sia la $\mathcal{L}$-struttura in cui la interpretiamo, questa formula avrà un valore di verità definito. Attenzione però ai quantificatori: questo valore di verità potrebbe non essere lo stesso per tutte le $\mathcal{L}$-strutture! Infatti, questa formula è vera nei reali, ma falsa nei razionali.

$\mathcal{L}$-formule che abbiano un valore di verità ben definito in qualsiasi $\mathcal{L}$-struttura sono chiamate enunciati. Per questi, è possibile precisare esattamente la nozione di verità di un enunciato φ (alla Tarski) in una data struttura, denotata con $(A, \mathcal{I}) \models \varphi$ (o, semplicemente, $A \models \varphi$ ogni qual volta la funzione di interpretazione sia stata univocamente fissata). In buona sintesi, si potrebbe dire che questa nozione di verità è definita esattamente come ci si aspetterebbe. Se vogliamo essere espliciti, induttivamente poniamo ([14]):

- se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini senza variabili in $\mathcal{L}$ e P è un simbolo di relazione n-aria, $(A, \mathcal{I}) \models P(t_1, \ldots, t_n)$ se e solo se $(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n)) \in \mathcal{I}(P)$;
- $(A, \mathcal{I}) \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ se e solo se $(A, \mathcal{I}) \models \varphi_1$ o $(A, \mathcal{I}) \models \varphi_2$;

([14]) Per evitare sottigliezze tecniche, qui supporremo che ad ogni $a \in A$ corrisponda un simbolo di costante $\overline{a}$ in L la cui interpretazione sia a. Ci limitiamo qui a dare la nozione per un insieme minimale di simboli logici; gli altri sono definibili a partire da questi.

- $(A, \mathcal{I}) \models \neg\varphi_1$ se e solo se non vale che $(A, \mathcal{I}) \models \varphi_1$;
- $(A, \mathcal{I}) \models \exists x \varphi_1(x)$ se e solo se esiste $a \in A$ per cui $(A, \mathcal{I}) \models \varphi_1(\overline{a})$.

Nel nostro esempio dei campi ordinati, abbiamo trovato un linguaggio $\mathcal{L}_C$ adatto ma ci siamo resi conto che le strutture di cui si può parlare con questo linguaggio non sono necessariamente campi ordinati. Alla luce della discussione precedente, dovrebbe essere chiaro che, per isolare i campi ordinati tra tutte le $\mathcal{L}_C$-strutture, dovremo considerare quelle che rendono veri tutti quegli enunciati che definiscono i campi ordinati. Come già preannunciato, la formalizzazione di questo processo porta a considerare la nozione di modello.

DEFINIZIONE 10. – *Dato un insieme T di $\mathcal{L}$-enunciati, diremo che $(A, \mathcal{I})$ è un modello di T se $(A, \mathcal{I}) \models \varphi$ per ogni $\varphi \in T$.*

Quanto detto sopra ci permette ora di formalizzare precisamente, nel modo più restrittivo possibile, il problema affrontato da Robinson. Fissiamo come $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ il linguaggio avente un simbolo di costante $\overline{r}$ per ogni $r \in \mathbb{R}$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un simbolo di funzione $\overline{f}$ per ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e un simbolo di predicato $\overline{P}$ per ogni ([15]) $P \subseteq \mathbb{R}^n$; intuitivamente, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ è il linguaggio che ci permette di parlare di qualsiasi proprietà dei reali. Si osservi che $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ include il linguaggio $\mathcal{L}_C$.

Sia $Form(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ l'insieme degli $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$-enunciati e sia ([16])

$$Th(\mathbb{R}) = \{\varphi \in Form(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}) \mid \mathbb{R} \models \varphi\}.$$

La domanda affrontata da Robinson diviene: esiste un modello M di $Th(\mathbb{R})$ che estenda propriamente $\mathbb{R}$? In questo caso, M è detto estensione elementare di $\mathbb{R}$.

La risposta a questo problema è pressoché immediata se facciamo appello ad uno dei risultati centrali della Logica Matematica dimostrato negli anni trenta del secolo scorso, il Teorema di Compattezza.

([15]) Intuitivamente, si può pensare a $\overline{P}$ come al predicato $\overline{P}(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_n) \in P$.

([16]) Scriviamo semplicemente $\mathbb{R} \models$ quando sottintendiamo l'interpretazione naturale dei simboli in $\mathbb{R}$.

TEOREMA 11. – *Una teoria T ammette un modello se e solo se ogni suo sottoinsieme finito ammette un modello.*

Per una dimostrazione ed una discussione più approfondita del Teorema di Compattezza rimandiamo ad un qualsiasi testo di Teoria dei Modelli, ad esempio [34]. Il Teorema di Compattezza è indiscutibilmente uno dei risultati più importanti dell'intero corpo della logica matematica, alla base di molti risultati fondamentali nonché, come ci accingiamo a dimostrare, il metodo più semplice per assicurare l'esistenza di modelli di teorie con proprietà particolari. Infatti, avendolo a disposizione, Robinson ebbe un'idea sorprendentemente semplice ([17]).

A $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ aggiungiamo un nuovo simbolo di costante c, e sia T la teoria

$$T = Th(\mathbb{R}) \cup \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, φ_n è l'enunciato $c > \overline{n}$. Dato un qualsiasi Γ_0 sottoinsieme finito di T, $\mathbb{R}$ è banalmente un modello di Γ_0: è sufficiente interpretare c come un reale più grande di qualsiasi naturale n per cui $\varphi_n \in \Gamma_0$. Per compattezza, esistono modelli di T, ed un qualsiasi modello M di T ha queste proprietà:

- estende $\mathbb{R}$, nel senso che l'immagine dell'associazione $I : \mathbb{R} \to M$ che mappa ogni $r \in \mathbb{R}$ nell'interpretazione in M di $\overline{r}$ è un campo ordinato isomorfo ad $\mathbb{R}$;
- soddisfa tutte le proprietà di $Th(\mathbb{R})$;
- è non archimedeo: infatti, se $\rho \in M$ è l'interpretazione di c, necessariamente $\rho > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché M soddisfa tutte le φ_n. Quindi ρ è un infinito in M, e $\frac{1}{\rho}$ è un infinitesimo. In particolare, $M \neq \mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ è un modello di tutti i sottoinsiemi finiti di T, ma non di T stesso.

Nella terminologia di Robinson, M è un modello nonstandard della teoria dei reali che, seguendo la notazione comunemente usata, denoteremo d'ora in poi con ${}^*\mathbb{R}$. Il problema dell'esistenza di estensioni non archimedee, ma elementarmente equivalenti, dei reali è così risolto.

([17]) Versioni analoghe di quest'idea, volte a mostrare l'esistenza dei cosiddetti modelli nonstandard dell'aritmetica, circolavano già da molto tempo.

In realtà, il vero contributo di Robinson fu di rendersi conto di come queste estensioni potessero essere usate per studiare problemi aperti in analisi; inoltre, le idee chiave della costruzione di Robinson sono adattabili, come mostreremo sotto, per poter parlare di qualsiasi argomento di matematica. Infatti, negli anni applicazioni dell'analisi nonstandard sono apparse in analisi, geometria, fisica, economia, teoria dei numeri, algebra etc etc. Per alcuni esempi notevoli, rimandiamo a [1, 22, 25, 27, 28, 36, 38].

L'utilizzo del Teorema di Compattezza permette di dedurre l'esistenza di campi non archimedei elementarmente equivalenti a $\mathbb{R}$, ma non ci dice come questi siano costruiti. Per questo, conviene discutere brevemente di ultraprodotti.

2.2 – *Ultrapotenze*

Seguendo l'approccio già tenuto precedentemente, ci limiteremo a discutere le costruzioni di questa sezione nel caso dei reali, tratteggiando solo le idee per la generalizzazione a casi arbitrari. Per una trattazione completa, che include anche il caso più generale degli ultraprodotti, rimandiamo a [19]. I modelli che discuteremo qui forniscono anche una costruzione esplicita della retta euclidea discussa nel Capitolo 1.

Intuitivamente, l'idea usata per costruire ${}^*\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{R}$ è simile a quella utilizzata per costruire $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$: per ottenere i reali a partire dai razionali si deve aggiungere un punto per ogni classe di equivalenza di successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$; per ottenere gli iperreali, si deve aggiungere un punto per ogni classe di equivalenza di qualsiasi successione. Quello che cambia sensibilmente è la nozione di equivalenza utilizzata, che è diversa nei due casi. Nella costruzione nonstandard, l'equivalenza è definita da ultrafiltri, che sono uno strumento assai potente utilizzato in vari settori della matematica.

DEFINIZIONE 12. – *Dato un insieme $I \neq \emptyset$, un filtro su I è una famiglia non vuota di sottoinsiemi di I che sia chiusa per intersezione e sovrainsieme. Un filtro $\mathcal{F}$ è proprio se non coincide con l'insieme $\wp(I)$ di tutte le parti di I. Un ultrafiltro è un filtro proprio massimale rispetto all'inclusione.*

Una caratterizzazione equivalente della nozione di ultrafiltro, comoda per le dimostrazioni, è la seguente:

LEMMA 13. – *Un filtro $\mathcal{U}$ su I è un ultrafiltro se e solo se per ogni $A \subseteq I$ $A \in \mathcal{U}$ o $A^c := I \setminus A \in \mathcal{U}$.*

Per evitare banalità, d'ora in poi fissiamo I infinito. Costruire filtri su I è semplice: ad esempio, è immediato che

$$Fr(I) := \{A \subseteq I \mid A^c \text{ è finito}\}$$

sia un filtro proprio, noto come filtro di Fréchet, talvolta anche chiamato filtro dei cofiniti. Questo non sarà mai un ultrafiltro, visto che I può sempre essere spezzato in due parti entrambe infinite.

Anche costruire ultrafiltri banali è immediato: fissato un qualsiasi $i \in I$,

$$\mathcal{U}_i = \{A \subseteq I \mid i \in A\}$$

è un ultrafiltro su I. Questo tipo di ultrafiltri sono detti principali. Per le nostre applicazioni, sfortunatamente, gli ultrafiltri principali sarebbero di ben poco uso, come chiariremo a breve. La domanda è, quindi: esistono ultrafiltri non principali?

Una risposta positiva è conseguenza del lemma di Zorn:

PROPOSIZIONE 14. – *Se vale il lemma di Zorn, esistono ultrafiltri non principali su I.*

Dimostrazione. Per una dimostrazione dettagliata rimandiamo a [19]; l'idea è di prendere $Fr(I)$ e di considerare l'insieme

$$X = \{\mathcal{F} \text{ filtro proprio su } I \mid Fr(I) \subseteq \mathcal{F}\},$$

ordinato per inclusione. Le catene $\left(\mathcal{F}_j\right)_{j\in J}$ in X sono maggiorate dal filtro proprio $\bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_j$, quindi si può applicare Zorn per trovare almeno un elemento massimale in X, che si dimostra poi essere un ultrafiltro non principale. □

L'applicazione del Lemma di Zorn richiede una breve discussione: tipicamente, una critica mossa all'analisi nonstandard è che, in un modo o in un altro, per costruire modelli dell'analisi nonstandard è sempre necessario fare appello ad un qualche lemma non costruttivo, come quello di

Zorn ([18]). Questa è una critica perfettamente lecita nell'ottica della matematica intuizionista, ma è quantomeno bizzarra quando proviene da matematici non intuizionisti: infatti, moltissimi risultati fondamentali di matematica classica (il teorema di Hahn-Banach, ad esempio) si basano su principi non costruttivi analoghi a quelli usati per trovare modelli nonstandard.

Tornando alla nostra costruzione, un qualsiasi filtro proprio $\mathcal{F}$ su I permette di definire una relazione $\equiv_{\mathcal{F}}$ di $\mathcal{F}$-equivalenza su $\mathbb{R}^I := \{f : I \to \mathbb{R}\}$ ponendo

$$f \equiv_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}.$$

Sia $\mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}$ l'insieme delle classi di $\mathcal{F}$-equivalenza. Su $\mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}$ possiamo definire operazioni di somma e prodotto ponendo

$$[f] + [g] = [f + g]; [f] \cdot [g] = [f \cdot g],$$

dove $[\cdot]$ denota la classe di equivalenza rispetto alla $\mathcal{F}$-equivalenza; così come più tardi per l'ordine, è pressoché immediato dimostrare che queste definizioni sono ben poste.

Identificando ogni $r \in \mathbb{R}$ con la classe di equivalenza della funzione costante di valore r, si ha il seguente

TEOREMA 15. – *$\langle \mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}, +, \cdot, 1, 0\rangle$ è un anello che estende $\mathbb{R}$.*

Le verifiche necessarie per dimostrare il Teorema precedente sono immediate. Il motivo per cui $\mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}$ può non essere un campo è presto detto: se $\mathcal{F}$ non è un ultrafiltro, esiste $A \subseteq I$ per cui né A né A^c appartengano ad $\mathcal{F}$. Ma allora la classe di equivalenza della funzione caratteristica Ξ_A di A non è 0, perché

$$\{i \in I \mid \Xi_A(i) = 0\} = A^c \notin \mathcal{F},$$

né è invertibile, perché data una qualsiasi altra $f : I \to \mathbb{R}$ si ha che

$$\{i \in I \mid f(i) \cdot \Xi_A(i) = 1\} \subseteq A \notin \mathcal{F}.$$

([18]) In realtà, richiedere che ogni filtro proprio possa essere esteso ad un ultrafiltro è una richiesta logicamente più debole del Lemma di Zorn, ma non ci soffermeremo su questi aspetti qui.

Se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro, invece, gli argomenti qui sopra non valgono più. In effetti, in questo caso $\mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}$ è un campo: infatti, data $[f] \neq 0$, se poniamo $A = \{i \in I \mid f(i) = 0\}$ si ha che $A \notin \mathcal{F}$ quindi, essendo $\mathcal{F}$ ultrafiltro, necessariamente $A^c = \{i \in I \mid f(i) \neq 0\} \in \mathcal{F}$. Sia $g : I \to \mathbb{R}$ definita così:

$$g(i) = \begin{cases} f(i)^{-1}, & \text{se } i \in A^c; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora è immediato verificare che $[f][g] = [1] = 1$.

Inoltre, quando $\mathcal{F}$ è ultrafiltro, l'estensione dell'ordine $<$ a $\mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}$ data ponendo

$$[f] < [g] \Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) < g(i)\} \in \mathcal{F}$$

è un ordine totale compatibile con $+, \cdot$. Risulta così dimostrato il Teorema seguente:

TEOREMA 16. – *Se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro non principale, $\langle \mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}, +, \cdot, 1, 0, <\rangle$ è un campo ordinato non archimedeo che propriamente estende $\mathbb{R}$.*

Ad esempio, l'elemento $[id]$, dove $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è la funzione identità, è chiaramente più grande di qualsiasi reale. Inoltre, $[id]$ può essere identificato con la numerosità α dei naturali introdotta nel Capitolo 1: infatti, intuitivamente, si può pensare alla funzione id come ad un'operazione di conteggio dei numeri naturali. Infatti, $id(n)$ altro non è che la cardinalità di $\{1, \cdots, n\}$. Rimandiamo a [4] per una trattazione ben più precisa e approfondita di questa idea.

Il campo ordinato $\mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}$ è detto *ultrapotenza* dei numeri reali. Le ultrapotenze sono costruzioni molto generali, in quanto gli argomenti discussi in questa sezione sono facilmente adattabili a qualsiasi altra struttura matematica, e molto potenti. Infatti, per $\mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}$ vale un risultato ancora più forte che il Teorema 16, conseguenza di un risultato classico di Teoria dei Modelli noto come Teorema di Loś (si veda, nuovamente, [19]):

TEOREMA 17. – *$\mathbb{R}^I_{\mathcal{F}}$ è un campo ordinato non archimedeo elementarmente equivalente ai reali.*

Quindi, come promesso, le ultrapotenze forniscono sia un modo per costruire esplicitamen-

te ([19]) il campo non archimedeo cercato da Robinson, sia un modello esplicito della retta euclidea trattata nel Capitolo 1.

2.3 – *Metodi nonstandard in generale*

In questa sezione, vogliamo illustrare brevemente soltanto i concetti chiave che permettono di applicare l'idea di Robinson ad un'enorme varietà di ambiti matematici, seppur utilizzando sempre $\mathbb{R}$ come caso guida della discussione; per una trattazione ben più approfondita ed estesa, rimandiamo ad esempio a [19]. Il livello di raffinatezza matematica di questa sezione è sicuramente poco adatto per un approccio didattico come quello presentato nel Capitolo 1; il materiale qui esposto è pensato più per chi fosse già, o aspirasse essere, introdotto nel mondo della ricerca. Chi fosse poco interessato a questi aspetti logici più avanzati, ma volesse avere un'idea di possibili applicazioni dell'analisi nonstandard, può tranquillamente passare a leggere il Capitolo 3.

Per usare i metodi nonstandard in piena generalità, non è sufficiente parlare di strutture ma è più comodo avvalersi delle superstrutture introdotte nella sezione 1.4. L'idea dietro alla superstruttura su $\mathbb{R}$ è che questa debba contenere tutti gli oggetti della normale pratica matematica che si possano costruire a partire dai reali. Ad esempio, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, o certi spazi di funzioni reali, o insiemi di spazi di funzioni, e così via. Tutte queste costruzioni vivono ([20]) in $\mathbb{V}(\mathbb{R})$.

Come linguaggio per studiare le superstrutture, prendiamo il linguaggio $\mathcal{L}_{\mathbb{V}(\mathbb{R})}$ che consiste nei soliti simboli logici con l'aggiunta di un simbolo di costante c_x per ogni elemento $x \in \mathbb{V}(\mathbb{R})$. Sia $Th(\mathbb{V}(\mathbb{R}))$ l'insieme degli enunciati veri in $\mathbb{V}(\mathbb{R})$ interpretando ogni simbolo c_x in x. Questo basta a definire i metodi nonstandard in generale.

DEFINIZIONE 18. – *Diremo che* $\langle \mathbb{V}(\mathbb{R}), \mathbb{V}(^*\mathbb{R}), * \rangle$ *è un modello dei metodi nonstandard se* $* : \mathbb{V}(\mathbb{R}) \to \mathbb{V}(^*\mathbb{R})$ *soddisfa il transfer, cioè se per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *per ogni* $\mathcal{L}_{\mathbb{V}(\mathbb{R})}$*-formula* $P(x_1, \cdots, x_n)$ *e per ogni* $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{V}(\mathbb{R})$ *si ha che* $\mathbb{V}(\mathbb{R}) \models P(a_1, \cdots, a_n)$ *se e solo se* $\mathbb{V}(^*\mathbb{R}) \models P(^*a_1, \cdots, ^*a_n)$.

Come detto precedentemente, lo studio di proprietà di $\mathbb{R}$ può portare ad utilizzare oggetti di $\mathbb{V}(\mathbb{R})$ di vario tipo. L'idea della Definizione 18 è che se vogliamo utilizzare i metodi dell'analisi nonstandard per studiare le proprietà di $\mathbb{R}$, ci può fare comodo avere un modo uniforme di estendere elementarmente e in modo proprio non soltanto $\mathbb{R}$, ma anche le parti di $\mathbb{R}$, le parti delle parti di $\mathbb{R}$ e così via. Quindi, ad esempio, se $\langle \mathbb{V}(\mathbb{R}), \mathbb{V}(^*\mathbb{R}), * \rangle$ è un modello dell'analisi nonstandard nel senso della Definizione 18, si avranno gli insiemi $\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R}), \wp(\wp(\mathbb{R})), \cdots$ in $\mathbb{V}(\mathbb{R})$ e, conseguentemente, $^*\mathbb{R}, ^*\wp(\mathbb{R}), ^*\wp(\wp(\mathbb{R})), \cdots$ in $\mathbb{V}(^*\mathbb{R})$. Non solo, ma ognuna di queste copie nonstandard gode della proprietà di transfer, cioè: $^*\mathbb{R}$ è un'estensione propria nonstandard di $\mathbb{R}$, $^*\wp(\mathbb{R})$ è un'estensione propria nonstandard di $\wp(\mathbb{R})$, $^*\wp(\wp(\mathbb{R}))$ è un'estensione propria nonstandard di $\wp(\wp(\mathbb{R}))$ e così via.

Questo approccio permette una grandissima flessibilità. L'ingrediente fondamentale di queste applicazioni è il transfer. Il suo uso non è complicato, ma richiede una certa attenzione nel distinguere quelle proprietà a cui può essere applicato ed, eventualmente, come.

Ad esempio, una delle proprietà fondamentali di $\mathbb{N}$ è il buon ordinamento. Eppure, questa proprietà non è preservata dal transfer! Infatti, se consideriamo un'estensione $^*\mathbb{N}$ di $\mathbb{N}$, identificando $\mathbb{N}$ con $\{^*n \mid n \in \mathbb{N}\}$ si ha che $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ è un sottoinsieme non vuoto di $^*\mathbb{N}$ ma non contiene un minimo: se ρ fosse un minimo, $\rho - 1$ dovrebbe appartenere ad $\mathbb{N}$, che è però chiuso per successore. Comportamenti di questo tipo si trovano in pressoché qualsiasi applicazione: ad esempio, la completezza è una proprietà fondamentale dei reali che non è preservata dal transfer. Questo perché sia il buon ordinamento dei naturali, che la completezza dei reali, sono proprietà che parlano di sottoinsiemi delle strutture di partenza, non di loro elementi, mentre il transfer preserva le proprietà degli elementi, non necessariamente degli insiemi.

Però, se adottiamo il punto di vista delle superstrutture, verrebbe da dire che questa distinzione

([19]) Modulo l'aver fissato un ultrafiltro non principale il che, come detto precedentemente, potrebbe portare a varie obiezioni su quanto esplicita sia davvero questa costruzione.

([20]) Modulo la solita identificazione tra funzioni e insiemi.

non sia così importante; in fondo, sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono elementi di $\mathbb{V}(\mathbb{N})$, quindi perché non dovrebbe valere il buon ordinamento in ${}^*\mathbb{N}$? Usando il linguaggio di $\mathbb{V}(\mathbb{N})$, la formula che esprime il buon ordinamento è

$$\forall A \in \wp(\mathbb{N})((A = \emptyset) \vee (\exists a \in A\ \forall b \in A\ a \leq b)).$$

Se applichiamo il transfer direttamente, troviamo che in $\mathbb{V}({}^*\mathbb{N})$ deve essere vera la formula

$$\forall A \in {}^*(\wp(\mathbb{N}))((A = {}^*\emptyset) \vee (\exists a \in {}^*A\ \forall b \in {}^*A\ a {}^*{\leq} b)).$$

${}^*\emptyset$ non crea problemi, perché è banale vedere che ${}^*\emptyset = \emptyset$, così come ${}^*\leq$ è semplicemente l'estensione dell'ordine di $\mathbb{N}$ a ${}^*\mathbb{N}$. Dove si cela il problema, è nel fatto che ${}^*(\wp(\mathbb{N}))$ e $\wp({}^*\mathbb{N})$ non sono lo stesso insieme! Il primo è l'estensione nonstandard dell'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, il secondo è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{N}$; vale che

$${}^*(\wp(\mathbb{N})) \subsetneq \wp({}^*\mathbb{N}).$$

I sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{N}$ che appartengono a ${}^*(\wp(\mathbb{N}))$ sono chiamati interni, e sono i sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{N}$ che ereditano direttamente per transfer tutte le proprietà che ci aspettiamo dai sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, ad esempio l'avere un minimo quando non vuoti. Ma ${}^*\mathbb{N}$ contiene anche sottoinsiemi non di questo tipo, detti esterni, come ad esempio ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}$. Anzi, anche nel caso di ${}^*\mathbb{R}$, moltissimi suoi sottoinsiemi rilevanti per le applicazioni si rivelano essere esterni, come ad esempio $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \{\varepsilon \in {}^*\mathbb{R} \mid \varepsilon \text{ infinitesimo}\}$, $\{\rho \in {}^*\mathbb{R} \mid \rho \text{ infinito}\}$. Il modo tipico di riconoscere un oggetto esterno è di verificare che non soddisfi il transfer di una qualche proprietà che ci aspetteremmo vera: ad esempio, ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ha un minimo maggiorante, quindi per transfer ogni sottoinsieme interno di ${}^*\mathbb{R}$ superiormente limitato deve avere un minimo maggiorante. Però, sia $\mathbb{N}$ che $\mathbb{R}$ non hanno questa proprietà: infatti, sono superiormente limitati in ${}^*\mathbb{R}$ da un qualsiasi elemento infinito, eppure non hanno un minimo maggiorante ρ, dato che per essere un maggiorante ρ dovrebbe essere infinito, ma allora non potrebbe essere minimo perché $\rho - 1$ sarebbe un maggiorante più piccolo.

La distinzione tra esterni ed interni può apparire come una complicazione indesiderata, a prima vista, ma è anche nel gioco di relazioni tra questi oggetti che risiede buona parte della ricchezza dell'approccio nonstandard alle applicazioni: spesso, gli oggetti esterni rappresentano gli strumenti extra di cui è dotato il modello nonstandard rispetto a quello classico, che a sua volta diventa il motivo per cui il punto di vista nonstandard semplifica vari problemi classici. Vedremo esempi di queste applicazioni nel prossimo capitolo.

3. – Il percorso applicato

A partire dagli anni ottanta del secolo scorso, ma con maggiore cadenza negli ultimi anni, i metodi nonstandard hanno trovato numerose applicazioni nell'ambito di quel settore che si occupa di studiare proprietà combinatorie di strutture algebriche infinite; si vedano, ad esempio, [15, 16, 17, 22, 25, 28, 30, 32]. Nel caso dei naturali, che è quello su cui ci concentreremo qui, spesso quest'area di ricerca viene chiamata teoria combinatoria dei numeri. Tipicamente, i problemi che vengono studiati riguardano la ricerca di configurazioni prestabilite all'interno di insiemi di vario tipo, e possono dividersi rozzamente in problemi quantitativi e qualitativi.

I problemi quantitativi riguardano lo studio di quelle famiglie $\mathcal{G}$ di sottoinsiemi dei naturali tali che, data una qualsiasi partizione finita $\mathbb{N} = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, esista sempre $i \leq n$ per cui $A_i \in \mathcal{G}$; quando questo accade, si dice che la famiglia $\mathcal{G}$ è regolare per partizioni. Si può pensare a queste famiglie come a quelle che codificano caratteristiche talmente profonde della struttura dell'insieme dei naturali da essere indistruttibili con spezzamenti finiti. Ad esempio, la famiglia dei sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ è regolare per partizioni, così come quella degli insiemi che contengono un numero prefissato, ad esempio 7. Non tutte le famiglie di insiemi, però, sono regolari per partizioni: ad esempio, per $\mathbb{N}$ il filtro di Fréchet introdotto nella sezione 2.2 non è regolare per partizioni, come si vede immediatamente con la partizione $\mathbb{N} = \text{Pari} \cup \text{Dispari}$.

Il più famoso tra i teoremi di regolarità per partizioni è il Teorema di Ramsey ([21]), che può

([21]) Che qui, coerentemente con gli altri risultati proposti, formuleremo nel caso particolare dei naturali.

essere pensato come una generalizzazione profonda del principio dei cassetti. Dato $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ sia

$$[\mathbb{N}]^k := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = k\}.$$

Il Teorema di Ramsey afferma che, data una qualsiasi partizione finita $[\mathbb{N}]^k = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, esistono sempre un insieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ ed un indice $i \leq n$ tale che $[H]^k \subseteq A_i$. Non è un caso che l'area che studia le proprietà regolari per partizioni sia chiamata teoria di Ramsey, e che la teoria combinatoria dei numeri, cioè lo studio della teoria di Ramsey sui naturali, venga talvolta chiamata "Arithmetic Ramsey Theory". In particolare, in quest'area si è interessati allo studio di quali famiglie regolari per partizioni siano composte da insiemi che soddisfano una qualche proprietà algebrica. Il primo esempio, tutt'altro che banale, di famiglia di questo tipo è la famiglia degli insiemi che contengono almeno una somma di propri elementi, cioè

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists a, b \in A \ a + b \in A\}.$$

La regolarità di questa famiglia è stata dimostrata da Schur nel 1916 (prima ancora che venisse pubblicato il Teorema di Ramsey). Questo può sembrare, a prima vista, un risultato facile; in realtà, è assai meno immediato di quanto appaia. Non tanto per la difficoltà della sua dimostrazione (ne proveremo completamente un rafforzamento in questo capitolo), quanto perché questa proprietà di chiusura per almeno una somma non è da darsi per scontata, come testimoniato dalla pletora di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che sono controesempi.

Oggi è ben noto che il risultato di Schur può essere rafforzato in molti modi diversi. Due di queste generalizzazioni sono il contenuto dei teoremi di Van der Waerden ed Hindman. Il Teorema di Van der Waerden ([22]) afferma che la famiglia degli insiemi che contengono progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe è regolare per partizioni; nel teorema di Hindman, la famiglia regolare per partizioni è quella degli IP-set, cioè gli insiemi contenenti $FS(Y)$ per un qualche Y infinito dove, se $Y = \{y_1 < y_2 < \ldots\}$, si pone

$$FS(Y) = \{\sum_{i=1}^{n} y_{k_i} \mid n \in \mathbb{N}, k_1 < k_2 < \cdots < k_n\}.$$

Il Teorema di Hindman merita una breve discussione a parte: se un lettore con buone conoscenze di aritmetica può, probabilmente, tentare una dimostrazione diretta del Teorema di Schur, la dimostrazione originale, puramente combinatoria, del Teorema di Hindman è, per parola del suo stesso autore, un esercizio di masochismo. Negli anni settanta del secolo scorso però Galvin e Glazer ne hanno trovato una dimostrazione pressoché banale, basata sull'utilizzo degli ultrafiltri. Da quel momento, e ancora oggi, i metodi basati su ultrafiltri sono diventati uno dei motori principali degli sviluppi in teoria combinatoria dei numeri; su questi, ci concentreremo più in dettaglio nella prossima sezione.

I problemi qualitativi sono un raffinamento, spesso molto complicato, di quelli quantitativi. Hanno tipicamente la forma seguente: data $\mathcal{G}$ famiglia regolare per partizioni e dato $A \subseteq \mathbb{N}$, quali proprietà di A garantiscono la sua appartenenza a $\mathcal{G}$?

Per dare un'idea di quanto i problemi qualitativi siano più complicati di quelli quantitativi, consideriamo l'esempio più famoso di risultato di questo tipo, il Teorema di Szémerédi, tracciandone brevemente la storia. Il Teorema di Van der Waerden venne pubblicato nel 1927, circa dieci anni dopo quello di Schur. Nel 1936 Erdős e Turán congetturarono una versione qualitativa del Teorema di Van der Waerden, precisamente che fosse possibile trovare progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe dentro insiemi A con densità superiore positiva, cioè per cui $\limsup_{n \to +\infty} \frac{|A \cap \{1, \cdots, n\}|}{n} > 0$. La dimostrazione di questa congettura, oggi nota come Teorema di Szémeredi, richiese circa 40 anni e l'introduzione di tecniche tutt'altro che banali, tanto da essere uno dei motivi per cui, nel 2012, Szémeredi vinse il premio Abel. Il Teorema di Szémeredi è uno dei pilastri della teoria combinatoria dei numeri, ed il tentativo di trovarne soluzioni alternative ha generato varie nuove tecniche in quest'area, tra cui la più influente sicuramente quella basata su metodi ergodici introdotta da Furstenberg in 1977. Sue

([22]) Per essere perfettamente precisi, la versione del Teorema di Van der Waerden che generalizza Schur è data dal Teorema di Brauer, in cui agli insiemi è richiesto di contenere, per ogni $k \in \mathbb{N}$, almeno un sottoinsieme del tipo $\{x, y, x + y, \ldots, x + ky\}$.

generalizzazioni, così come risultati collegati, sono studiati ancora oggi, si pensi al Teorema di Green-Tao sull'esistenza di progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe nei primi.

Negli ultimi anni, varie tecniche nonstandard sono state sviluppate per studiare sia i problemi quantitativi che quelli qualitativi. Qui esporremo alcuni esempi semplici di trattazioni nonstandard di alcuni aspetti di questi problemi, rimandando a [17] per una presentazione più esaustiva. Per questo, ci serviremo dei numeri ipernaturali, che altro non sono che gli elementi di ${}^*\mathbb{N}$, e li denoteremo con lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$. In particolare, in accordo con quanto usualmente fatto in letteratura, conveniamo che, da qui in poi, α denoti un generico ipernaturale, non più necessariamente la numerosità di $\mathbb{N}$ descritta nel Capitolo 1, con un'unica eccezione che discuteremo esplicitamente.

3.1 – *Problemi qualitativi*

Come discusso nella sezione precedente, sin dagli anni settanta del secolo scorso è noto che i problemi di regolarità per partizioni di proprietà possono essere studiati in termini della compattificazione di Stone-Čech $\beta\mathbb{N}$ dei naturali, ovvero dell'insieme di tutti gli ultrafiltri su $\mathbb{N}$. Infatti, vale il risultato seguente.

TEOREMA 19 – *Una famiglia $\mathcal{G}$ è regolare per partizioni se e solo se esiste un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ incluso in $\mathcal{G}$.*

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ che soddisfi il teorema precedente è detto un testimone (sottinteso: della regolarità per partizioni) della famiglia $\mathcal{G}$.

Il vantaggio di questo approccio è che i problemi di esistenza di ultrafiltri possono essere studiati mediante le proprietà algebriche di $\beta\mathbb{N}$. Ad esempio, il Teorema di Hindman può essere ricondotto al problema di esistenza di ultrafiltri idempotenti rispetto alla somma, che è conseguenza immediata di un teorema fondamentale della teoria dei (semi)-gruppi topologici, il Teorema di Ellis ([23]). Il riferimento completo per questo approccio è il libro [21].

([23]) Il Teorema di Ellis afferma che ogni semigruppo topologico destro compatto di Hausdorff $(X, \cdot)$ possiede elementi idempotenti, cioè elementi per cui valga $x \cdot x = x$. Si veda [21] per una discussione approfondita.

Le proprietà algebriche di $\beta\mathbb{N}$, però, non sempre sono maneggevoli. È qui che interviene l'analisi nonstandard, che permette di riformulare e semplificare varie operazioni tra ultrafiltri. I punti salienti della semplificazione nonstandard sono due: l'identificazione tra ultrafiltri ed ipernaturali e la caratterizzazione nonstandard del Teorema 19.

L'identificazione di ultrafiltri ed ipernaturali si ottiene in termini di quelle che, in letteratura, sono chiamate monadi (si veda anche [33]):

DEFINIZIONE 20. – *Dato $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, si chiama monade di $\mathcal{U}$ l'insieme*

$$\mu(\mathcal{U}) = \{\alpha \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall A \in \mathcal{U}\ \alpha \in {}^*A\} = \bigcap_{A \in \mathcal{U}} {}^*A.$$

Gli elementi di $\mu(\mathcal{U})$ sono detti generatori di $\mathcal{U}$.

Viceversa, dato $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$ l'ultrafiltro generato da α è

$$\mathcal{U}_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \alpha \in {}^*A\}.$$

Scriveremo $\alpha \sim_u \beta$ per indicare che $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_\beta$.

L'idea dietro questo approccio è che proprietà combinatorie degli ultrafiltri corrispondano a proprietà delle loro monadi. Per uno studio dettagliato di questo fatto, rimandiamo a [32]. Qui, ci limitiamo a ricordare questo risultato, la cui dimostrazione è piuttosto semplice, che può essere visto come la formulazione nonstandard del Teorema 19.

TEOREMA 21. – *Sia $P(X)$ una proprietà del tipo $\exists x_1, \cdots, x_n \in X\ \varphi(x_1, \cdots, x_n)$, dove φ esprime una qualche relazione algebrica al prim'ordine tra gli x_i. Sia $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$. Sono fatti equivalenti:*

1. *$\mathcal{U}$ è un testimone di $P(X)$, cioè vale $P(A)$ per ogni $A \in \mathcal{U}$;*
2. *esistono $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ generatori di $\mathcal{U}$ per cui valga $\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.*

Il contenuto operativo del Teorema 21, dal punto di vista dei metodi nonstandard, è il seguente: per dimostrare che una data proprietà è regolare per partizioni, prima si cerca di capire come debba essere fatta algebricamente una classe di potenziali ultrafiltri testimoni, poi si prova a dimostrare in modo nonstandard che questi ultrafiltri siano davvero dei testimoni. Per essere efficace, però, questa tecnica richiede, preliminarmente, di trovare una

formulazione nonstandard per le operazioni di somma e prodotto tra ultrafiltri, la cui definizione, tutt'altro che immediata, è la seguente:

$$\mathcal{U}+\mathcal{V}=\{A\subseteq\mathbb{N}\,|\,\{n\in\mathbb{N}\,|\,\{m\in\mathbb{N}\,|\,n+m\in A\}\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}\};$$

$$\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}=\{A\subseteq\mathbb{N}\,|\,\{n\in\mathbb{N}\,|\,\{m\in\mathbb{N}\,|\,n\cdot m\in A\}\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}\}.$$

Una soluzione semplice si può ottenere cercando di tradurre direttamente le operazioni usando la caratterizzazione nonstandard della definizione 20. Infatti, si ha che per ogni $A\subseteq\mathbb{N}$ e per ogni scelta di ipernaturali α,β

$$A\in\mathcal{U}_\alpha+\mathcal{U}_\beta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\{n\in\mathbb{N}\,|\,\{m\in\mathbb{N}\mid n+m\in A\}\in\mathcal{U}_\beta\}\in\mathcal{U}_\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\{n\in\mathbb{N}\mid n+\beta\in{}^*A\}\in\mathcal{U}_\alpha\Leftrightarrow\alpha+{}^*\beta\in{}^{**}A.$$

Come dovrebbe risultare evidente dal confronto tra la definizione esplicita e la caratterizzazione nonstandard, quest'ultima semplifica notevolmente l'espressione della somma tra ultrafiltri (e analoga proprietà varrebbe per il prodotto). Così scritta, tuttavia, la sequenza di coimplicazioni qui sopra presenta varie imprecisioni; in particolare, stiamo applicando la mappa star per estendere oggetti già in ${}^*\mathbb{N}$. Questo non può essere fatto sempre; richiede, infatti, di lavorare con modelli dell'analisi nonstandard del tipo $\langle *,\mathbb{V}(X),\mathbb{V}(X)\rangle$, per la cui dimostrazione di esistenza e discussione rimandiamo a [4, 15, 23, 27].

Una volta che si ha la possibilità di iterare la mappa star, si hanno le proprietà basilari seguenti:

PROPOSIZIONE 22. – *Per ogni $\alpha,\beta\in{}^*\mathbb{N}$ si ha che*

1. *$\alpha,{}^*\alpha$ generano sempre lo stesso ultrafiltro*;
2. *$\mathcal{U}_\alpha+\mathcal{U}_\beta=\mathcal{U}_{\alpha+{}^*\beta}$*;
3. *$\mathcal{U}_\alpha\cdot\mathcal{U}_\beta=\mathcal{U}_{\alpha\cdot{}^*\beta}$*;
4. *in particolare, $\mathcal{U}$ è idempotente rispetto alla somma se $\alpha+{}^*\alpha\sim_u\alpha$ per ogni $\alpha\in\mu(\mathcal{U})$, e analogamente per il prodotto*;
5. *se $P(x)$ è una proprietà al primo ordine e $\alpha,\beta\in{}^*\mathbb{N}$, allora vale ${}^*P(\alpha)$ se e solo se vale ${}^*P(\beta)$.*

Questo basta già per ottenere risultati non banali, sia positivi che negativi. Quelli positivi richiedono, sostanzialmente, di trovare ultrafiltri adatti a testimoniare una data regolarità per partizioni, a partire da un'analisi delle caratteristiche della proprietà sotto indagine. Come esempio di questo fatto, consideriamo qui un problema rimasto aperto per alcuni anni, cioè la regolarità per partizioni di $x+y=uv=z$. Questa regolarità per partizioni fornisce un rafforzamento del Teorema di Schur: ci dice che, in ogni partizione finita dei naturali $\mathbb{N}=A_1\cup\cdots\cup A_n$, in uno degli A_i è sempre possibile trovare quattro elementi x,y,u,v per cui la somma $x+y$ è uguale al prodotto $u\cdot v$ e sta ancora dentro A_i. Con la traduzione nonstandard della Proposizione 22, si può arrivare velocemente a dimostrare la regolarità di questa proprietà utilizzando il Lemma seguente.

LEMMA 23. – *L'insieme S degli ultrafiltri che testimoniano la regolarità per partizioni di $x+y=z$ è un semigruppo* ([24]) *(non vuoto) rispetto al prodotto.*

Dimostrazione. Che S sia non vuoto segue direttamente dal Teorema di Schur. Siano ora $\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{U}_\beta\in S$. Dal Teorema 21 esistono $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mu(\mathcal{U})$ per cui $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$. Dalla Proposizione 22.(2) segue che $\alpha_1\cdot{}^*\beta,\alpha_2\cdot{}^*\beta,\alpha_3\cdot{}^*\beta\in\mu(\mathcal{U}_\alpha\cdot\mathcal{U}_\beta)$. Ma $\alpha_1\cdot{}^*\beta+\alpha_2\cdot{}^*\beta=\alpha_3\cdot{}^*\beta$ per cui, sempre per il Teorema 21, si ha che $\mathcal{U}_\alpha\cdot\mathcal{U}_\beta\in S$. □

COROLLARIO 24 – *$x+y=uv=z$ è regolare per partizioni.*

Dimostrazione. Sia S come nel Lemma 23. Dato che S è un semigruppo, per il Teorema di Ellis contiene un ultrafiltro idempotente rispetto al prodotto. Sia $\mathcal{U}$ questo ultrafiltro, e siano α,β,γ suoi generatori per cui $\alpha+\beta=\gamma$. Dato che $\mathcal{U}$ è moltiplicativamente idempotente, $\alpha\cdot{}^*\alpha,\beta\cdot{}^*\alpha\in\mu(\mathcal{U})$. Concludiamo, grazie al Teorema 21, ponendo $x=\alpha\cdot{}^*\alpha,y=\beta\cdot{}^*\alpha,u=\gamma,v={}^*\alpha,z=(\alpha+\beta)^*\alpha$. □

La Proposizione 22 fornisce anche un metodo generale per dimostrare la non regolarità per partizioni di varie proprietà $P(x_1,\ldots,x_n)$: basta far ve-

([24]) In realtà, la dimostrazione mostra che è addirittura un ideale bilatero in β.

dere che, per assurdo, la regolarità per partizioni di $P(x_1, \dots, x_n)$ porterebbe, usando il Teorema 21, a trovare elementi $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tutti $\sim_u$-equivalenti ma non tutti soddisfacenti una qualche stessa proprietà standard $Q(x)$, in contrasto con la Proposizione 22.5. Un esempio banale è la non regolarità([25]) di $x = y + 1$: se fosse regolare, troveremmo $\alpha \sim_u \beta$ con $\alpha = \beta + 1$. Dunque uno tra α e β sarebbe pari, l'altro dispari, in contrasto, come promesso, con la Proposizione 22.5.

Come esempio decisamente meno banale, dimostriamo la non regolarità per partizioni di $x + y = z^2$, che è stato un problema aperto per qualche anno.

PROPOSIZIONE 25. – *$x + y = z^2$ non è regolare per partizioni.*

Dimostrazione. Per assurdo, se fosse regolare dovrebbero esistere α, β, γ equivalenti con $\alpha + \beta = \gamma^2$. Scrivendo $\alpha = 3^{\alpha_1}\alpha_2, \beta = 3^{\beta_1}\beta_2, \gamma = 3^{\gamma_1}\gamma_2$, con $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ non divisibili per 3, si ha che deve essere $\alpha_1 \sim_u \beta_1 \sim_u \gamma_1$, $\alpha_2 \sim_u \beta_2 \sim_u \gamma_2$. Supponendo, senza perdita di generalità, che $\min\{\alpha_1, \beta_1\} = \alpha_1$, da $\alpha + \beta = \gamma^2$ si deduce che $3^{\alpha_1}\left(\alpha_2 + 3^{\beta_1 - \alpha_1}\beta_2\right) = 3^{2\gamma_1}\gamma_2^2$. Dato che $\alpha_2 + 3^{\beta_1 - \alpha_1}\beta_2, \gamma_2^2$ non sono divisibili per 3, ne segue che $\alpha_1 = 2\gamma_1$. Dunque, se $P(x)$ è la proprietà "la più alta potenza di 2 che divide x ha esponente pari", si ha che vale $P(\alpha_1)$ se e solo se vale $\neg P(\gamma_1)$, il che è in contrasto con $\alpha_1 \sim_u \gamma_1$. Abbiamo così l'assurdo cercato. □

Ovviamente, non tutti i problemi quantitativi sono semplici, né tutti possono essere studiati utilizzando tecniche nonstandard. Per il lettore che, incuriosito, volesse provare a dedicare un po' del suo tempo a giocare con le idee esposte qui sopra, vogliamo chiudere questa sezione con un problema tantalizzante, aperto da quaranta anni nonostante la sua apparente semplicità: l'equazione pitagorica $x^2 + y^2 = z^2$ è, o non è, regolare per partizioni?

3.2 – *Problemi quantitativi*

Le semplificazioni nonstandard dei problemi qualitativi passano, spesso, dalla possibilità di ottenere caratterizzazioni nonstandard di concetti classici che risultano essere molto più vicine all'intuizione, nonché solitamente più facili da maneggiare. I risultati quantitativi rimangono, comunque, ben più complicati da ottenere rispetto a quelli qualitativi; per questo, qui ci limitiamo a presentare due esempi basilari, rimandando a [17] per esempi assai più profondi.

Fondamentali in teoria combinatoria dei numeri sono gli insiemi sindetici a tratti:

DEFINIZIONE 26. – *Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti se*

$$\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall a \in [m, m+n]\ A \cap [a, a+k) \neq \emptyset.$$

Il concetto espresso dalla definizione precedente è che A è sindetico a tratti se esiste un numero naturale k per cui, su intervalli arbitrariamente lunghi, comunque siano presi k elementi consecutivi, almeno uno sta in A. Ad esempio, dati comunque $k \geq 2, n \in \mathbb{N}$, l'insieme

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid m \equiv nk\} \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [10^j, 10^j + j)$$

è banalmente sindetico a tratti; invece, $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ non lo è.

In senso nonstandard, l'essere sindetici a tratti può essere riformulato in modo sorprendentemente semplice:

PROPOSIZIONE 27. – *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Sono fatti equivalenti:*

1. *A è sindetico a tratti;*
2. *esistono $k \in \mathbb{N}$ ed $I \subseteq {}^*\mathbb{N}$ intervallo infinito([26]) tale che per ogni $a \in I$ ${}^*A \cap [a, a+k) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Dato che è sindetico, per qualche $k \in \mathbb{N}$ A soddisfa la proprietà

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall a \in [m, m+n]\ A \cap [a, a+k) \neq \emptyset,$$

([25]) Che è facilmente dimostrabile anche in modo standard, comunque.

([26]) Cioè I è della forma $I = [\alpha, \alpha + \beta]$ per qualche $\alpha \in {}^*\mathbb{N}, \beta \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

dunque per transfer ${}^*A$ soddisfa

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N}\ \exists m \in {}^*\mathbb{N}\ \forall a \in [m, m+n]\ {}^*A \cap [a, a+k) \neq \emptyset.$$

Per $n \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, preso un numero m corrispondente come nella formula qui sopra, si ha che l'intervallo $I = [m, m+n]$ è infinito e soddisfa la proprietà voluta.

$\Leftarrow$) Se $I = [\alpha, \alpha+\beta]$, dall'ipotesi data si deduce che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ${}^*A$ soddisfa la proprietà

$$\exists m \in {}^*\mathbb{N}\ \forall a \in [m, m+n]\ {}^*A \cap [a, a+k) \neq \emptyset;$$

infatti, basta porre $m = \alpha$ ed osservare che $n < \beta$, dato che β è infinito, quindi $[\alpha, \alpha+n] \subseteq I$.

Dunque, per transfer, per ogni $n \in \mathbb{N}$ A soddisfa la proprietà

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall a \in [m, m+n]\ A \cap [a, a+k) \neq \emptyset,$$

e la tesi è dimostrata. □

Quindi la caratterizzazione nonstandard permette di sostituire le infinite verifiche su intervalli sempre più lunghi con un'unica verifica su di un unico intervallo di lunghezza infinita. Questa semplificazione è comune a molte altre definizioni; ad esempio, in maniera analoga si può trovare una caratterizzazione nonstandard della nozione di densità (superiore) asintotica:

DEFINIZIONE 28. – *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, chiamiamo densità asintotica superiore di A il numero*

$$\overline{d}(A) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n}.$$

PROPOSIZIONE 29. – *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, sono fatti equivalenti:*

1. $\overline{d}(A) > 0$;
2. $\exists N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ *tale che* $st\left(\dfrac{|{}^*A \cap [1, N]|}{N}\right) > 0$.

Come già discusso brevemente nella sezione 1.4, la quantità $|{}^*A \cap [1, N]|$, che denota la cardinalità interna dell'insieme ${}^*A \cap [1, N]$, definita come quell'unico numero $M \in {}^*\mathbb{N}$ per cui esista una bigezione interna tra $[1, M]$ e ${}^*A \cap [1, N]$, può essere identificata con la numerosità di A, così come introdotta nel Capitolo 1, quando $N = \alpha$. Da questo punto di vista, la Proposizione 29 afferma che A ha densità asintotica positiva se e solo se è possibile definire una nozione di numerosità per sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ per cui il rapporto $\dfrac{num(A)}{num(\mathbb{N})}$ abbia parte standard positiva; sia, cioè, non infinitesimo. Rimandiamo a [4, 12] per maggiori dettagli, che portano anche ad estendere le considerazioni precedenti al caso della misura di Lebesgue.

Infine, per mostrare perché le caratterizzazioni nonstandard siano, talvolta, utili a semplificare i ragionamenti e le dimostrazioni, concludiamo il nostro lavoro mostrando come la caratterizzazione nonstandard della sindeticità a tratti permetta di dimostrare facilmente la seguente proprietà, equivalente alla regolarità per partizioni ([27]).

PROPOSIZIONE 30. – *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ sindetico a tratti. Se $A = A_1 \cup A_2$, allora almeno uno tra A_1 ed A_2 è sindetico a tratti.*

Dimostrazione. Siano k ed I come nella caratterizzazione nonstandard della sindeticità a tratti di A. Consideriamo ${}^*A_1 \cap I$. Se esiste $h \in \mathbb{N}$ per cui ${}^*A_1 \cap I$ ha buchi limitati da h, ne segue immediatamente che A_1 è sindetico a tratti per definizione (nonstandard). Altrimenti, ${}^*A_1 \cap I$ ha buchi arbitrariamente grandi, in particolare ha almeno un buco infinito J. Ma allora ${}^*A_2 \cap J = {}^*A \cap J$, ed ha quindi buchi lunghi al più k dato che $J \subseteq I$. In questo caso, quindi, A_2 è sindetico a tratti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] S. ALBEVERIO, J.E. FENSTAD, R. HOEGH-KROHN, T. LINDSTRØM, Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics, Dover Books on Mathematics, 2009.

[2] A. ALEXANDER, Infinitesimals: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World, Scientific American, 2014.

[3] V. BENCI, M. DI NASSO, A ring homomorphism is enough to get nonstandard analysis, Bull. Belg. Math. Soc. 10 (2003), 1-10.

([27]) La dimostrazione standard non è particolarmente complicata, ma nemmeno così immediata come la controparte nonstandard.

[4] V. Benci, M. Di Nasso, Alpha-theory: an elementary axiomatic for nonstandard analysis, Expo. Math. 21 (2003), 355-386.

[5] V. Benci, M. Di Nasso, Numerosities of labelled sets: a new way of counting, Adv. Math. 173 (2003), 50-67.

[6] V. Benci, M. Di Nasso, How to measure the Infinite: Mathematics with Infinite and Infinitesimal Numbers, World Scientific, Singapore, 2018.

[7] V. Benci, P. Freguglia, La matematica e l'infinito, Carocci, 2019, ISBN: 8843095250.

[8] V. Benci, P. Freguglia, Alcune osservazioni sulla matematica non archimedea, Matem. Cultura e Soc., RUMI, 1 (2016), 105-122.

[9] V. Benci, L. Horsten, S. Wenmackers, Non-Archimedean Probability, Milan J. Math. 81 (2013), 121-151.

[10] V. Benci, L. Luperi Baglini, Euclidean numbers and numerosities, J. Symbolic Logic (2022), 1-35.

[11] V. Benci, Alla scoperta dei numeri infinitesimi, Lezioni di analisi matematica esposte in un campo non-archimedeo, Aracne editrice, Roma, 2018.

[12] V. Benci, Un possibile percorso didattico: dalle numerosità ai numeri euclidei, Atti del convegno: VIII giornata nazionale di Analisi Nonstandard (P. Bonavoglia ed.), 21-33, 2019, ISBN: 1220064475.

[13] P. Bontivoglia, Il calcolo infinitesimale. Analisi per i licei alla maniera non standard, Universal Book, 2011, ISBN 9788896354131.

[14] G. Cherlin, J. Hirschfeld, Ultrafilters and ultraproducts in non-standard analysis, in: Contributions to Non-Standard Analysis (W.A.J. Luxemburg, A. Robinson, eds.), North Holland, Amsterdam (1972), 261-279.

[15] M. Di Nasso, Iterated Hyper-Extensions and an Idempotent Ultrafilter Proof of Rado's Theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 1749-1761.

[16] M. Di Nasso, L. Luperi Baglini, Ramsey properties of nonlinear Diophantine equations, Adv. Math. 324 (2018), 84-117.

[17] M. Di Nasso, I. Goldbring, M. Lupini, Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory, Lecture Notes in Mathematics 2239, Springer, 2019.

[18] P. Du Bois-Reymond, Über die Paradoxen des Infinitär-Calcüls, Math.Annalen 11 (1877), 150-167.

[19] R. Goldblatt, Lectures on the Hyperreals – An Introduction to Nonstandard Analysis, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 188, Springer, NewYork, 1998.

[20] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen, Teubner, Leipzig, 1899.

[21] N. Hindman, D. Strauss, Algebra in the Stone-Čech Compactification, de Gruyter, Berlin, 1998.

[22] J. Hirschfeld, Nonstandard combinatorics, Studia Logica 47 (1988), 221-232.

[23] K. Hrbáček, Internally iterated ultrapowers, in: Nonstandard Models of Arithmetic and Set Theory (A. Enayat, R. Kossak, eds.), Contemporary Math. 361, 2004, American Mathematical Society.

[24] K. Hrbáček, O. Lessmann, R. O'Donovan, Analysis with Ultrasmall Numbers, Chapman & Hall/CRC (2015).

[25] R. Jin, Introduction of nonstandard methods for number theorists, Proceedings of the CANT (2005) – Conference in Honor of Mel Nathanson, Integers 8 (2008), A7.

[26] H.J. Keisler, Foundations of infinitesimal calculus, last edition, University of Wisconsin at Madison, 2009.

[27] K. Kunen, Some applications of iterated ultrapowers in set theory, Ann. Math. Log. 1 (1970), 179-227.

[28] S.C. Leth, Some Nonstandard Methods in Combinatorial Number Theory, Studia Logica 47 (1988), 265-278.

[29] T. Levi-Civita, Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Venezia (Serie 7), (1892-93).

[30] L. Luperi Baglini, Hyperintegers and Nonstandard Techniques in Combinatorics of Numbers, PhD Dissertation (2012), University of Siena, arXiv: 1212.2049.

[31] L. Luperi Baglini, Quanti elementi ha un insieme infinito, MatematicaMente 293-94 (2022).

[32] L. Luperi Baglini, Nonstandard characterisations of tensor products and monads in the theory of ultrafilters, Math. Log. Quart. 65 (2019), 347-369.

[33] W.A.J. Luxemburg, A General Theory of Monads, in: Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability, (W.A.J. Luxemburg ed.), Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1969, 18-86.

[34] E. Mendelson, Introduzione alla Logica Matematica, Bollati Boringhieri, 1977.

[35] G. Peano, Sugli ordini degli infiniti, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 19 (1910), 778-781.

[36] A. Raab, An approach to nonstandard quantum mechanics, J. Math. Phys. 45 (2004), 4791-4809.

[37] A. Robinson, Non-standard Analysis, North Holland, Amsterdam, 1966.

[38] Y. Sun, Nonstandard analysis in mathematical economics, in: Nonstandard Analysis for the Working Mathematician (P. Loeb, M. Wolff eds.), Second edition, Springer (2015), 349-399.

[39] G. Veronese, Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede, Memorie della Reale Accademia dei Lincei, Atti della Classe di scienze naturali, fisiche e matematiche 4, (1889), 603-624.

[40] G. Veronese, Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti o infinitesimi attuali, Math. Ann. 47 (1896), 423-432.

[41] D. Zambelli et al., Matematica C3, www.matematicadolce.eu, (2019). ISBN: 9788899988005.

Lorenzo Luperi Baglini

Lorenzo Luperi Baglini si è dottorato in Logica Matematica a Siena nel 2012 con una tesi riguardante applicazioni dell'analisi nonstandard in combinatoria. Dopo una breve parentesi da assegnista all'Università di Pisa, ha partecipato e diretto alcuni progetti di ricerca su matematiche non archimedee presso l'Università di Vienna. Dal 2019 lavora presso l'Università di Milano, prima come ricercatore e, dal 2022, come Professore Associato in Logica Matematica.

Vieri Benci

Il Prof. Vieri Benci si è prevalentemente occupato di equazioni della fisica matematica e di questioni di logica collegate ai numeri infiniti ed infinitesimi. Tra i sui libri più recenti ricordiamo Variational methods in nonlinear field equations*, (con D. Fortunato) Springer, (2014),* How to measure the infinite*, (con M. Di Nasso) World Scientific, Singapore, 2018,* La matematica e l'infinito*, (con P.Freguglia), Carocci editore, (2019). Benci appare nella ''ISI Highly Cited List'' ed è stato insignito di vari riconoscimenti quali il premio Amerio e il titolo di Commendatore.*